

# Nash, Berge e Kakutani

Appunti di  
Fioravante PATRONE

versione del 16 giugno 2010

## Indice

1	Multiapplicazioni e “best reply”	2
2	La battaglia dei sessi	6
3	Punti fissi	10
4	Teorema di Kakutani e teorema di Berge	11
5	Dimostrazione del teorema di esistenza per equilibri di Nash	15
6	Bibliografia	17

Link vari:

Fioravante PATRONE

ASD Scuderia La Bellaria

Decisori (razionali) interagenti

Equazioni differenziali e urang-utang©

E-mail: [patrone@diptem.unige.it](mailto:patrone@diptem.unige.it)

## 1 Multiapplicazioni e “best reply”

**Definizione 1** *Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , diciamo multiapplicazione da  $A$  in  $B$  una legge che ad ogni elemento di  $A$  associa un sottoinsieme di  $B$ .*

Una multiapplicazione sarà indicata così:  $F : A \rightrightarrows B$

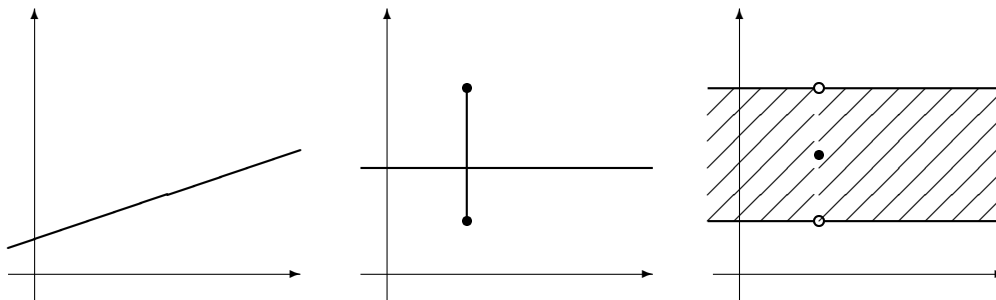
Si noti che una multiapplicazione da  $A$  in  $B$  non è altro che una funzione da  $A$  a  $\mathcal{P}(B)$  ( $\mathcal{P}(B)$  è l'insieme delle parti di  $B$ , ovvero l'insieme di tutti i sottoinsiemi di  $B$ ). Potremmo indicare con  $\hat{F} : A \rightarrow \mathcal{P}(B)$  questa funzione associata alla multiapplicazione  $F$ ; tuttavia, ci farà comodo (per descriverne più agevolmente, ad esempio, le sue proprietà topologiche) “vedere” una multiapplicazione come una funzione “a più valori” che assume valori in  $B$ . Osservo comunque come  $F$  individui univocamente  $\hat{F}$  e viceversa. Quindi, se necessario, non c'è alcun problema a passare da una formulazione all'altra.

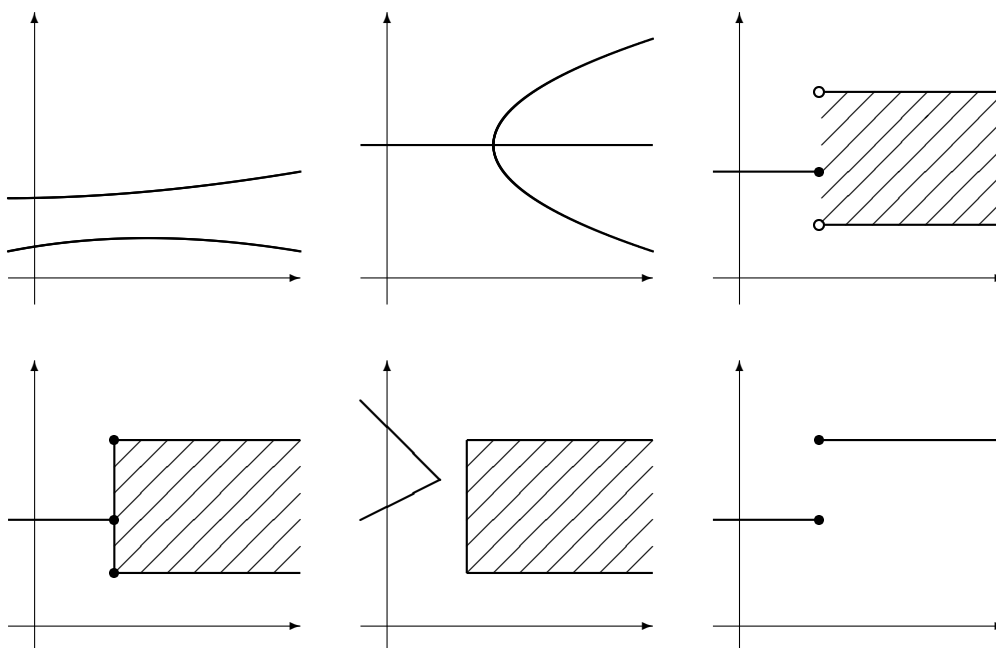
Si noti che, per come è stata definita una multiapplicazione, essa potrebbe anche assumere valori vuoti. Cioè, potrebbe essere  $F(a) = \emptyset$ , per taluni  $a \in A$ . Se vogliamo escludere questa situazione, diremo che  $F$  è una multiapplicazione a valori non vuoti, o che è una *corrispondenza* da  $A$  a  $B$  (adeguandoci ad una terminologia prevalente, pur se non completamente unificata).

