Equilibri correlati

Appunti a cura di
Fioravante PATRONE
http://www.diptem.unige.it/patrone/default.htm

versione del: 18 novembre 2006

Fioravante PATRONE	http://www.diptem.unige.it/patrone	homepage
Dipartimento di Ingegneria della	http://tdg.dima.unige.it	web teaching
Produzione, Termoenergetica e	http://www.citg.unige.it/citg.htm	web server "CITG"
Modelli Matematici	http://www.scallywag.it	web page del gruppo
P.le Kennedy - Pad D		Sca$\lambda\lambda$ywag
16129 Genova - ITALY		
patrone@diptem.unige.it	http://www.diptem.unige.it/patrone/DRI.htm	Decisori (razionali) interagenti

Consideriamo il gioco detto “battaglia dei sessi”.

La sua matrice è indicata a lato.
Oltre ai due equilibri di Nash,
(T, L) e (B, L), in strategie pure,
ha anche un equilibrio in strategie miste.

		I			
		L		R	
II	T	2	1	0	0
	B	0	0	1	2

Questo consiste nel giocare T con probabilità $2/3$ (e B con probabilità $1/3$) per il primo giocatore, mentre per il secondo si sceglie L con probabilità $1/3$ (e R con probabilità $2/3$). Il *payoff* atteso, per entrambi i giocatori, è $2/3$. Ne segue che ognuno dei due giocatori preferisce il peggiore (per lui) dei due equilibri in strategie pure a questo equilibrio in strategie miste.

È evidente che alla radice di questa scarsa “performance” dell'equilibrio in strategie miste c'è la assunzione che le due strategie miste siano “implementate” in modo indipendente dai due giocatori. Cosicché sulle caselle (T, R) e (B, L) va a “cadere” una quota consistente di probabilità: $5/9$ (anzi la casella più “gettonata” è quella (T, R) che verrà giocata con probabilità $4/9$, mentre le due caselle (T, L) e (B, R) vengono giocate con probabilità $2/9$ ciascuna). Vale allora la pena di vedere se: due giocatori possono “correlare” le loro strategie in qualche modo. Per esempio, potrebbero *accordarsi* sul seguente “piano d'azione”: “lanciamo una moneta: se viene testa I giocherà T e II L, se viene croce I giocherà B e II R”. Naturalmente *escludiamo che l'accordo possa essere vincolante* (altrimenti ci veniamo a trovare nell'ambito dei cosiddetti “giochi cooperativi”). E deve essere chiaro che, dopo il lancio della moneta, i due devono “giocare” in modo indipendente e “contemporaneo” (senza che ci sia spazio per ulteriori accordi!). Possiamo ragionevolmente attenderci che i giocatori rispettino questo accordo non vincolante? Beh, quantomeno è stabile rispetto a deviazioni unilaterali! Se, a esempio, è uscito “testa”, I dovrebbe giocare T e II L: I non ha ragioni per violare l'accordo, se ammette che II lo rispetti. E analogamente per II. È anche facile calcolare che questo “piano d'azione” assegna a entrambi i giocatori un'utilità pari a $3/2$. Potrebbe sembrare un ragionevole compromesso. ovviamente richiede però che i due giocatori possano *comunicare* tra di loro.

Si verifica facilmente che questa idea può essere generalizzata: un accordo che preveda di affidare “al caso” la scelta di uno tra gli equilibri di Nash di un gioco avrà sempre la caratteristica di essere stabile rispetto a deviazioni unilaterali.

Si può fare *molto* meglio.

Consideriamo il gioco indicato a lato. Ha due equilibri "puri" (T, R) e (B, L), e un equilibrio in strategie miste che assegna a entrambi i giocatori un payoff atteso pari a 14/3.

$$
\begin{array}{cc}
 & II \\
I & \begin{array}{c|cc|cc|}
 & L & & R & \\
\hline
T & 6 & 6 & 2 & 7 \\
\hline
B & 7 & 2 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
$$

Come si vede abbiamo un gioco che assomiglia alla battaglia dei sessi. Tuttavia, la presenza dei 6 in corrispondenza di (T, L) fa sì che si attenui lo spreco che si ha in termini di utilità attesa quando si va a giocare l'equilibrio in strategie miste.

