

# Raffinamenti dell'equilibrio di Nash

equilibri perfetti nei sottogiochi (SPE) ed altro

Appunti a cura di  
Fioravante PATRONE

versione del: 11 maggio 2010

## Indice

1	Equilibri perfetti nei sottogiochi (SPE)	2
2	SPE problematici	4
3	Famosi SPE problematici: “chain store paradox” e centipede	10
4	Equilibri perfetti e propri: cenni	14

Vengono introdotti gli equilibri perfetti nei sottogiochi (che indicherò brevemente come SPE, usando l'acronimo inglese...), descrivendo anche esempi problematici. Viene fatto un breve cenno anche ad altri raffinamenti (equilibri perfetti e propri).

Link vari:

Fioravante PATRONE

ASD Scuderia La Bellaria

Decisori (razionali) interagenti

Equazioni differenziali e urang-utang©

E-mail: [patrone@diptem.unige.it](mailto:patrone@diptem.unige.it)

## 1 Equilibri perfetti nei sottogiochi (SPE)

Si consideri il gioco (dovuto a Selten<sup>1</sup>) in forma estesa di figura 1.

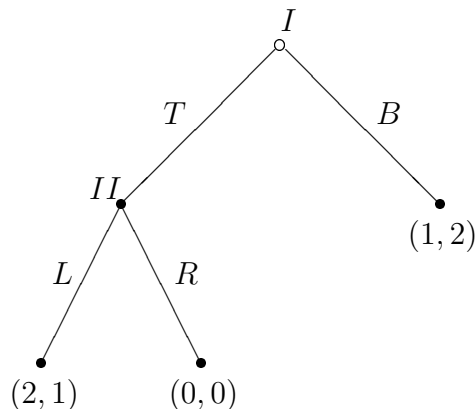


Figura 1: Il gioco “di Selten”

Quale risultato ci si può attendere? Tenendo conto dei presupposti di razionalità ed intelligenza dei giocatori, possiamo pensare che  $I$  giochi  $T$ . Perché prevede che, quando tocca a  $II$  scegliere, egli sceglierà  $L$ , visto che gli dà un risultato migliore che  $R$  (infatti  $II$  ottiene un payoff pari ad 1 se gioca  $L$ , mentre se sceglie  $R$  ottiene 0). Visto che il payoff che  $I$  ottiene dalle scelte  $T$  ed  $L$  è addirittura il migliore che lui possa avere in questo gioco, ci possiamo davvero attendere che egli scelga  $T$ . Ciò che abbiamo fatto non è stato altro che applicare il metodo dell'induzione a ritroso: la chiave per risolvere il problema di “cosa giocare” è stata l'idea di andare a vedere cosa avviene all'ultimo nodo e da lì risalire ai nodi precedenti.

Possiamo, comunque, scrivere la forma strategica del gioco e vedere di trovarne gli equilibri di Nash:

$I \backslash II$	$L$	$R$
$T$	2, 1	0, 0
$B$	1, 2	1, 2

<sup>1</sup>Per la precisione, il gioco analizzato da Selten avrebbe come payoff, “da sinistra a destra”, (3, 1), (0, 0) e (2, 2). Dal punto di vista dell'analisi, non fa differenza. Il gioco è stato considerato da Selten, a pag. 307, in *Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit. Teil I: Bestimmung des dynamischen preisgleichgewichts*, Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, **121**, 301-324, 1965. Ringrazio Pier Angelo Mori per avermi procurato questo famoso contributo di Selten, difficilmente rintracciabile nelle biblioteche italiane.

Si vede immediatamente che questo gioco ha *due* equilibri (in strategie pure):  $(T, L)$  e  $(B, R)$ . Quale è il senso del nuovo equilibrio che abbiamo trovato, ovvero  $(B, R)$ ?

Possiamo interpretarlo come risultato di una minaccia (di “ritorsione”) da parte di  $II$ : se  $I$  non gioca  $B$  (che dà a  $II$  il risultato migliore possibile), allora  $II$  per ritorsione giocherà  $R$ , “punendo” il giocatore  $I$ . Va notato, tuttavia, che  $I$  punisce anche se stesso! La scelta di  $R$  non è infatti ottimale per  $II$ , che ottiene un payoff migliore giocando  $L$ .

Come è possibile che un equilibrio di Nash preveda per un giocatore una scelta sub-ottimale? La risposta è facile: in realtà, l'equilibrio  $(B, R)$  non prevede affatto che  $II$  giochi davvero  $R$ ; la scelta di  $B$  fa terminare il gioco e quindi  $II$  non deve effettivamente fare questa scelta. Più in generale, un equilibrio di Nash può prevedere delle scelte non ottimali da parte dei giocatori, ma queste scelte riguardano nodi dell'albero che non vengono raggiunti, se viene appunto giocato quanto previsto dall'equilibrio.