Ovviamente  $\hat{F}$  ha un grafico come tutte le funzioni, solo che è difficile da visualizzare. Meglio occuparsi del grafico “ridotto” di  $F$ . Uso il termine *grafico ridotto* per rimarcare che *non* è un grafico di una funzione nel senso usuale del termine.

$$\text{gph}(F) = \{ (a, b) \in A \times B : b \in F(a) \}$$

I disegni seguenti mostrano vari esempi di multiapplicazioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ . Si noti che sono disegnati i loro grafici “ridotti”.





Un esempio particolarmente importante di multiapplicazione è dato dalla “best-reply”.

Dato un gioco in forma strategica<sup>1</sup> (a due giocatori, per semplicità)  $(X, Y, f, g)$ ,

$$R_I(y) = \operatorname{argmax}_{x \in X} f(x, y) = \{\bar{x} \in X : f(\bar{x}, y) \geq f(x, y) \quad \forall x \in X\}$$

è proprio una multiapplicazione da  $Y$  in  $X$ , la quale, senza ipotesi aggiuntive su  $X$  e su  $f$ , può essere a valori vuoti. Descritta a parole,  $R_I$  rappresenta la “best-reply” (ovvero “miglior risposta”) del giocatore  $I$  alle scelte del giocatore  $II$ . Specificamente,  $R_I(y)$  è data da quegli  $x \in X$  (se esistono) che rendono massimo il payoff per  $I$ , supponendo che  $II$  scelga  $y \in Y$ .

**Osservazione 1** *Non approfondiremo questo aspetto, ma si può notare come la definizione di  $R_I$  dipenda solo dal preordine totale  $\succeq_I$  che descrive le*

<sup>1</sup>Un gioco in forma strategica, a due giocatori, è dato da  $(X, Y, f, g)$ , dove:  $X$  ed  $Y$  sono due insiemi non vuoti che rappresentano le strategie a disposizione rispettivamente del primo e del secondo giocatore;  $f, g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  sono due funzioni a valori reali che rappresentano i payoff dei due giocatori ( $f$  rappresenta i payoff del primo giocatore,  $g$  del secondo).

preferenze di  $I$  su  $X \times Y$ , e non dalla particolare funzione che scegliamo per rappresentarlo.

**Osservazione 2** È evidente che:

$$(\bar{x}, \bar{y}) \text{ è equilibrio di Nash} \iff \begin{cases} \bar{x} \in R_I(\bar{y}) \\ \bar{y} \in R_{II}(\bar{x}) \end{cases}$$

**Esercizio 1** Provare questa affermazione. Notare che non è necessaria alcuna ipotesi sul gioco: né sugli spazi di strategie, né sui payoff.

I disegni fatti nel paragrafo successivo per la battaglia dei sessi sono i grafici ridotti di  $R_I$  e  $R_{II}$ .

Possiamo anche introdurre  $R : X \times Y \rightrightarrows X \times Y$ , definita così:  $R(x, y) = R_I(y) \times R_{II}(x)$ .

