

Aste, appunti sbrigativi

Appunti di
Fioravante PATRONE
<http://www.diptem.unige.it/patrone/default.htm>

versione del 3 dicembre 2007

NOTA: tranne che per le prime pagine ed i conti dettagliati fatti alla fine, il contenuto di questi appunti non è altro che una “riduzione” (e “spiegazione”, oltre che traduzione) di parte di un capitolo di Krishna

Indice

1	Il problema che affrontiamo ed un suo modello	2
2	Il gioco ad informazione incompleta ed i suoi equilibri	5
2.1	Asta al secondo prezzo	6
2.2	Asta al primo prezzo	10
3	Ulteriori calcoli espliciti in un caso particolare	16
4	Bibliografia	20

Questi appunti sono dedicati all’illustrazione dettagliata di alcune delle tipiche technicalities che si incontrano nello studio delle aste. Verranno esaminati i casi dell’asta al primo prezzo e di quella al secondo prezzo (detta anche di Vickrey). In entrambi i casi, verrà affrontato il caso più semplice: vendita di un oggetto indivisibile a n bidders le cui valutazioni dell’oggetto sono indipendenti e identicamente distribuite su un intervallo prefissato $[0, \omega]$.

Verrà inoltre dettagliato minuziosamente un caso particolare (e semplice): quello di due bidders la cui valutazione dell’oggetto messo all’asta è data da una distribuzione di probabilità *uniforme* su $[0, \omega]$. Questa parte è fatta come “verifica e conferma” dei risultati “generali” ottenuti, facendo un bel po’ di conti “a mano”.

Fioravante PATRONE
Dipartimento di Ingegneria della
Produzione, Termoeconomica e
Modelli Matematici
P.le Kennedy - Pad D
16129 Genova - ITALY
patrone@diptem.unige.it

<http://www.diptem.unige.it/patrone>
<http://tdg.dima.unige.it>
<http://www.citg.unige.it/citg.htm>
<http://www.scallywag.it>

homepage
web teaching
web server “CITG”
web page del gruppo
Scallywag

<http://www.diptem.unige.it/patrone/DRI.htm> Decisori (razionali) interagenti

1 Il problema che affrontiamo ed un suo modello

Come detto nella illustrazione dei contenuti, ci occupiamo della vendita di un oggetto indivisibile.

Vedremo due casi: asta in busta chiusa al primo prezzo e asta in busta chiusa al secondo prezzo (altri due modelli famosi di aste sono: asta inglese e asta olandese¹)

Faremo le seguenti assunzioni:

- c'è un oggetto dato
- c'è un insieme dato (fissato) $N = \{1, \dots, n\}$ di potenziali bidders
- ognuno dei bidder *deve* fare un'offerta, un bid, $b_i \in [0, \infty[$. Pertanto, questi bidder non sono poi così tanto "potenziali"

Dato un profilo di offerte, l'esito è:

- (primo prezzo) l'oggetto viene dato al miglior offerente (estratto a sorte con uguale probabilità fra i migliori offerenti in caso di parità). Chi si aggiudica l'oggetto paga una quantità di soldi pari alla sua offerta
- (secondo prezzo) come per il caso precedente, l'oggetto viene dato al miglior offerente (estratto a sorte con uguale probabilità fra i migliori offerenti in caso di parità). Chi si aggiudica l'oggetto paga una quantità di soldi pari alla seconda miglior offerta

Userò le seguenti notazioni: $(i, x) \in N \times [0, \infty[$ indica che l'oggetto è assegnato al bidder i e che egli paga x . Data la possibilità che vi possano essere dei risultati di parità, gli esiti saranno elementi di $\Delta(N \times [0, \infty[)$ e pertanto le preferenze dei giocatori (= bidders) sono su $\Delta(N \times [0, \infty[)$. Le preferenze sono rappresentate da funzioni di utilità di vNM definite su $N \times [0, \infty[$ così definite:

$$u_i(j, x) = \begin{cases} v_i - x & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dove v_i è un dato caratteristico, specifico del giocatore $i \in N$. Supporrò che sia $v_i \geq 0$ (vedremo tra poco il significato di questa restrizione).

¹Nell'asta inglese i bidder possono fare offerte al rialzo. Vi sono varie regole in proposito, che magari fissano un rialzo minimo, oppure un tempo massimo entro il quale l'asta si deve concludere, etc. Le regole di aggiudicazione sono uguali a quelle per l'asta al primo prezzo (non può esserci parità, qui). Nell'asta olandese si parte da una valutazione (alta) e poi si fa partire un orologio che scandisce la discesa uniforme del prezzo. Il primo che dice Ok si aggiudica l'oggetto.

Esempio 1 $N = \{1, 2, 3\}$. Se il profilo dei bid è $(7, 7, 5)$, per l'asta al primo prezzo l'esito è: $(1/2, (1, 7); 1/2, (2, 7))$ (gli altri elementi di $N \times [0, \infty[$ hanno probabilità zero); per l'asta al secondo prezzo l'esito è: $(1/2, (1, 7); 1/2, (2, 7))$ (gli altri elementi di $N \times [0, \infty[$ hanno probabilità zero).

Se il profilo dei bid è $(7, 6, 5)$, per l'asta al primo prezzo l'esito è: $(1, (1, 7))$ (gli altri elementi di $N \times [0, \infty[$ hanno probabilità zero); per l'asta al secondo prezzo l'esito è: $(1, (1, 6))$ (gli altri elementi di $N \times [0, \infty[$ hanno probabilità zero). ▲

Si noti che una delle ragioni per cui usiamo le utilità di vNM, oltre al fatto che l'esito di un profilo di bid è aleatorio, è anche il fatto che assumeremo una situazione di incompletezza informativa

Osservo che non abbiamo messo alcun "prezzo di riserva". Questo ha due conseguenze: la prima è che l'oggetto sarà sempre aggiudicato. La seconda riguarda la possibile "violenza" che esercitiamo sui bidders obbligandoli a fare un'offerta: qui può esserci effettivamente una "violenza" nei confronti di chi abbia una valutazione negativa dell'oggetto (ovvero, per lui l'oggetto è un "bad"), in quanto può succedere che lui si aggiudichi (a prezzo zero, magari, perché può offrire zero) un oggetto che non vorrebbe. Insomma, l'assunzione che i potenziali bidder siano obbligati a fare un'offerta ha senso (voglio dire, ci fa rimanere essenzialmente nel contesto in cui uno può scegliere se fare uno scambio o no) se, come abbiamo fatto, supponiamo che sia $v_i \geq 0$ per ogni $i \in N$. Insomma, il bene indivisibile non è una cucciolata di gattini (mica li vorrete separare!), né un coccodrillo, né (con qualche "licenza poetica" sulla indivisibilità) un container da 20 tonnellate pieno di spazzatura, e neanche una bella fiorentina (per un vegetariano).