D'altro canto, l'equilibrio  $(B, R)$  sembra comunque essere meno attendibile di quanto non lo fosse  $(T, L)$ . In effetti, la “minaccia” da parte di  $II$  di giocare  $R$  è ben poco attendibile: se  $I$  lo ignora e gioca  $T$ , a questo punto, per la sua stessa razionalità,  $II$  giocherà  $L$ . Insomma, abbiamo scoperto che non tutti gli equilibri di Nash sono “uguali”. E questo lo abbiamo visto chiaramente utilizzando la forma estesa. Tutto ciò ci porta alla definizione di “equilibrio perfetto nei sottogiochi” (SPE: subgame perfect equilibrium), che è dovuto a Selten (1965).

Se ci limitiamo, per semplicità, ai giochi ad informazione perfetta, la condizione che imponiamo è che non solo si abbia un equilibrio, ma che tale resti anche quando “restringiamo” le strategie ai sottogiochi del gioco dato. Per un gioco ad informazione perfetta la definizione di sottogioco è semplicissima: si tratta di considerare un generico nodo e prenderlo come “radice” del gioco. Osserviamo che il metodo della induzione a ritroso per trovare un equilibrio di Nash in un gioco ad informazione perfetta fornisce, in realtà, un equilibrio perfetto nei sottogiochi.

Se abbiamo un gioco ad informazione imperfetta, non c'è alcun problema ad estendere la definizione di sottogioco. Esso sarà individuato da un sottoinsieme dei vertici dell'albero dato, con la proprietà che se un nodo appartiene a questo sottoinsieme, allora tutto l'insieme di informazione individuato da questo nodo vi appartiene. Il metodo di induzione a ritroso non può, però, essere generalmente applicato ai giochi a informazione imperfetta.

## 2 SPE problematici

Se l'idea di equilibrio perfetto nei sottogiochi permette di eliminare alcuni equilibri di Nash, per così dire “inferiori”, non ci si deve però aspettare che scompaiano tutti i problemi.

Basta considerare gli esempi delle figure 2, 3 e 4: provate a trovare gli SPE. E, soprattutto, cercate di immaginare cosa fareste voi, se foste il giocatore  $I$ .

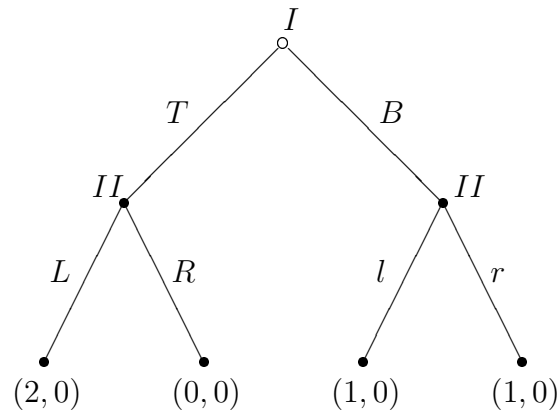


Figura 2: Siete ottimisti o pessimisti?

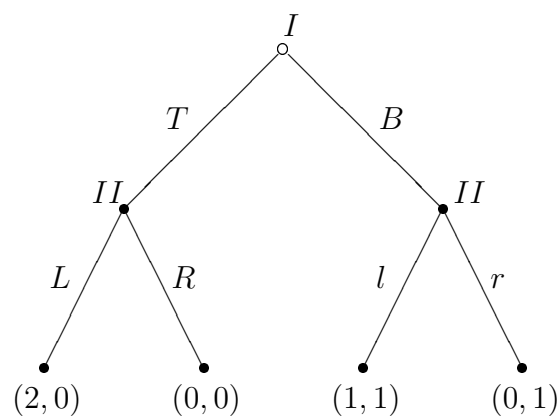


Figura 3: E qui, siete ottimisti o pessimisti?

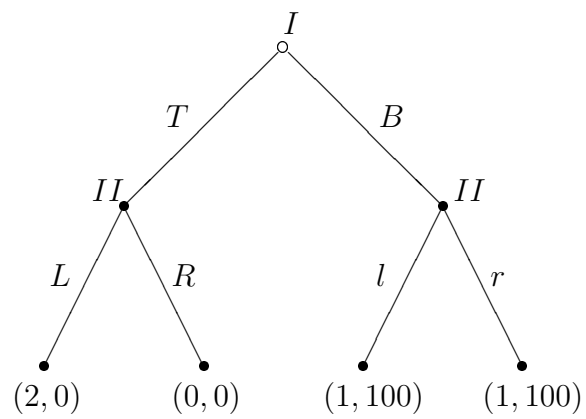


Figura 4: E, infine, qui siete sempre ottimisti?