Usando  $R$ , abbiamo:

$$(\bar{x}, \bar{y}) \text{ è equilibrio di Nash} \iff (\bar{x}, \bar{y}) \in R(\bar{x}, \bar{y}).$$

**Esercizio 2** Provare a generalizzare tutto questo al caso di  $n$  giocatori:  $(X_1, \dots, X_n, f_1, \dots, f_n)$ .

**Esercizio 3** Provare che:

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in R(\bar{x}, \bar{y}) \iff \begin{cases} (\bar{x}, \bar{y}) \in \text{gph}(R_{II}) \\ (\bar{y}, \bar{x}) \in \text{gph}(R_I) \end{cases}$$

**Esercizio 4** Definire  $F^{-1}$  per una multiapplicazione e osservare che  $\text{gph}(F^{-1})$  è "simmetrico" di  $\text{gph}(F)$ , nel senso che  $(a, b) \in \text{gph}(F) \iff (b, a) \in \text{gph}(F^{-1})$ . Dedurre che:

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in R(\bar{x}, \bar{y}) \iff (\bar{x}, \bar{y}) \in (\text{gph}(R_{II}) \cap (\text{gph}(R_I^{-1})))$$

**Esercizio 5** Non penserete mica che sia finita! Definire la composizione di due multiapplicazioni e provare che non è vero che:  $(\bar{x}, \bar{y})$  è un equilibrio di Nash se e solo se:

$$\bar{x} \in (R_I \circ R_{II})(\bar{x}) \quad e \quad \bar{y} \in (R_{II} \circ R_I)(\bar{y})$$

Provare che, se  $\bar{x}$  soddisfa la prima condizione, allora esiste  $\hat{y}$  t.c.  $(\bar{x}, \hat{y})$  sia un equilibrio di Nash. Ovviamente un fatto simile vale per un  $\bar{y}$  che soddisfi la seconda condizione.

Diciamo che una multiapplicazione  $F$  è a valori chiusi (rispettivamente: convessi, aperti, etc.) se  $F(a)$  è chiuso (rispettivamente: convesso, aperto, etc.) per ogni  $a \in A$ . Ovviamente servirà che  $B$  sia spazio topologico, o spazio vettoriale, etc., a seconda dei casi.

Se  $A$  e  $B$  sono spazi topologici<sup>2</sup>, ci piacerebbe potere dire se e quando  $F$  è “continua”. In realtà si rivelano più importanti le condizioni di “semicontinuità” per  $F$ .

Noi non entreremo in queste problematiche. Osservo solo come, ad esempio, il secondo disegno è il grafico di un  $F$  che è semicontinua superiormente ma non semicontinua inferiormente, mentre il terzo rappresenta una  $F$  che è semicontinua inferiormente ma non semicontinua superiormente. L’approccio più coerente alle (semi)continuità di  $F$  passa attraverso le topologizzazioni di  $\mathcal{P}(B)$ , mediante le cosiddette topologie di Vietoris. Chi fosse interessato all’argomento, può consultare Klein e Thompson (1984) oppure Baiocchi e Capelo (1978).

La ragione per cui non mi addentro in questa problematica è che a noi basta solo la semicontinuità superiore di  $R$ . E, approfittando del fatto che  $R$  sarà a valori in un compatto<sup>3</sup>, possiamo cavarcela facilmente, usando la nozione di multiapplicazione a grafico (ridotto) chiuso. Nozione che *non* è equivalente in generale alla semicontinuità superiore, ma lo è quando la multiapplicazione è a valori in un compatto.

La definizione è la seguente.

**Definizione 2** *Siano  $A, B$  spazi topologici e  $F : A \rightrightarrows B$ . Diremo che  $F$  ha grafico (ridotto) chiuso se  $\text{gph}(F)$  è un sottoinsieme chiuso<sup>4</sup> di  $A \times B$*

**Osservazione 3** *Se  $F$  ha grafico ridotto chiuso e lo spazio topologico  $A$  è  $T_1$  (quindi è sufficiente che sia di Hausdorff<sup>5</sup>), allora  $F$  è a valori chiusi. Basta notare che  $F(a)$  è (omeomorfo a):  $(\{a\} \times B) \cap (\text{gph}(F))$  e che  $\{a\}$  è un insieme chiuso perché  $A$  è  $T_1$ .*

<sup>2</sup>Per chi non abbia dimestichezza con gli spazi topologici, verrà dettagliato in nota il caso particolare in cui  $A$  e  $B$  siano sottoinsiemi di uno spazio euclideo finito-dimensionale ( $A \subseteq \mathbb{R}^m$  e  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ , per capirci). Si intende che lavoreremo con la topologia euclidea, cioè quella indotta dalla metrica euclidea. La solita, insomma.