Non abbiamo messo delle "participation fees". Anche qui, se ci fosse un prezzo positivo da pagare solo per poter partecipare all'asta, ne potrebbe venir fuori un risultato negativo per chi abbia una valutazione dell'oggetto inferiore al valore della "participation fee".

Le preferenze dei bidders potrebbero avere una struttura meno banale. Ad esempio, uno potrebbe essere dispiaciuto che l'oggetto vada ad un altro (due collezionisti rivali). Altri casi possono essere facilmente immaginati.

Assumiamo infine che i bidders non abbiano vincoli di budget. Infatti, i bid sono in $[0, \infty[$.

Non è finita! Avendo definito gli esiti nel modo che abbiamo visto, stiamo implicitamente assumendo che l'assegnazione dell'oggetto al vincitore (ed il pagamento da parte sua di quanto previsto) rappresenti la "fine della storia". In particolare, non contempliamo la possibilità che l'oggetto possa essere rivenduto, magari mediante un'altra asta, o in qualunque altro modo

(via contrattazione, magari) a altri soggetti (inclusi o no nell'insieme N dei bidders che abbiamo considerato).

Non abbiamo parlato dell'altro lato del "tavolo". Occorre distinguere tra due soggetti diversi. Il proprietario dell'oggetto e l'auctioneer vero e proprio. Vi sono casi in cui l'auctioneer cerca di influenzare i comportamenti dei bidders (ad esempio, sollecitando offerte nelle aste inglesi). Non ci occuperemo di questi aspetti. L'auctioneer è per noi una macchina del tutto neutrale. Prende il profilo dei bid in ingresso e sputa fuori l'esito previsto dalle regole dell'asta.

Per quanto riguarda il proprietario dell'oggetto, egli ha essenzialmente una facoltà: decidere quale asta utilizzare (ci sono a disposizione molti altri modelli di asta) oppure anche non usare un'asta, ma ricorrere alla contrattazione, oppure usare il metodo "posted price" (mettere un cartellino del prezzo e vedere se qualcuno se lo compra a quel prezzo. Proprio come si fa nei supermercati).

Limitandoci al solo contesto delle aste, è evidente che si pone un problema di "mechanism design": scegliere l'asta (= "game form") ottimale. *Non ci occuperemo qui di questo aspetto*². Noi ci limiteremo a vedere se il proprietario preferisce l'esito (atteso) derivante dall'asta al primo prezzo o quello al secondo prezzo. Anche qui, come abbiamo fatto per i bidders, assumeremo una struttura di preferenze piuttosto semplice: la sua funzione di utilità dipende solo dai soldi che riuscirà ad incassare (non ricava alcuna utilità dall'aver l'oggetto che sta mettendo all'asta; inoltre, non ha bidders amici o bidders che detesta, ad esempio). Detto questo, considereremo sia il caso di indifferenza al rischio (in questo caso la sua funzione di utilità coincide con i soldi che incassa) che il caso di avversione al rischio.

Il proprietario potrebbe avere degli obiettivi ancora più complessi (si pensi al caso in cui sia una Pubblica Amministrazione): potrebbe volere che sia ridotto al minimo il rischio di collusione, oppure potrebbe essere interessato al fatto che l'oggetto venga assegnato a chi lo valuta di più (il che può essere ricondotto ad una condizione di efficienza).

²Una introduzione alla problematica della implementazione è, ad esempio, nella mia pagina web dedicata a "Decisori (razionali) interagenti". Vedasi: Implementazione e Re Salomone. Cenni si trovano anche qui: Giochi semplici, indici di potere e scelte sociali, Parte 3.

2 Il gioco ad informazione incompleta ed i suoi equilibri

Tornando ai bidders, abbiamo una “game form” ed abbiamo le loro preferenze, come sopra descritte. Abbiamo quindi un gioco (in forma strategica). Restano da precisare le ipotesi su razionalità e intelligenza dei giocatori, nonché quelle sulla conoscenza dei parametri del gioco. Assumeremo conoscenza comune della razionalità ed intelligenza, mentre per quanto riguarda i parametri che identificano il tipo di preferenze dei giocatori, ci metteremo in un contesto di informazione incompleta. Per la precisione, assumeremo di trovarci in un caso “coerente”, ovvero che sia data una prior sui profili di tipi dei giocatori, e assumeremo che questa prior sia common knowledge.

Supporremo che i “tipi” dei bidders, ovvero i v_i , siano estratti a sorte, con estrazioni indipendenti e identicamente distribuite su un intervallo $[0, \omega] \subseteq \mathbb{R}$ secondo una data funzione di ripartizione (o “cumulata”) F . In altre parole, ci mettiamo nel caso descritto, nella letteratura sulle aste, come caso a “valori privati³ indipendenti”.

Faremo una ipotesi molto importante su F : che, ristretta⁴ a $[0, \omega]$, ammetta una funzione densità f continua⁵. Per ragioni di comodo, assumiamo che il supporto di f sia tutto $[0, \omega]$, ovverossia che $f(x) > 0$ per ogni $x \in [0, \omega]$.

ATTENZIONE. Si noti che l’ipotesi che F abbia una densità continua (e quindi che descriva una probabilità non atomica: ovvero, per ogni $x \in [0, \omega]$ la probabilità che la valutazione di un bidder sia esattamente pari a x è zero) è una ipotesi da non sottovalutare. E’ una ipotesi *essenziale* per poter trovare equilibri del gioco bayesiano in *strategie pure*. Se, invece di fare questa ipotesi, assumessimo ad esempio che la valutazione dei bidder possa assumere (con probabilità positiva) solo un numero finito di valori *non potremmo garantire* l’esistenza di un equilibrio in strategie pure: un esempio in tal senso è sul mio libro⁶. Per trovare un equilibrio occorre allora utilizzare le strategie

³Il termine “valori privati” è dovuto alle assunzioni fatte sulla funzione di utilità: il giocatore, una volta che conosce il suo tipo, è *certo* della sua valutazione. Essa non dipende da altri fattori, come ad esempio la valutazione degli altri, o da eventuali segnali che lui possa ricevere in futuro su caratteristiche dell’oggetto messo all’asta.

⁴Questa precisazione è importante. Ad esempio, nel caso della distribuzione uniforme su $[0, \omega]$, la funzione F è data dalla formula (1). Ovviamente questa F non è derivabile su \mathbb{R} , mentre la restrizione di F a $[0, \omega]$ lo è ($F'(t) = 1/\omega$).