Su una falsariga analoga (ma non identica) ai tre esempi appena citati, si potrebbe anche considerare il gioco di figura 5, che possiamo assimilare all'idea di "ultimatum game". Si noti che in questo esempio c'è un unico equilibrio perfetto nei sottogiochi.

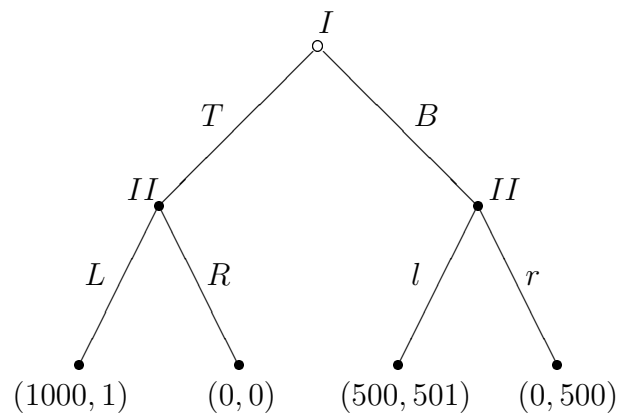


Figura 5: Un ulteriore esempio sul tema dell'ottimismo/pessimismo

Un altro esempio è dato dalla figura 6. In questo caso c'è un unico SPE. Ma certo il giocatore *II* potrebbe essere “incattivito” se *I* fa la scelta prevista dal SPE. In effetti, questo gioco assomiglia al cosiddetto “ultimatum game”, che è forse il più studiato a livello della Teoria dei Giochi sperimentale.

Il gioco dell'ultimatum avviene così: su un tavolo ci sono 100 monete

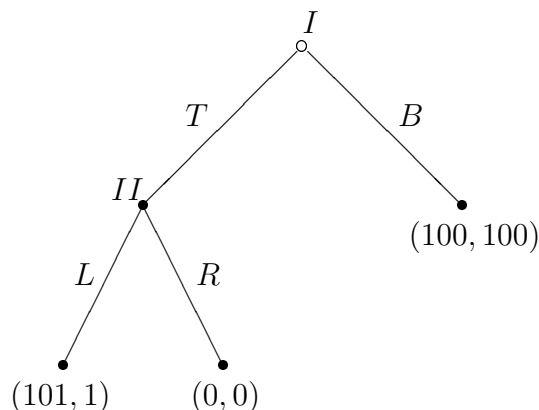


Figura 6: Una scelta delicata?

da 1 euro. Il giocatore *I* deve fare una proposta di spartizione, indicando quante monete lui vuole prendere (da 1 a 99). Dopo di che tocca a *II*, che può scegliere tra due opzioni: accetta la proposta di spartizione di *I* oppure rifiuta. Nel caso in cui rifiuta, entrambi i giocatori non prendono nulla.

Nella figura 7 è disegnato (in parte: per ovvi motivi molti rami sono stati omessi) il gioco in forma estesa.

E' immediato verificare che il SPE prevede che *I* scelga 99 monete per sé e che *II* accetti. Nella realtà effettiva, la probabilità che *II* accetti, qualora *I* tenga per sé più di una settantina di monete, è molto bassa. Una prima spiegazione di questi risultati è che non sono difformi dalle predizioni della Teoria dei Giochi: semplicemente, le preferenze del giocatore *II* non tengono conto solo dei soldi. Ma potrebbero (possono!) incorporare altri fattori: aspetti di “giustizia”, o di “rivalsa”, od altro.

Una ulteriore difficoltà che si ha con gli equilibri perfetti nei sottogiochi è legata al fatto che un sottogioco potrebbe avere due equilibri di Nash. Tenendo conto di questo, per un giocatore può accadere che una sua scelta sia ottimale se viene giocato nel sottogioco un equilibrio di Nash, ma questa non lo sia più se invece venisse giocato l'altro. Basta vedere l'esempio di Figura 8.