Al di là di questa osservazione, non c'è ancora alcuna novità di rilievo rispetto alla "battaglia dei sessi". si può notare come potrebbe essere interessante potersi accordare su un piano d'azione che preveda di giocare (T, L), (T, R) e (B, L) con probabilità 1/3 ciascuna.
Tuttavia, non essendo (T, L) un equilibrio di Nash , questo piano d'azione non ha quelle proprietà di stabilità rispetto a deviazioni unilaterali di cui abbiamo parlato. Si noti che un tale piano d'azione permetterebbe a entrambi i giocatori di ottenere un *payoff* atteso pari a 5. Migliore di quello che ottengono in strategie miste. È allora interessante l'osservazione che c'è un modo per arrivare a questo valore di 5 del *payoff* atteso, *senza ricorrere ad accordi vincolanti*.

Occorre però un mediatore *affidabile*! Perché il piano è il seguente: "il mediatore lancia un dado, senza che i due giocatori lo possano vedere. Se viene 1 o 2, dirà a I di giocare T e a II di giocare L; se viene 3 o 4, dirà T a I ed R a II; se viene 5 o 6, dirà B a I ed L a II. Queste comunicazioni le farà separatamente e segretamente ai due giocatori". I quali poi, come prima, dovranno "giocare" in modo indipendente e contemporaneo (e senza più parlarsi). È evidente che il "mediatore" potrebbe anche essere un calcolatore opportunamente programmato.

Cos'è che rende "stabile" questo piano d'azione?
L'elemento chiave è che il lancio della moneta non è più un evento pubblico: ora, i due giocatori hanno solo un informazione *parziale* su quale sia lo "stato del mondo" (ovverossia, su quale delle tre rilevanti alternative si sia effettivamente realizzata).

Mettiamoci dal punto di vista di I. Se gli viene detto "B" dal mediatore, lui sa che a II è stato detto "L" e però non ha incentivo a deviare (ammesso che lui non sappia che II devii), essendo (B, L) un equilibrio di Nash. Se gli viene detto "T" dal mediatore, lui sa che con probabilità 1/2 a II è stato detto di giocare L e con probabilità 1/2 di giocare "R" (dalla formula di Bayes):

allora il suo *payoff* atteso è pari a $\frac{1}{2}6 + \frac{1}{2}2 = 4$ se gioca T (cioè se rispetta l'indicazione che ha ricevuto dal mediatore) ed è pari a $\frac{1}{2}7 + \frac{1}{2}0 = 3.5$ se gioca "B". Non ha pertanto alcun incentivo a "deviare" dall'accordo stabilito, ammettendo che l'altro lo rispetti. Ovviamente per II il discorso è analogo.

Come si vede, giocando su una rivelazione *parziale* di quale sia il vero stato del mondo (e, oltre che parziale, *asimmetrica*!), si è riusciti a rendere "self-enforcing" un piano d'azione che poteva sembrare impossibile riuscire a implementare in modo non vincolante (essendo previsto che, in alcuni "stati del mondo", i due giocatori giochino un profilo di strategie che non è equilibrio di Nash).

Per una eccellente introduzione agli equilibri correlati si rinvia al cap. 6 di R. Myerson ("Game Theory", Harvard Univ. Press, Cambridge (MA, USA), 1991), dove sono contenute interessanti considerazioni sui rapporti tra gli equilibri correlati da una parte e le possibilità di *comunicazione* tra i giocatori dall'altra. Altro utile riferimento è il cap. 3 di M. Osborne e A. Rubinstein ("A Course in Game Theory", MIT Press, Cambridge (MA, USA), 1994). E, infine, i due articoli di R.J. Aumann: "Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies" (J. Math. Econ., vol. 1, 1974, pp 67-96), e "Correlated Equilibria as an Expression of Bayesian Rationality" (Econometrica, vol. 55, 1987, pp 1-18) che, come si desume dal titolo, assegnano un ruolo rilevante agli equilibri correlati.