⁵Quindi abbiamo che F è derivabile e $F'(x) = f(x)$. Avendo supposto che f sia continua, sappiamo che $F \in \mathcal{C}^1$.

⁶Per chi non li sapesse ancora, i riferimenti bibliografici precisi sono indicati nella biblio-

miste. Per un esempio di questo approccio si può vedere il capitolo 23 del libro di Dutta citato nella bibliografia.

Nell'analisi dettagliata e specifica che faremo in fondo, assumeremo che la F sia uniformemente distribuita su $[0, \omega]$. Quindi,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ t/\omega & \text{se } 0 \leq t \leq \omega \\ 1 & \text{se } t \geq \omega \end{cases} \quad (1)$$

Abbiamo allora un gioco ad informazione incompleta⁷ giocato fra i bidders. Come di consueto per un gioco ad informazione incompleta, assumeremo che il bidder sia informato del suo tipo prima di “giocare”, ovvero di sottomettere il suo bid.

Cercheremo gli equilibri (Nash-Bayesiani) dei due giochi (quello in cui la “game form” è l’asta al primo prezzo e quello corrispondente al secondo prezzo). Poi analizzeremo vari parametri interessanti: la probabilità che ha un bidder di aggiudicarsi l’oggetto, il pagamento atteso (sia in generale, sia sotto l’ipotesi che si aggiudichi l’oggetto), la sua utilità attesa. Calcoleremo anche il guadagno atteso del proprietario dell’oggetto.

Una strategia per il bidder i è, come in un qualsiasi gioco ad informazione incompleta, una funzione $\beta_i : [0, \omega] \rightarrow [0, \infty[$.

Ciò che faremo sarà più precisamente vedere se vi sono degli equilibri *simmetrici*. In altre parole, cercheremo β tale che (β, \dots, β) sia un equilibrio. Visto che abbiamo due giochi, distingueremo il caso al primo prezzo da quello al secondo prezzo usando la notazione β^1 e β^2 rispettivamente.

2.1 Asta al secondo prezzo

Qui c’è poco da faticare. E’ facile dimostrare che la strategia $\beta^2(x) = x$ è debolmente dominante (cosa che vale anche sotto ipotesi ben più generali di quelle che abbiamo fatto qui, in particolare non serve l’ipotesi che le valutazioni siano indipendenti o identicamente distribuite). Insomma, il nostro bidder non deve far altro che scrivere una offerta pari alla sua valutazione dell’oggetto.

grafia finale. L’esempio che cito è, come dico nel libro, ispirato pesantemente (diciamola tutta: scopiazzato...) ad uno proposto da Giacomo Costa.

⁷Il lettore è *caldamente* invitato a descrivere esplicitamente il modello di gioco ad informazione incompleta che stiamo usando.

Domandiamoci quale sia, in equilibrio, il pagamento atteso per un bidder che abbia una valutazione pari a x . Indichiamo tale pagamento atteso con m^2 , dove “ m ” ci ricorda che parliamo di “money” e l’apice “2” lo mettiamo perché stiamo considerando un’asta al secondo prezzo. Per semplicità e data la simmetria della situazione, supponiamo che sia il bidder 1. E’:

$$\begin{aligned}
 m^2(x) &= \mathbb{P}(\text{vincere}) \cdot \mathbb{E}(\text{ pagamento in caso di vincita }) = \\
 &= \mathbb{P}(\text{il bid di 1 è il più alto}) \cdot \\
 &\quad \cdot \mathbb{E}(\text{ secondo bid più alto } \mid \text{ il bid di 1 è il bid più alto }) = \\
 &[\text{visto che in equilibrio il bid coincide con la valutazione}] \\
 &= \mathbb{P}(\text{la valutazione di 1, cioè } x, \text{ è la più alta}) \cdot \\
 &\quad \cdot \mathbb{E}(\text{ seconda valutazione più alta } \mid x \text{ è la valutazione più alta }) = \\
 &= F_1^{(n-1)}(x) \cdot \mathbb{E}(Y_1^{(n-1)} \mid Y_1^{(n-1)} < x) \tag{2}
 \end{aligned}$$

Spieghiamo le notazioni, vedendole dapprima nel caso particolare di cui ci occuperemo (F uniformemente distribuita su $[0, \omega]$). Possiamo immaginare che il tipo di un giocatore sia scelto con un meccanismo aleatorio (cioè, una variabile aleatoria) $X : [0, 1] \rightarrow [0, \omega]$, con $X(s) = s\omega$. La funzione di ripartizione di X è, naturalmente, la F data in (1). Ovvero, $F(t) = t/\omega$ nell’intervallo rilevante. La scelta di un profilo di tipi può essere descritta da una variabile aleatoria $X^{(n)} : [0, 1]^n \rightarrow [0, \omega]^n$, definita come $X^{(n)}(s_1, \dots, s_n) = (s_1\omega, \dots, s_n\omega)$.

La $Y_1^{(n-1)}$ è la “higher order statistics”⁸ del set di $n - 1$ variabili aleatorie X_2, \dots, X_n . Ovverossia: $Y_1^{(n-1)}(s_2, \dots, s_n) = \max\{s_2\omega, \dots, s_n\omega\}$. Col simbolo $F_1^{(n-1)}$ indichiamo la funzione di ripartizione di $Y_1^{(n-1)}$

Quanto abbiamo appena visto nel caso particolare si generalizza facilmente. La ipotesi di i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite) ci permette di concludere immediatamente che la funzione di ripartizione $F_1^{(n-1)}$ è semplicemente F^{n-1} . Cioè, $F_1^{(n-1)}(t) = F^{n-1}(t) = (F(t))^{n-1}$. E’ $Y_1^{(n-1)} < t$ se e

⁸Date m variabili aleatorie $X_i : S \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, m\}$ la “higher order statistics” di questo set di m variabili aleatorie è definita come $Y_1^{(m)}(s) = \max\{X_1(s), \dots, X_m(s)\}$. L’indice (m) indica che riguarda appunto un insieme di m variabili aleatorie, mentre il pedice 1 ci dice che si tratta della “higher order” statistics (possiamo anche prendere la “second order”, la “third order”, etc.).

solo se ogni X_i (per $i > 1$) è minore di t ; da qui la formula, grazie alla ipotesi di indipendenza.