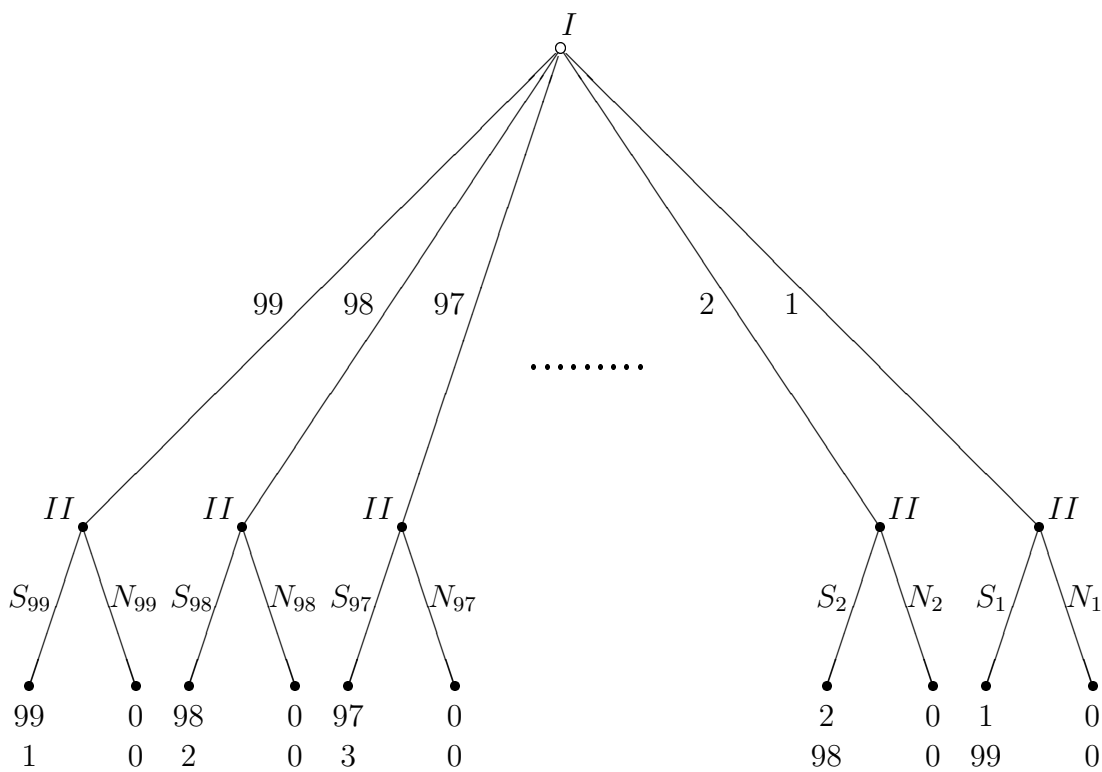


Figura 7: L'ultimatum game

Il gioco ha due sottogiochi: sé stesso (come sempre), ed un sottogioco proprio. Nel sottogioco proprio i giocatori *I* e *II* affrontano la classica “battaglia dei sessi” che ha due equilibri:  $(T, L)$  e  $(B, R)$ . Se viene scelto  $(T, L)$ , questo comporta un payoff pari a 3 per *III* che quindi sceglierebbe *S* (visto che *D* gli dà un payoff pari a 2). Se invece viene scelto  $(B, R)$ , a *III* conviene l'alternativa *D* che, come già notato, gli dà un payoff pari a 2, invece che *S* che lo porterebbe ad ottenere 1.

Insomma, vi sono due SPE:  $(T, L, S)$  e  $(B, R, D)$ . Il guaio è che non si capisce come *III* possa “sapere” quale sarà la scelta di *I* e *II*. Insomma, ritroviamo anche con gli SPE il problema della “non rettangolarità”.

Analogo al gioco di Figura 8 è il gioco di Figura 9, sul quale non faccio troppi commenti, in quanto è, per l'appunto, una semplice variante.  $(Tt, Ll, S)$  e  $(Bb, Rr, D)$  sono due equilibri di Nash perfetti nei sottogiochi. Essi presuppongono che nei due sottogiochi siano giocati: nel primo caso,  $(T, L)$  e  $(t, l)$ ; nel secondo  $(B, R)$  e  $(b, r)$ . Non è però facile comprendere da dove provengano tali doti divinatorie del giocatore *III*. Solo per curiosità, vediamo in Tabella 1 la forma strategica del gioco di Figura 9:



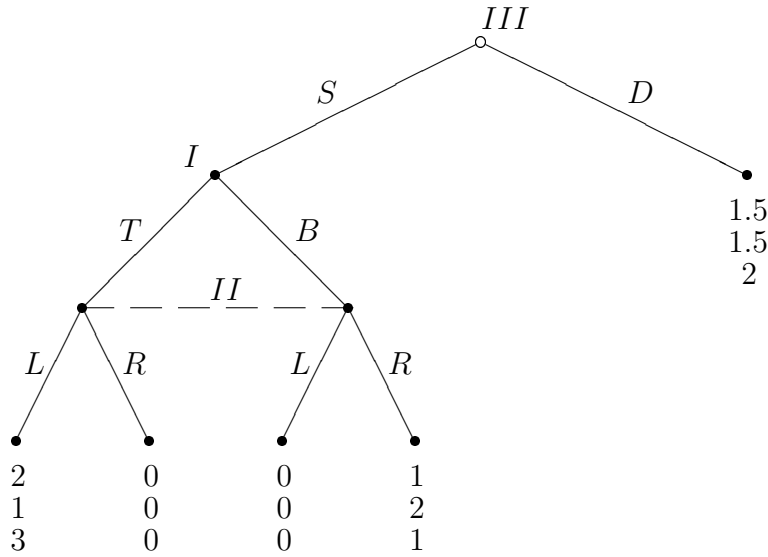


Figura 8: Difficoltà a coordinare le aspettative

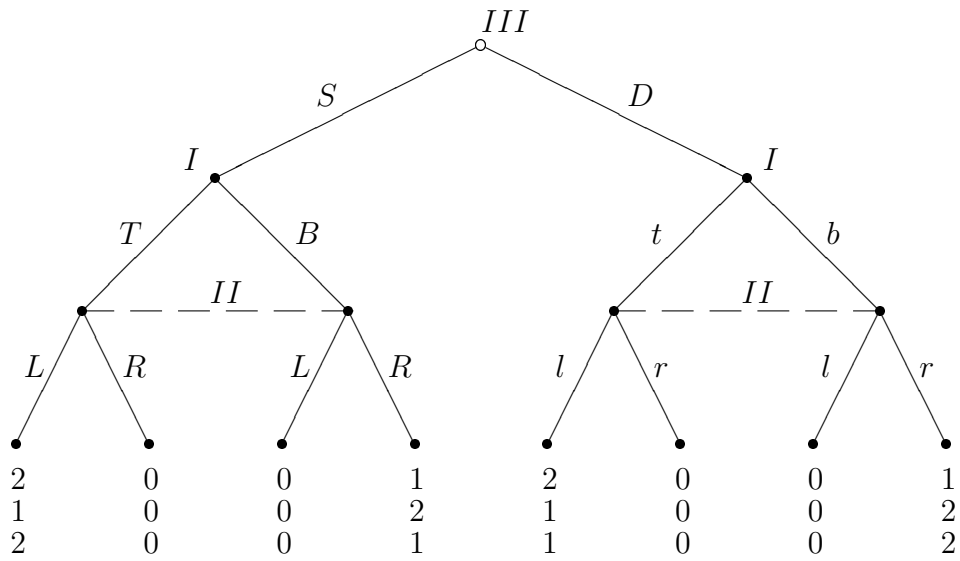


Figura 9: Difficoltà a coordinare le aspettative

$I \backslash II$	Ll	Lr	Rl	Rr
Tt	2 1 2	2 1 2	0 0 0	0 0 0
Tb	2 1 2	2 1 2	0 0 0	0 0 0
Bt	0 0 0	0 0 0	1 2 1	1 2 1
Bb	0 0 0	0 0 0	1 2 1	1 2 1

III sceglie S

$I \backslash II$	Ll	Lr	Rl	Rr
Tt	2 1 1	0 0 0	2 1 1	0 0 0
Tb	0 0 0	1 2 2	0 0 0	1 2 2
Bt	2 1 1	0 0 0	2 1 1	0 0 0
Bb	0 0 0	1 2 2	0 0 0	1 2 2

III sceglie D

Tabella 1: La forma strategica del gioco in Figura 9

### 3 Famosi SPE problematici: “chain store paradox” e centipede

Vi sono altri esempi in cui un SPE risulta essere problematico. Un paio sono molto famosi: il “chain store paradox” (Selten, *Theory and Decision*, 1978) e il “centipede” (Rosenthal, *Journal of Economic Theory*, 1981).

Nel caso del “chain store paradox”, abbiamo un giocatore (la catena di supermercati) che si confronta in sequenza con vari giocatori (nell'esempio di Selten sono 20, ciascuno in una città diversa). Ciascuno dei quali può decidere se aprire oppure no un supermercato. Rinvio alla lettura del lavoro originario di Selten per i dettagli e per le molte ed interessanti considerazioni che fa.

Il gioco è costituito da una sorta di “ripetizioni” di una struttura “componente” (che è analoga all'esempio che abbiamo usato per introdurre gli SPE), che è riportata in figura 10.

L'idea è che il giocatore 1 può decidere se aprire un supermercato (IN) oppure no (OUT). Se non lo apre, ovverossia se non fa concorrenza alla catena di supermercati  $S$ , la catena  $S$  guadagna 5 (perchè non trova concorrenza) mentre lui resta con il capitale che aveva, cioè 1. Se uno apre il supermercato, la reazione di  $S$  può essere di due tipi diversi:  $A$  ( $A$  sta per “aggressiva”), oppure  $C$  ( $C$  sta per “conciliante”). La scelta  $A$  potrebbe corrispondere, ad esempio, ad una guerra di prezzi, che porta di fatto sia 1 che  $S$  a non guadagnare nulla (anzi, 1 perde anche il capitale che aveva). Se invece la scelta è  $C$ , di fatto i due si spartiscono il mercato. È evidente che l'equilibrio perfetto nei sottogiochi è  $(IN, C)$ .