Per ora ci limitiamo a dare una definizione formale di cosa sia un equilibrio correlato (Osborne-Rubinstein usano una definizione equivalente che vedremo in seguito).

Sia dato un gioco in forma strategica, *finito*, a due giocatori:
$G = (X, Y, f, g)$ dove $X = \{x_1, ..., x_m\}$ e $Y = \{y_1, ..., y_n\}$ dove $f, g : X \times Y \to \mathbb{R}$. Un equilibrio correlato è una distribuzione di probabilità μ su $X \times Y$ tale che, detta μ_{ij} la probabilità che μ assegna alla coppia (x_i, y_j), $\forall\ i_0 \in \{1, ..., m\}$ si ha che:

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_{i_0 j} f(x_{i_0}, y_j) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu_{i_0 j} f(x_i, y_j) \qquad \forall\ i \in \{1, ..., m\}$$

E analogamente per II: $\forall\ j_0 \in \{1, ..., n\}$ si ha che:

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_{i j_0} g(x_i, y_{j_0}) \geq \sum_{i=1}^{m} \mu_{i j_0} g(x_i, y_j) \qquad \forall\ j \in \{1, ..., n\}$$

Per capire il "senso" delle condizioni sopra espresse, soffermiamoci sulla prima e riscriviamola in modo da rendere più visibile l'aggiornamento "bayesiano" dei "prior":

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_{i_0 j}}{\sum_{j=1}^{n} \mu_{i_0 j}} f(x_{i_0}, y_j) \quad \geq \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_{i_0 j}}{\sum_{j=1}^{n} \mu_{i_0 j}} f(x_i, y_j)$$

$\downarrow$	$\downarrow$
payoff atteso da I, calcolato dopo aver aggiornato Bayesianamente la sua "prior" dopo che il mediatore gli ha comunicato di giocare la strategia x_{i_0}, nell'ipotesi che I rispetti l'indicazione avuta e giochi effettivamente la strategia x_{i_0}.	*payoff* atteso da I, calcolato dopo aver aggiornato Bayesianamente la sua "prior" dopo che il mediatore gli ha comunicato di giocare la strategia x_{i_0}, nell'ipotesi che I NON rispetti l'indicazione avuta e giochi effettivamente la strategia x_{i_0}.

Si noti che $\frac{\mu_{i_0 j}}{\sum_{j=1}^{n} \mu_{i_0 j}}$ è la probabilità che "bayesianamente" il giocatore I assegna all'eventualità che II giochi la strategia y_j, dopo che il mediatore gli ha detto di giocare la strategia x_{i_0}.
Si può osservare come "dietro" la definizione vi sia lo stesso principio usato per l'equilibrio di Nash: la stabilità rispetto a cambiamenti unilaterali. Se guardiamo alla condizione per il giocatore I, vediamo che in essa è implicita l'assunzione che II "ubbidisca" alla indicazione del mediatore. Questa derivazione dallo stesso principio appare ancora più chiaramente nella formulazione che verrà vista in seguito.

Esercizio 1 *Se* $\sum_{j=1}^{n} \mu_{i_0 j} = 0$, *cosa succede?*

Esercizio 2 *Verificare che gli esempi proposti in precedenza soddisfano la condizione di essere equilibri correlati.*

Esercizio 3 *Verificare che, nel "dilemma del prigioniero"* (T, L) *non è un equilibrio correlato (Cioè:* $\mu_{(T,L)} = 1$ *e* $\mu_{(T,R)} = \mu_{(B,L)} = \mu_{(B,R)} = 0$ *non è un equilibrio correlato).*

	L		R	
T	3	3	1	4
B	4	1	2	2

Vediamo come si può pensare a un approccio più generale (Osborne Rubinstein, def. 45.1). Un *equilibrio correlato* di un gioco $\left(N, \left(X_i\right)_{i=1}^{n}, \left(f_i\right)_{i=1}^{n}\right)$ è:

- (Ω, π) spazio di probabilità *finito*.
- per ogni giocatore $i \in \mathbb{N}$, una partizione $\mathcal{P}_i$ di Ω (che rappresenta l'informazione *parziale* di i).
- per ogni giocatore $i \in \mathbb{N}$, una $\sigma_i : \Omega \to X_i$ funzione *costante* sugli elementi della partizione $\mathcal{P}_i$ (le strategie del giocatore i) t.c. $\forall\, i \in \mathbb{N}$, $\forall\, \tau_i : \Omega \to X_i$, costante sugli elementi della partizione associata a i, si abbia:

$$\sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) f_i(\sigma_i(\omega), \sigma_{-i}(\omega)) \quad \geq \quad \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) f_i(\tau_i(\omega), \sigma_{-i}(\omega))$$

C'è qualcosa di nuovo in questa definizione?
Intanto, il fatto che questa è stata qui riportata nel caso di un insieme N di giocatori, anziché per i soliti due... Ma a parte questo dettaglio tecnico irrilevante, c'è davvero qualcosa di diverso?
I "nostri" equilibri correlati sono distribuzioni di probabilità su $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$. Gli equilibri correlati di O.R. *generano* una distribuzione di probabilità su X. Abbiamo infatti l'applicazione: $\omega \to \big(\sigma_1(\omega), ..., \sigma_n(\omega)\big) \in X$. Basta prendere $x \in X$ e considerare $\pi\big(\{\omega \in \Omega : \big(\sigma_1(\omega), ..., \sigma_n(\omega)\big) = x\}\big)$. Questa è una distribuzione di probabilità su X (che potremmo chiamare π_σ^{-1}). Ora, questa distribuzione di probabilità su X è "quello che conta". Nel senso che essa determina il *payoff* atteso di ogni giocatore.

Prendiamo una distribuzione di probabilità su X che può essere ottenuta con un equilibrio correlato alla O.R.. Ebbene: questa può essere ottenuta grazie a un equilibrio correlato "SPECIALE", cioè t.c.:

- lo spazio degli stati sia X.
- per ogni giocatore $i \in \mathbb{N}$, la partizione $\mathcal{P}_i$ associata a i sia costituita dagli insiemi: $\{x \in X : x_i = \overline{x}_i\}$ per qualche $\overline{x}_i \in X_i$.

Dimostrazione

Sia $\left((\Omega, \pi), \left(\mathcal{P}_i\right)_{i \in \mathbb{N}}, \left(\sigma_i\right)_{i \in \mathbb{N}}\right)$ un equilibrio correlato. Allora:
$\left((\Omega', \pi'), \left(\mathcal{P}'_i\right)_{i \in \mathbb{N}}, \left(\sigma'_i\right)_{i \in \mathbb{N}}\right)$ è ancora un equilibrio correlato, dove: $\Omega' = X$,

$\pi'(x) = \pi_\sigma^{-1}(x) = \pi\big(\{\omega \in \Omega : \sigma(\omega) = x\}\big) \quad \forall x \in X$ e con i $\mathcal{P}'_i$ definiti come nell'enunciato del teorema e dove $\sigma'_i(x) = x_i$.
Verifichiamolo:

$$\sum_{\omega\in\Omega} \pi(\omega) f_i(\sigma_i(\omega), \sigma_{-i}(\omega)) = \sum_{x\in X} \sum_{\omega\in\Omega, \sigma(\omega)=x} \pi(\omega) f_i(\sigma_i(\omega), \sigma_{-i}(\omega)) =$$

$$= \sum_{x\in X} \Bigg(\sum_{\omega\in\Omega, \sigma(\omega)=x} \pi(\omega) f_i(x_i, x_{-i}) \Bigg) = \sum_{x\in X} \Bigg(\sum_{\omega\in\Omega, \sigma(\omega)=x} \pi(\omega) \Bigg) f_i(x_i, x_{-i}) =$$

$$= \sum_{x\in X} \pi'(x) f_i(x_i, x_{-i})$$

E analogamente per il secondo membro.

Osservazione
La dimostrazione è *banale*. Usa solo l'idea di funzione composta.
Ci permette di dire che ci possiamo limitare all'uso di soli meccanismi aleatori *diretti*. Cioè: l'arbitro (o qualcuno) dice al giocatore *direttamente* quale strategia deve giocare, senza seguire strade strane.