Quindi, nel caso nostro caso particolare della distribuzione uniforme,

$$F_1^{(n-1)}(t) = (t/\omega)^{n-1}. \quad (3)$$

La funzione densità di $F_1^{(n-1)}$ sarà quindi data dalla formula:

$$f_1^{(n-1)}(t) = (F_1^{(n-1)})'(t) = (n-1) \frac{1}{\omega} \left(\frac{t}{\omega}\right)^{n-2}. \quad (4)$$

Ritornando al caso generale, dire che x è la valutazione più alta equivale a dire che $Y_1^{(n-1)} < x$ (e la probabilità di questo evento è indicata con $F_1^{(n-1)}$). E il prezzo che il vincitore è tenuto a pagare in un'asta al secondo prezzo è il bid più alto tra tutti i rimanenti $n-1$ giocatori. Questo, e le notazioni sopra introdotte, giustificano il termine $\mathbb{E}(Y_1^{(n-1)} | Y_1^{(n-1)} < x)$ nella (2). Che la probabilità di vincere per il bidder 1, la cui valutazione sia x , sia data da $F_1^{(n-1)}(x)$ è ovvio per definizione di funzione di ripartizione.

Ora, per una generica variabile aleatoria X la cui funzione di ripartizione sia F e la densità f si ha che:

$$\mathbb{E}(X | X < x) = \frac{1}{F(x)} \int_0^x t f(t) dt$$

Ovverossia:

$$F(x) \cdot \mathbb{E}(X | X < x) = \int_0^x t f(t) dt.$$

Integrando per parti:

$$\int_0^x t f(t) dt = xF(x) - \int_0^x F(t) dt.$$

Quindi:

$$F(x) \cdot \mathbb{E}(X | X < x) = xF(x) - \int_0^x F(t) dt.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} F_1^{(n-1)}(x) \cdot \mathbb{E}(Y_1^{(n-1)} | Y_1^{(n-1)} < x) &= \int_0^x t f_1^{(n-1)}(t) dt = \\ &= xF_1^{(n-1)}(x) - \int_0^x F_1^{(n-1)}(t) dt \end{aligned}$$

Nel nostro caso particolare (distribuzione uniforme su $[0, \omega]$), abbiamo:

$$\begin{aligned}
 F_1^{(n-1)}(x) \cdot \mathbb{E}(Y_1^{(n-1)} \mid Y_1^{(n-1)} < x) &= \\
 &= x F_1^{(n-1)}(x) - \int_0^x F_1^{(n-1)}(t) dt = \\
 &= x \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n-1} - \int_0^x \left(\frac{t}{\omega}\right)^{n-1} dt = \\
 &= x \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n-1} - \left(\frac{\omega}{n} \cdot \left(\frac{t}{\omega}\right)^n \Big|_0^x\right) = \\
 &= x \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n-1} - \left(\frac{\omega}{n} \cdot \left(\frac{x}{\omega}\right)^n\right) = \\
 &= \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n-1} \cdot \left(x - \frac{x}{\omega} \cdot \frac{\omega}{n}\right) = \\
 &= \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n-1} x \left(1 - \frac{1}{n}\right)
 \end{aligned}$$

Quindi:

$$m^2(x) = \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n-1} x \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Esempio 2 Per curiosità, vediamo cosa accade nel caso particolare in cui supponiamo inoltre che $n = 2$. In tal caso: $m^2(x) = \frac{x}{\omega} \cdot x \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{x^2}{2\omega}$

Se $x = 0$, viene zero (e ci mancherebbe...).

Se $x = \omega/2$, viene $\frac{\omega^2}{8\omega} = \frac{\omega}{8}$. Cosa che possiamo capire senza alcuna formula. Se la valutazione dell'oggetto è $\omega/2$, la probabilità che la valutazione sia la più alta, e quindi di aggiudicarsi l'oggetto, è $1/2$. Dopo di ché, se se lo aggiudica, le valutazioni dell'altro sono uniformemente distribuite su $[0, \omega/2]$ e quindi il valore atteso è $\omega/4$. Ne consegue che il pagamento atteso ex ante è $\frac{1}{2} \cdot \frac{\omega}{4} = \frac{\omega}{8}$.

Se $x = \omega$, viene $\omega/2$ (e anche questo risultato si può facilmente capire con lo stesso tipo di ragionamenti appena visti).

Quale è il payoff atteso? Esso è dato, naturalmente, dalla valutazione che il giocatore ha dell'oggetto, moltiplicata per la probabilità che ha di ottenerlo, a cui dobbiamo sottrarre il pagamento che deve fare (ovviamente pagamento atteso).

Supponiamo la valutazione sia x . La probabilità di ottenerlo è data dalla formula (3) e quindi vale x/ω . Il pagamento atteso è, come abbiamo visto: $\frac{x^2}{2\omega}$. Allora il payoff atteso è pari a:

$$x \cdot \frac{x}{\omega} - \frac{x^2}{2\omega}$$

Ovvero:

$$\frac{x^2}{2\omega}$$

▲

2.2 Asta al primo prezzo

Cerchiamo di capire come potrebbe essere fatto un equilibrio simmetrico.

Supponiamo la strategia β^1 (uguale per tutti i giocatori) sia strettamente crescente (ricordo che $\beta^1 : [0, \omega] \rightarrow [0, \infty[$) e derivabile.

Un giocatore (diciamo il giocatore 1) riceve un segnale x (la sua valutazione dell'oggetto) e vogliamo sapere quale sia il suo bid $b = \beta^1(x)$ ottimale.

Osserviamo che:

- non ha senso un bid $b > \beta^1(\omega)$. Perché il bidder vincerebbe di sicuro, ma potrebbe vincere con certezza lo stesso diminuendo un poco il suo bid (e quindi il suo esborso);
- se un bidder ha valore 0, il suo bid sarà uguale a 0 (se fosse positivo, avrebbe probabilità positiva di vincere).

Quindi: $\beta^1(0) = 0$ e $b = \beta^1(x) \leq \beta^1(\omega)$.

Osserviamo che il bidder 1 vince se fa l'offerta più alta (osservazione non molto profonda, lo ammetto). Questo si verifica ogniqualvolta $\max_{i \neq 1} \beta^1(X_i) < b$.

Ma β^1 è strettamente crescente, quindi:

$$\max_{i \neq 1} \beta^1(X_i) = \beta^1(\max_{i \neq 1} X_i).$$

Ma $\max_{i \neq 1} X_i$ non è altro che la $Y_1^{(n-1)}$ introdotta prima, per le aste al secondo prezzo.