Nel caso di due potenziali concorrenti per  $S$ , l'albero è rappresentato in figura 11.

L'equilibrio perfetto nei sottogiochi è indicato dalle frecce. Il risultato è 2

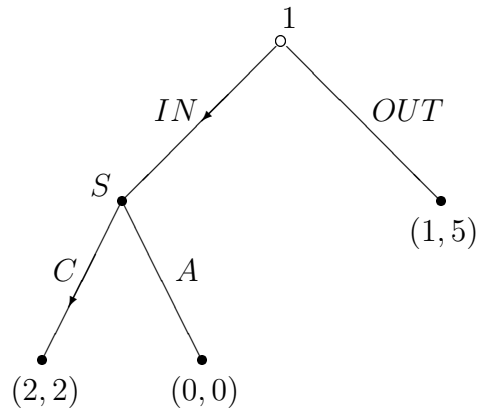


Figura 10: Il gioco dell'entrante

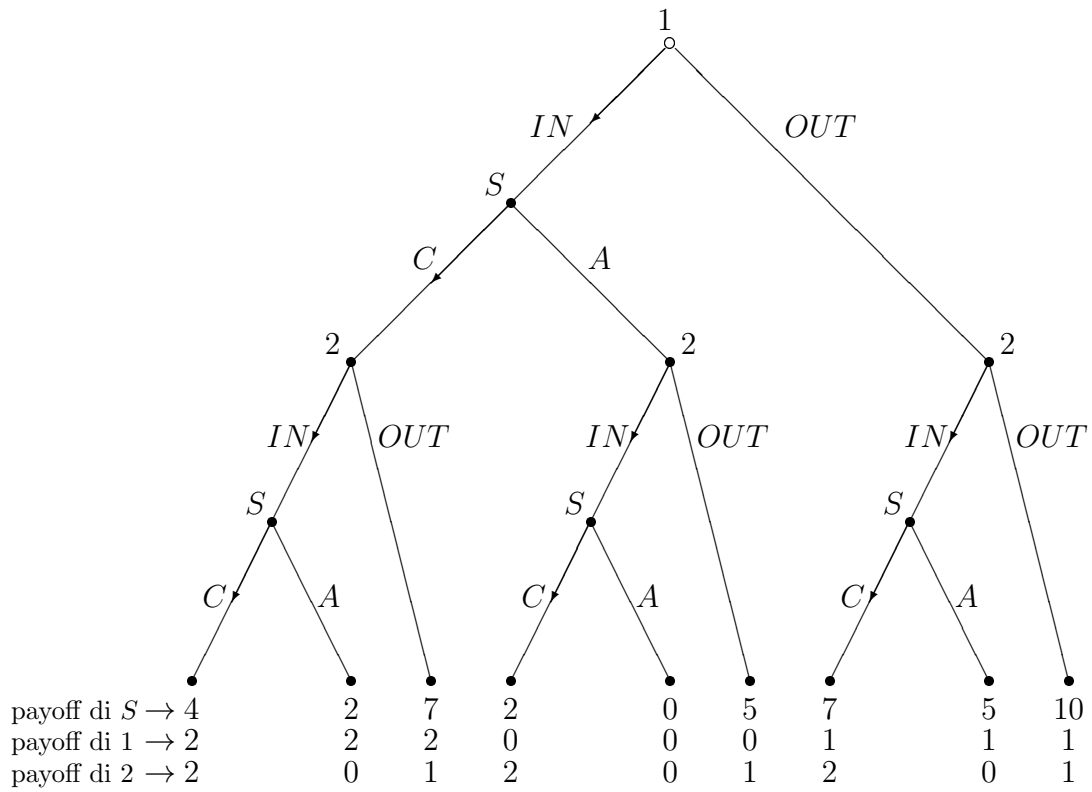


Figura 11: Il gioco dell'entrante a due stadi

per i due potenziali rivali (che di fatto aprono entrambi il supermercato), e di 4 per la catena S. Si noti che S potrebbe ottenere un payoff pari a 10, se

potesse convincere i due potenziali concorrenti a stare fuori dal mercato. Se i potenziali rivali, anziché essere due, sono venti (come nell'esempio originale di Selten),  $S$  ricaverebbe un guadagno ben maggiore ( $20 \cdot 5$  anziché  $20 \cdot 2$ ) se riuscisse a convincerli che lui adotterebbe una strategia aggressiva. Insomma, l'idea di SPE non contempla l'utilità che può avere per un giocatore costruirsi una "reputazione": lo obbliga, se così si può dire, a fare delle scelte miopi, pur se razionali.