È una delle tante istanze del "*REVELATION PRINCIPLE*". Ciò che si può ottenere con qualche meccanismo lo si può ottenere anche con un meccanismo *diretto*. Che naturalmente tenga conto degli incentivi per i giocatori e li faccia "ubbidire" (o a partecipare, o a dire la verità, etc.). Gli incentivi sono appunto quelli che impediscono che vi sia vantaggio per "deviazioni unilaterali".

Appendice

Calcoliamo l'equilibrio di Nash in strategie completamente miste del seguente gioco (di Aumann) in forma strategica:

$I \backslash II$	L	R
T	$(6,6)$	$(2,7)$
B	$(7,2)$	$(0,0)$

Per quanto riguarda le strategie miste, usiamo come di solito $p, 1-p$ e $q, 1-q$ per indicare le strategie miste rispettivamente di I e II.
Il payoff atteso di I è:

$$f(p,q) = 6pq + 2p(1-q) + 7(1-p)q = 6pq + 2p - 2pq + 7q - 7pq =$$

$$= -3pq + 2p + 7q = p(2 - 3q) + 7q$$

Quindi per $q < 2/3$ la best reply per I è $p = 1$, per $q = 2/3$ è tutto $[0, 1]$, per $q > 2/3$ la best reply è $p = 0$.
Per II il payoff atteso è:

$$g(p, q) = 6pq + 7p(1 - q) + 2(1 - p)q = 6pq + 7p + -7pq + 2q - 2pq =$$

$$= -3pq + 2q + 7p = q(2 - 3p) + 7p$$

Quindi per $p < 2/3$ la best reply per II è $q = 1$, per $p = 2/3$ è tutto $[0, 1]$, per $p > 2/3$ la best reply è $q = 0$.

In figura 1 disegniamo le best reply.

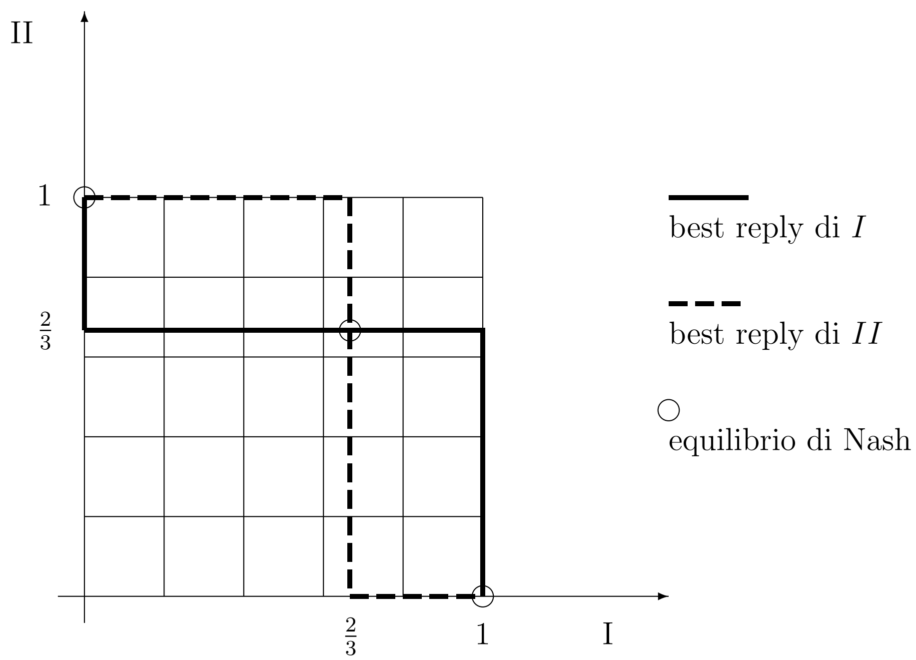

Figura 1: I grafici delle corrispondenze di miglior risposta

Le best reply ci permettono di individuare gli equilibri di Nash in strategie miste. Ritroviamo i due equilibri puri ed uno in strategie completamente miste (il cui payoff atteso è di 14/3 per entrambi i giocatori).