Allora, 1 vince se e solo se⁹ $\beta^1(Y_1^{(n-1)}) < b$. Equivalentemente, se $Y_1^{(n-1)} < (\beta^1)^{-1}(b)$

E il suo payoff atteso è:

$$F_1^{(n-1)}((\beta^1)^{-1}(b)) \cdot (x - b).$$

⁹Il "solo se" non è corretto, a dire il vero. Infatti, se $\beta^1(Y_1^{(n-1)}) = b$, egli ha una qualche chance di aggiudicarsi l'oggetto (verrà estratto a sorte). Tuttavia questa eventualità può essere trascurata, in quanto la probabilità che si verifichi è *nulla*. Si noti che questo dipende in modo *essenziale* dal fatto che la distribuzione sia non atomica (vedasi quanto detto a pagina 5 dove si dice ATTENZIONE) e dalla ipotesi fatta che β^1 sia *strettamente crescente*.

Perché è il payoff atteso? Perché $F_1^{(n-1)}((\beta^1)^{-1}(b))$ è la probabilità dell'evento che 1 vinca (ovvero che $Y_1^{(n-1)} < (\beta^1)^{-1}(b)$) e in tal caso il payoff è $x - b$; se 1 perde, il suo payoff è 0.

Allora, cerchiamo la best reply.

Prima, un po' di notazioni per semplificare. Indico con G la $F_1^{(n-1)}$, con g la sua densità (cioè, $g = G'$; e $g = f_1^{(n-1)}$); infine, chiamo semplicemente β la β^1 .

Allora, cerchiamo b che massimizza $G(\beta^{-1}(b)) \cdot (x - b)$.

Una condizione necessaria è che la derivata prima di questa funzione di b sia nulla. Cioè (usiamo la regola di derivazione delle funzioni composte e della funzione inversa¹⁰):

$$\frac{G'(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))} \cdot (x - b) - 1 \cdot G(\beta^{-1}(b)) = 0$$

Ovvero, usando g , densità di G :

$$\frac{g(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))} \cdot (x - b) - G(\beta^{-1}(b)) = 0$$

Se $b = \beta(x)$, ovvero se siamo in equilibrio:

$$\frac{g(\beta^{-1}(\beta(x)))}{\beta'(\beta^{-1}(\beta(x)))} \cdot (x - \beta(x)) - G(\beta^{-1}(\beta(x))) = 0$$

Cioè:

$$\frac{g(x)}{\beta'(x)} \cdot (x - \beta(x)) - G(x) = 0$$

Cioè:

$$g(x) \cdot (x - \beta(x)) - G(x) \cdot \beta'(x) = 0$$

Ovvero:

$$G(x) \cdot \beta'(x) + g(x) \cdot \beta(x) = xg(x)$$

¹⁰Data una funzione reale di variabile reale ψ , se sono soddisfatte le opportune condizioni, la derivata della funzione inversa ψ^{-1} è data dalla formula seguente:

$$\frac{d}{dt} [\psi^{-1}(t)] = \frac{1}{\frac{d}{dz} \psi(z)|_{z=\psi^{-1}(t)}}.$$

Ad esempio:

$$\frac{d}{dt} [\arctan(t)] = \frac{1}{\frac{d}{dz} \tan(z)|_{z=\arctan(t)}} = \frac{1}{(1 + \tan^2 z)|_{z=\arctan(t)}} = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Quindi:

$$\frac{d}{dx} (G(x) \cdot \beta(x)) = xg(x)$$

Allora, per la formula fondamentale del calcolo integrale:

$$G(x) \cdot \beta(x) - G(0) \cdot \beta(0) = \int_0^x tg(t) dt$$

Essendo $\beta(0) = 0$, ricaviamo:

$$\beta(x) = \frac{1}{G(x)} \int_0^x tg(t) dt = \mathbb{E}(Y_1^{(n-1)} \mid Y_1^{(n-1)} < x)$$

Evidentemente, ci siamo ricordati che $G = F_1^{(n-1)}$ (era una notazione di comodo).

Si noti che la funzione β così trovata è una funzione continua e strettamente crescente (poiché la distribuzione di probabilità ha “full support” su $[0, \omega]$). Conseguenza della stretta crescita è che il bidder con la valutazione più alta farà il bid più alto e quindi risulterà vincente. Abbiamo quindi un risultato efficiente.

Prima di proseguire, vediamo il caso particolare con distribuzione uniforme su $[0, \omega]$ e due soli bidders, che è molto più semplice da analizzare. Ripercorrendo rapidamente la strada già battuta, cerchiamo $\beta : [0, \omega] \rightarrow [0, \omega]$. Come prima, abbiamo $\beta(0) = 0$ e $\beta(\omega) \leq \omega$. Sia x la valutazione del bidder 1 e sia b il suo bid. Egli vince se la sua offerta è più alta di quella di 2. Quindi se $\beta(X_2) < b$. Ovvero se $X_2 < \beta^{-1}(b)$. La probabilità che questa disuguaglianza sia soddisfatta è pari a $F(\beta^{-1}(b)) = \frac{\beta^{-1}(b)}{\omega}$, visto che in questo caso $F(t) = \frac{t}{\omega}$. Se vince, il suo guadagno è $x - b$. Quindi, il payoff atteso per 1, se fa un bid pari a b in risposta alla strategia β di bidding di 2, è:

$$F(\beta^{-1}(b)) \cdot (x - b) = \frac{\beta^{-1}(b)}{\omega} \cdot (x - b)$$

Detta $\phi(b) = \frac{\beta^{-1}(b)}{\omega} \cdot (x - b)$, condizione necessaria affinché b sia best reply è che: $\phi'(b) = 0$. Quindi:

$$\frac{1}{\omega \cdot \beta'(\beta^{-1}(b))} \cdot (x - b) - \frac{\beta^{-1}(b)}{\omega} = 0$$

ovvero

$$\frac{1}{\beta'(x)} \cdot (x - b) - \beta^{-1}(b) = 0$$

Se β è un equilibrio simmetrico, sarà $b = \beta(x)$ (e quindi $x = \beta^{-1}(x)$). Quindi:

$$\frac{1}{\beta'(x)} \cdot (x - \beta(x)) - x = 0$$

Cioè:

$$x - \beta(x) - x\beta'(x) = 0$$

$$x = \beta(x) + x\beta'(x)$$

$$x = \frac{d}{dx} [x\beta(x)]$$

Da qui:

$$\int_0^x t dt = \int_0^x \frac{d}{dt} [t\beta(t) dt]$$

Da cui

$$\frac{x^2}{2} = x\beta(x) - 0\beta(0)$$

Pertanto:

$$\beta(x) = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{2}$$

NOTA BENE: ovviamente *non abbiamo dimostrato* che β sia la soluzione. Abbiamo solo ricavato una funzione indiziata fortemente di esserlo. Per la verifica che lo sia effettivamente, continuo a seguire pedissequamente il libro di Krishna.