L'esempio di Rosenthal mostra alcuni aspetti interessanti. Uno è che l'esito di un SPE può essere inefficiente. Ma questo non è certo una novità. Mostra anch'esso una sorta di "miopia" nelle strategie che i giocatori vengono "obbligati" a giocare se si accetta l'idea di SPE. L'aspetto però più interessante riguarda un problema di contraddittorietà nelle argomentazioni che stanno alla base dell'idea di SPE.

Il gioco è disegnato in figura 12 (volendo, lo si può "allungare" a piacimento, per rendere ancora più stridenti le difficoltà che emergono).

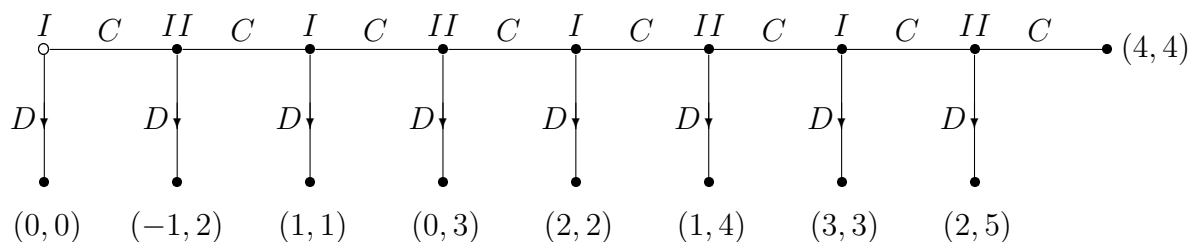
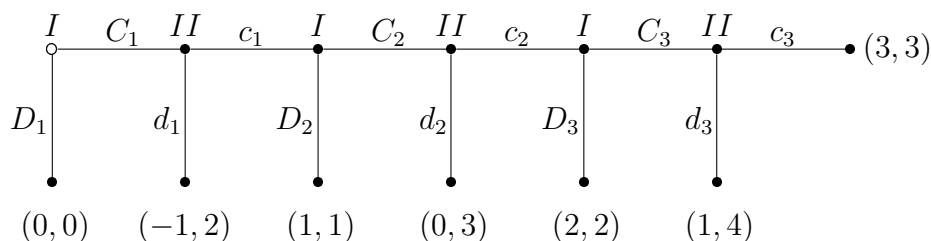


Figura 12: Il "centipede" di Rosenthal

Sono già state messe in evidenza (con frecce) le scelte che corrispondono al SPE. Come si vede, il risultato è inefficiente. Ed un po' di "capacità di vedere lontano" dovrebbe portare i giocatori a non "defezionare" subito dal gioco.

Ma c'è un problema ancor più grave. Si pensi al ragionamento che fa  $II$  quando "defeziona" la terza volta in cui tocca a lui giocare. Perché "defezionare"? Perché ritiene (da induzione a ritroso) che nella mossa successiva  $I$  defezionerebbe. Ma se  $II$  si trova davvero a dover giocare la sua terza mossa, ciò è solo perché  $I$  ha deciso per ben tre volte di comportarsi in modo diverso da come prescrive lo SPE (ed anche  $II$  stesso, si noti!). Appare quindi un po' curioso che  $II$  "defezioni" ipotizzando un comportamento futuro di "razionalità" da parte di  $I$ , che se fosse stato adottato in passato non avrebbe certamente portato  $II$  a dover giocare!

Ritorniamo un momento sul gioco del “centipede”, di cui riporto sotto una versione un po’ più “corta” per comodità (per avere una matrice un po’ più piccola, senza perdere nulla di essenziale). Ho anche indicato con simboli diversi le alternative disponibili in corrispondenza dei vari nodi: quindi,  $D_1$  vuol dire che il giocatore  $I$  “defeziona” alla prima mossa, mentre ad esempio  $c_2$  vuol dire che il giocatore  $II$  “continua” alla seconda mossa.



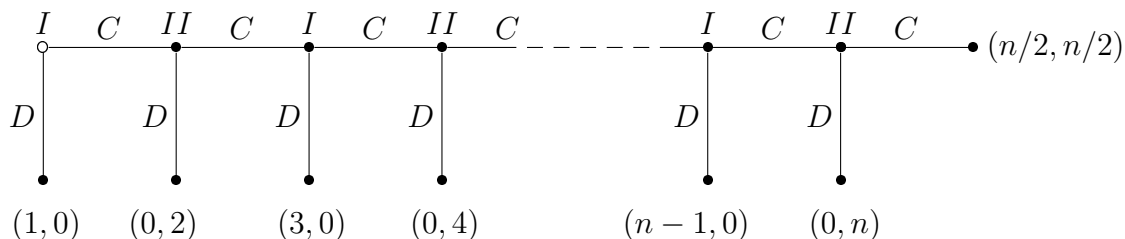
Abbiamo visto che c’è un unico SPE, ed abbiamo visto la problematicità che presenta la sua giustificazione in questo gioco. Potremmo chiederci cosa avvenga per gli equilibri di Nash. Presto detto. Possiamo scrivere la forma normale del gioco, descritta dalla tabella seguente:

	$d_1d_2d_3$	$d_1d_2c_3$	$d_1c_2d_3$	$d_1c_2c_3$	$c_1d_2d_3$	$c_1d_2c_3$	$c_1c_2d_3$	$c_1c_2c_3$
$D_1D_2D_3$	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
$D_1D_2C_3$	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
$D_1C_2D_3$	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
$D_1C_2C_3$	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
$C_1D_2D_3$	(-1, 2)	(-1, 2)	(-1, 2)	(-1, 2)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)
$C_1D_2C_3$	(-1, 2)	(-1, 2)	(-1, 2)	(-1, 2)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)
$C_1C_2D_3$	(-1, 2)	(-1, 2)	(-1, 2)	(-1, 2)	(0, 3)	(0, 3)	(2, 2)	(2, 2)
$C_1C_2C_3$	(-1, 2)	(-1, 2)	(-1, 2)	(-1, 2)	(0, 3)	(0, 3)	(1, 4)	(3, 3)

Si vede facilmente come questo gioco abbia 16 equilibri di Nash, corrispondenti alle coppie di strategie per cui i giocatori utilizzano la mossa  $D_1$  (rispettivamente  $d_1$ ), e che individuano le 16 caselle del quadrante in alto e a sinistra della matrice del gioco in forma strategica.

Si noti come l'esito previsto, comunque, dall'equilibrio di Nash sia uguale a quello previsto dal SPE. Per entrambi questi concetti di soluzione, si prevede che i giocatori “defezionino” alla prima mossa. La differenza tra la predizione dell'equilibrio di Nash e quella del SPE, è che l'equilibrio di Nash non offre nessuna restrizione al comportamento dei giocatori nei nodi seguenti<sup>2</sup>, mentre il SPE è molto più “rigido”. Tanto è vero che di SPE ce n'è uno solo.

Già che stiamo parlando di centipedi, vorrei citare un gioco che ha alcune caratteristiche simili al centipede. Si tratta del gioco “prendere o lasciare” dovuto a Reny. Ne descrivo qui sotto la forma estesa. Anche qui, come nel centipede, ci sarebbe la convenienza a raggiungere l'ultimo nodo. Esito che sarebbe facilmente prevedibile se fosse possibile sottoscrivere accordi vincolanti (ovvero, nel contesto dei giochi cooperativi). Come nel centipede, ad ogni stadio la soluzione preferita è la “deviazione”. A differenza del centipede, più si procede col gioco, e quindi più ci si avvicina all'esito “cooperativo” più forti diventano gli incentivi a deviare.



## 4 Equilibri perfetti e propri: cenni

I SPE sono un cosiddetto “raffinamento” degli equilibri di Nash che sfrutta la forma estesa. Sono però stati proposti altri raffinamenti che utilizzano solo la forma strategica. Mi limito a citare due nomi: gli equilibri perfetti (introdotti da Selten nel 1975) e gli equilibri propri (dovuti a Myerson, 1978). Vediamo un paio di esempi.

Nel primo caso abbiamo due equilibri di Nash (in strategie pure):  $(T, L)$  e  $(B, R)$ . Ma solo  $(T, L)$  è “perfetto”.

<sup>2</sup>Una così completa “libertà di comportamento” non si ha sempre! Ad esempio, nel Dilemma del Prigioniero ripetuto due volte non è che i giocatori “possano fare quello che vogliono” nei nodi dell'albero non raggiunti dal gioco in equilibrio.

$I \backslash II$	$L$	$R$
$T$	1, 1	0, 0
$B$	0, 0	0, 0

Nel gioco:

$I \backslash II$	$L$	$C$	$R$
$T$	1, 1	0, 0	-9, -9
$M$	0, 0	0, 0	-7, -7
$B$	-9, -9	-7, -7	-7, -7

In questo gioco sia  $(T, L)$  che  $(M, C)$  sono equilibri perfetti, mentre solo  $(T, L)$  è proprio.

L'idea di equilibrio perfetto è basata sul fatto che il giocatore non è in grado di evitare errori. E quindi un equilibrio dovrebbe essere, per così dire, "limite" di equilibri che si ottengono "obbligando" i giocatori ad effettuare errori (il limite si fa facendo tendere a zero gli errori). L'idea di equilibrio proprio è simile, solo che si assume che un giocatore metta, per così dire, più impegno ad evitare gli errori che per lui sono più costosi.

Per una definizione formale, si rinvia ai manuali (ad es., Gibbons. Oppure Fudenberg e Tirole, ad anche Myerson).