Dimostriamo allora che la strategia $\beta(x) = \mathbb{E}(Y_1^{(n-1)} | Y_1^{(n-1)} < x)$ ci dà un equilibrio simmetrico per un'asta al primo prezzo.

Si tratta quindi di dimostrare che β è best reply per un bidder (diciamo il bidder 1), supponendo che tutti gli altri usino questa strategie.

Come abbiamo visto, non può essere best reply fare un bid $b > \beta(\omega)$. Quindi ci possiamo limitare a considerare bid b che soddisfano la condizione $b \leq \beta(\omega)$.

Calcoliamo il payoff atteso per il giocatore 1. A tale scopo, ci fa comodo usare $\beta^{-1}(b)$, che chiameremo z per far prima (si noti che β^{-1} esiste: la funzione β è strettamente crescente e quindi invertibile). Ovviamente $\beta(z) = b$.

Il payoff atteso è:

$$G(z) [x - \beta(z)]$$

in quanto $x - \beta(z)$ è il profitto realizzato dal giocatore (che ha valutazione x e fa bid $b = \beta(z)$) e $G(z)$ è la probabilità che vinca (ovvero, che tutti gli

altri facciano un bid minore di z). Ricordo a tale scopo che G è la funzione di distribuzione (o di ripartizione, o cumulata) di Y_1 .

Allora:

$$\begin{aligned} G(z) [x - \beta(z)] &= (\text{per definizione di } \beta) \\ &= G(z)x - G(z) \cdot \mathbb{E}(Y_1^{(n-1)} \mid Y_1^{(n-1)} < x) = \\ & \quad (\text{uso la densità per calcolare il valore atteso}) \\ &= G(z)x - \int_0^z t g(t) dt = (\text{integrando per parti}) \\ &= G(z)x - G(z)z + \int_0^z G(t) dt = G(z)(x - z) + \int_0^z G(t) dt \end{aligned}$$

I conti appena fatti, usando $z = x$, ci dicono che il payoff atteso per il giocatore 1, se usa la $\beta(x)$, è:

$$G(x)(x - x) + \int_0^x G(t) dt = \int_0^x G(t) dt$$

Allora, la differenza di profitto, fra la scelta del bid $\beta(x)$ e b (ovvero $\beta(z)$), è:

$$\begin{aligned} \int_0^x G(t) dt - G(z)(x - z) - \int_0^z G(t) dt &= G(z)(z - x) + \int_z^x G(t) dt = \\ &= G(z)(z - x) - \int_x^z G(t) dt \end{aligned}$$

Ma:

$$G(z)(z - x) - \int_x^z G(t) dt \geq 0$$

Infatti:

$$G(z)(z - x) \geq \int_x^z G(t) dt$$

Proviamolo. Se $z \geq x$,

$$\int_x^z G(t) dt = G(y)(z - x)$$

con $x \leq y \leq z$, per il teorema della media. Ma, essendo G crescente, $G(y) \leq G(z)$.

Se $z \leq x$ i conti sono analoghi. Vediamoli.

$$\int_x^z G(t) dt = - \int_z^x G(t) dt = -G(y)(x - z)$$

Ma $G(y) \geq G(z)$, quindi $-G(y) \leq -G(z)$ e pertanto $-G(y)(x - z) \leq -G(z)(x - z)$. Quindi:

$$\int_x^z G(t) dt \leq -G(z)(x - z)$$

ovvero:

$$G(z)(z - x) \geq \int_x^z G(t) dt$$

Come volevasi dimostrare...

Nel nostro caso particolare (le valutazioni sono uniformemente distribuite su $[0, \omega]$), avevamo:

$$F_1^{(n-1)}(x) = (x/\omega)^{n-1}$$

E avevamo già calcolato che:

$$F_1^{(n-1)}(x) \cdot \mathbb{E}(Y_1^{(n-1)} \mid Y_1^{(n-1)} < x) = \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n-1} x \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Quindi:

$$\beta(x) = x \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Calcoliamo ora il pagamento atteso nell'asta al primo prezzo. Abbiamo:

$$\begin{aligned} m^1(x) &= \mathbb{P}(\text{vincere}) \cdot \mathbb{E}(\text{pagamento in caso di vincita}) = \\ &= \mathbb{P}(\text{il bid di 1 è il più alto}) \cdot \mathbb{E}(\text{il bid di 1}) = \\ &= \mathbb{P}(\beta(x) \text{ è il bid più alto}) \cdot \beta(x) = \end{aligned}$$

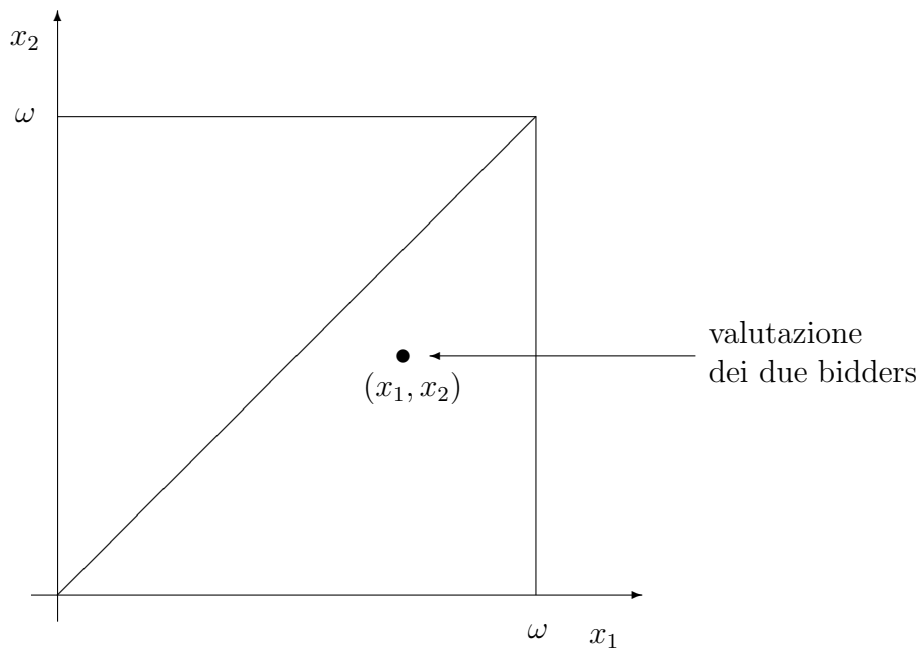
[visto che β è una funzione strettamente crescente]

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}(x \text{ è la valutazione più alta}) \cdot \beta(x) = \\ &= F_1^{(n-1)}(x) \cdot \mathbb{E}(Y_1^{(n-1)} \mid Y_1^{(n-1)} < x) \end{aligned} \quad (5)$$

Il primo fattore nella formula (5) è calcolato esattamente come si è fatto per l'asta al secondo prezzo. Il secondo fattore, anche se ricavato seguendo una diversa strada, coincide con quello che avevamo per l'asta al secondo prezzo. Come si vede, qualunque sia x , il pagamento atteso di un giocatore in un'asta al primo o secondo prezzo è identico.

3 Ulteriori calcoli espliciti in un caso particolare

Facciamo ora qualche conto dal punto di vista del proprietario. Li faccio nel caso particolare di due bidders, con valutazioni indipendenti ed uniformemente distribuite su $[0, \omega]$



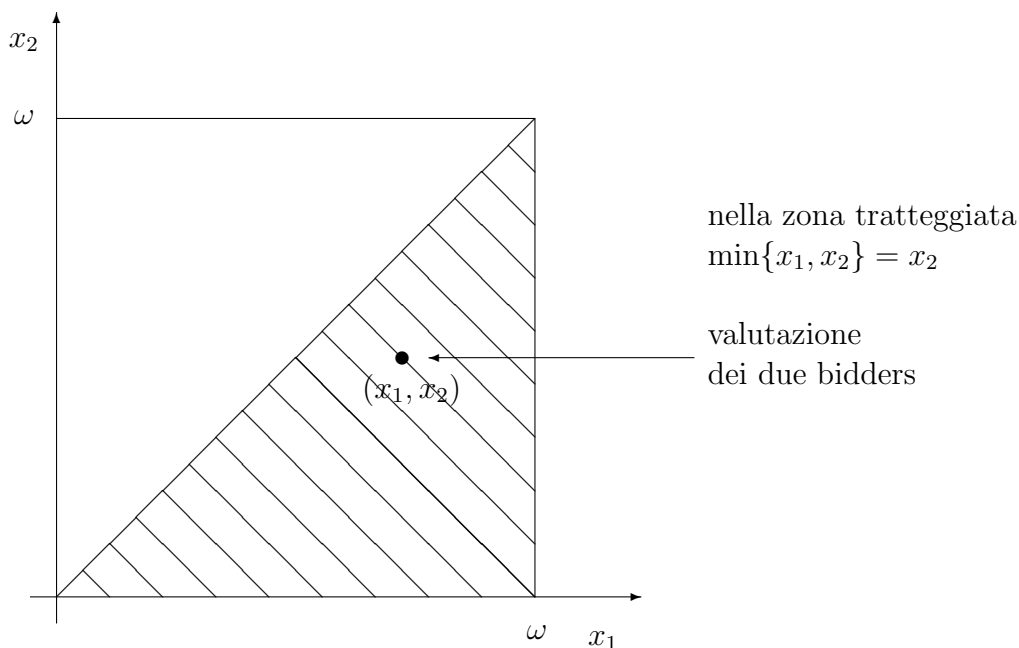
Cominciamo con l'asta al secondo prezzo. Abbiamo:

$$(x_1, x_2) \mapsto (\beta^2(x_1), \beta^2(x_2)) = (x_1, x_2)$$

Il payoff per il proprietario è:

$$\min\{x_1, x_2\}$$

Che è uguale a x_2 nella zona tratteggiata in figura:



Il payoff atteso è:

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} \min\{s_1\omega, s_2\omega\} ds_1 ds_2$$

Che possiamo riscrivere, riportandoci su $[0, \omega]$ mediante un cambio di variabile, così:

$$\iint_{[0,\omega] \times [0,\omega]} \frac{1}{\omega^2} \min\{x_1, x_2\} dx_1 dx_2$$

Sfruttando l'osservazione fatta e descritta anche in figura, il nostro integrale doppio diventa:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\omega^2} \int_0^\omega dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 &= \frac{2}{\omega^2} \int_0^\omega \frac{x_1^2}{2} dx_1 = \\ &= \frac{2}{\omega^2} \frac{\omega^3}{2 \cdot 3} dx_1 = \frac{\omega}{3} \end{aligned}$$

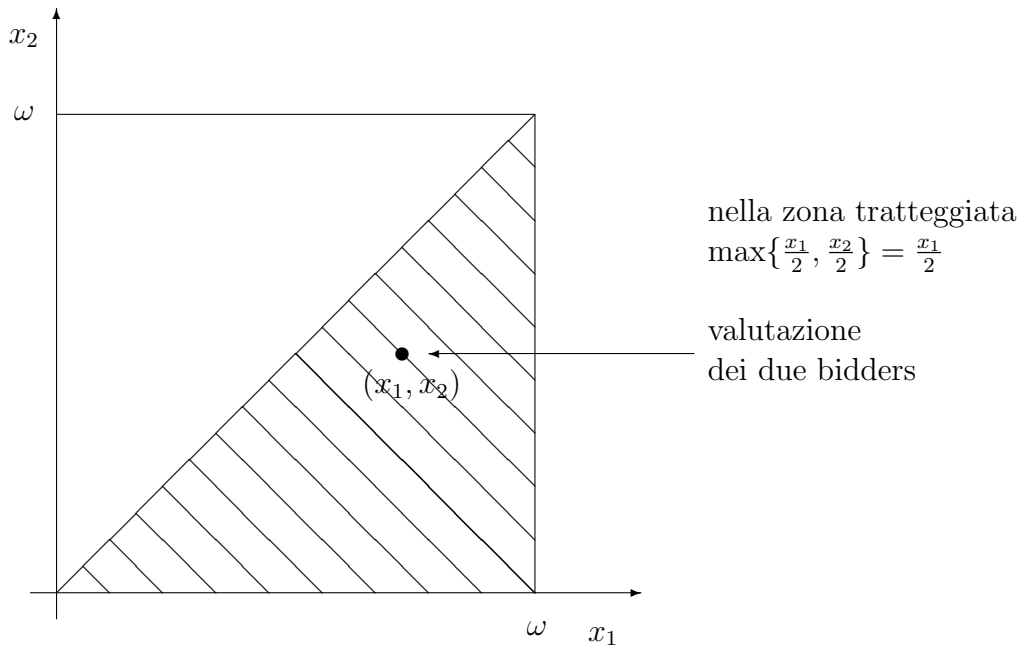
Passiamo all'asta al primo prezzo. Abbiamo:

$$(x_1, x_2) \mapsto (\beta^1(x_1), \beta^1(x_2)) = \left(x_1 \left(1 - \frac{1}{2}\right), x_2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \right) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2} \right)$$

Il payoff per il proprietario è:

$$\max\left\{\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}\right\}$$

Che è uguale a $\frac{x_1}{2}$ nella zona tratteggiata in figura:



Il payoff atteso è:

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} \max\left\{\omega \frac{s_1}{2}, \omega \frac{s_2}{2}\right\} ds_1 ds_2$$

Ovvero è (anche questa volta sfruttiamo l'osservazione appena fatta e descritta anche in figura, per giustificare la prima uguaglianza):

$$\begin{aligned} \iint_{[0,\omega] \times [0,\omega]} \frac{1}{\omega^2} \max\left\{\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}\right\} dx_1 dx_2 &= \\ \frac{2}{\omega^2} \int_0^\omega dx_1 \int_0^{x_1} \frac{x_1}{2} dx_2 &= \frac{2}{\omega^2} \int_0^\omega \frac{x_1}{2} \cdot x_1 dx_1 = \\ &= \frac{2}{\omega^2} \int_0^\omega \frac{x_1^2}{2} dx_1 = \frac{2}{\omega^2} \frac{\omega^3}{2 \cdot 3} dx_1 = \frac{\omega}{3} \end{aligned}$$

Quindi il payoff atteso è identico. Ma le “integrande” non sono uguali!

Esempio 3 Ad esempio, se $\omega = 10$, $x_1 = 8$, $x_2 = 2$, abbiamo:

- primo prezzo: $\beta^1(8) = 8/2 = 4$, $\beta^1(2) = 2/2 = 1$ e quindi $\max\{4, 1\} = 4$ è il payoff per il venditore
- secondo prezzo: $\beta^2(8) = 8$, $\beta^2(2) = 2$ e quindi $\min\{8, 2\} = 2$ è il payoff per il venditore

▲

Quindi il RET (Revenue Equivalence Theorem) viene da una situazione non banale, nel senso che abbiamo due *diverse* v.a. che hanno lo stesso valore atteso.

Si può anche dimostrare che la varianza è maggiore nel caso dell'asta al secondo prezzo.

Pertanto un proprietario avverso al rischio, potendo farlo, sceglierà l'asta al primo prezzo.

Per l'asta al secondo prezzo, abbiamo:

$$\begin{aligned} & \iint_{[0,1] \times [0,1]} \left[\min\{s_1\omega, s_2\omega\} - \frac{\omega}{3} \right]^2 ds_1 ds_2 = \\ & = \iint_{[0,1] \times [0,1]} [\min\{s_1\omega, s_2\omega\}]^2 ds_1 ds_2 + \\ & - 2 \cdot \frac{\omega}{3} \cdot \iint_{[0,1] \times [0,1]} \min\{s_1\omega, s_2\omega\} ds_1 ds_2 + \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 = \\ & = \frac{1}{\omega^2} \cdot \iint_{[0,\omega] \times [0,\omega]} [\min\{x_1, x_2\}]^2 dx_1 dx_2 - 2 \cdot \frac{\omega}{3} \cdot \frac{\omega}{3} + \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned} & \iint_{[0,\omega] \times [0,\omega]} [\min\{x_1, x_2\}]^2 dx_1 dx_2 = \\ & = 2 \cdot \int_0^\omega dx_1 \int_0^{x_1} (x_2)^2 dx_2 = 2 \cdot \int_0^\omega \frac{x_1^3}{3} dx_1 = \frac{1}{6}\omega^4 \end{aligned}$$

Quindi, abbiamo che la varianza è:

$$\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \omega^4 - 2 \cdot \frac{\omega}{3} \cdot \frac{\omega}{3} + \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 = \frac{1}{6}\omega^2 - \frac{2}{9}\omega^2 + \frac{1}{9}\omega^2 = \frac{1}{18}\omega^2$$

Per l'asta al primo prezzo, abbiamo:

$$\begin{aligned}
 & \iint_{[0,1] \times [0,1]} \left[\max\left\{\omega \frac{s_1}{2}, \omega \frac{s_2}{2}\right\} - \frac{\omega}{3} \right]^2 ds_1 ds_2 = \\
 & = \iint_{[0,1] \times [0,1]} \left[\max\left\{\omega \frac{s_1}{2}, \omega \frac{s_2}{2}\right\} \right]^2 ds_1 ds_2 + \\
 & - 2 \cdot \frac{\omega}{3} \cdot \iint_{[0,1] \times [0,1]} \max\left\{\omega \frac{s_1}{2}, \omega \frac{s_2}{2}\right\} ds_1 ds_2 + \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 = \\
 & = \frac{1}{\omega^2} \cdot \iint_{[0,\omega] \times [0,\omega]} \left[\max\left\{\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}\right\} \right]^2 dx_1 dx_2 - 2 \cdot \frac{\omega}{3} \cdot \frac{\omega}{3} + \left(\frac{\omega}{3}\right)^2
 \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned}
 \iint_{[0,\omega] \times [0,\omega]} \left[\max\left\{\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}\right\} \right]^2 dx_1 dx_2 & = 2 \cdot \int_0^\omega dx_1 \int_0^{x_1} \left(\frac{x_1}{2}\right)^2 dx_2 = \\
 & = 2 \cdot \int_0^\omega \frac{x_1^3}{4} dx_1 = \frac{1}{8} \omega^4
 \end{aligned}$$

Quindi, abbiamo che la varianza è:

$$\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \omega^4 - 2 \cdot \frac{\omega}{3} \cdot \frac{\omega}{3} + \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 = \frac{1}{8} \omega^2 - \frac{2}{9} \omega^2 + \frac{1}{9} \omega^2 = \frac{1}{72} \omega^2$$

Pertanto essa è minore di quella trovata per l'asta al secondo prezzo, come era stato affermato.

4 Bibliografia

Due soli riferimenti specifici sulle aste:

Krishna, Vijay (2002): *Auction Theory*, Academic Press, San Diego (CA, USA).

Klemperer, Paul (2004): *Auctions: Theory and Practice*, Princeton University Press, Princeton (NJ, USA).

Un classico:

Vickrey, Wiliam (1961): *Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed tenders*, Journal of Finance, **16**, 8–37.

Il contributo fondamentale di Vickrey sulle aste. In particolare, il “revenue equivalence theorem”.

Altri due libri citati nel testo sono:

Dutta, Prajit K. (1999): *Strategies and Games: Theory and Practice*, MIT Press, Cambridge (MA, USA).

Patrone, Fioravante (2006): *Decisori (razionali) interagenti. Una introduzione alla Teoria dei Giochi*, Edizioni PLUS, Pisa.