<sup>3</sup>Nel caso particolare che stiamo considerando nelle note a piè di pagina, dire che  $B$  è compatto equivale a dire che è un sottoinsieme chiuso e limitato di  $\mathbb{R}^n$

<sup>4</sup>Nel nostro caso particolare,  $A$  e  $B$  saranno sempre sottoinsiemi chiusi di  $\mathbb{R}^m$  ed  $\mathbb{R}^n$  rispettivamente. Pertanto, la richiesta che  $\text{gph}(F)$  sia un sottoinsieme chiuso di  $A \times B$  è equivalente a richiedere che  $\text{gph}(F)$  sia un sottoinsieme chiuso di  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ .

<sup>5</sup>Naturalmente, se  $A \subseteq \mathbb{R}^m$ , allora  $A$  è uno spazio topologico di Hausdorff.

**Osservazione 4** Se  $A, B$  sono spazi metrici<sup>6</sup> (basterebbe che fossero spazi topologici che soddisfano il primo assioma di numerabilità) sappiamo che non c'è differenza tra chiusura e chiusura sequenziale.

Pertanto,  $\text{gph}(F)$  è chiuso se e solo se è sequenzialmente chiuso. Cioè:

$$\left. \begin{array}{l} (a_n, b_n) \in \text{gph}(F) \\ (a_n, b_n) \rightarrow (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow (a, b) \in \text{gph}(F)$$

Questo può essere riscritto così :

$$\left. \begin{array}{l} (a_n) \rightarrow a \\ (b_n) \rightarrow b \\ (b_n) \in F(a_n) \end{array} \right\} \Rightarrow b \in F(a)$$

**Soluzione 1** (dell'esercizio 5) La definizione standard di composizione di multiapplicazioni è la seguente:

- date  $F : A \rightrightarrows B$  e  $G : B \rightrightarrows C$ ,
- si definisce  $(G \circ F) : A \rightrightarrows C$  così:

$$(G \circ F)(a) = \{c \in C : c \in G(b) \text{ per qualche } b \in F(a)\}$$

Detto questo, è sufficiente considerare l'esempio seguente:

$I \setminus II$	L	C	R
T	(1, 1)	(0, 0)	(0, 1)
M	(0, 0)	(0, 0)	(0, 1)
B	(1, 0)	(1, 0)	(1, 1)

e scegliere  $\bar{x} = T$  (si verifica che  $\{T, B\} = (R_I \circ R_{II})(T)$ ) e  $\bar{y} = R$  (si verifica che  $\{R\} = (R_{II} \circ R_I)(R)$ ). Notare che si può prendere  $\hat{y} = L$  e rispettivamente  $\hat{x} = B$ .

## 2 La battaglia dei sessi

Prendiamo il gioco più volte visto:

$I \setminus II$	L	R
T	(2, 1)	(0, 0)
B	(0, 0)	(1, 2)

<sup>6</sup> $A$  e  $B$ , essendo sottoinsiemi di spazi euclidei, sono essi stessi spazi metrici.

Chiediamoci come sia fatta la best reply per la sua estensione mista.

Ricordo che, dato un gioco finito  $(X, Y, f, g)$ , con  $X = \{x_1, \dots, x_m\}$  e  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ , l'estensione mista è  $(\Delta(X), \Delta(Y), \hat{f}, \hat{g})$ , dove:

- $\Delta(X) = \{p \in \mathbb{R}^m : p_i \geq 0 \text{ per ogni } i \text{ e } \sum_{i=1}^m p_i = 1\}$
- $\Delta(Y) = \{q \in \mathbb{R}^n : q_j \geq 0 \text{ per ogni } j \text{ e } \sum_{j=1}^n q_j = 1\}$
- $\hat{f}(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j f(x_i, y_j)$
- $\hat{g}(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j g(x_i, y_j)$

$\Delta(\{T, B\})$  e  $\Delta(\{L, R\})$  possono essere identificati con  $[0, 1]$ . Una strategia mista  $(p_1, p_2)$  ci dice che verrà giocato  $T$  con probabilità  $p_1$  e  $B$  con probabilità  $p_2$ . Ma, naturalmente,  $p_2 = 1 - p_1$ . Quindi, una strategia mista per  $I$  è individuata da  $p_1$  ed è  $(p_1, 1 - p_1)$ . Quindi, possiamo dire, con lieve abuso di terminologia, che una strategia mista è  $p_1$ . Anzi, a questo punto, ci possiamo anche risparmiare gli indici e dire che una strategia mista è  $p$ , con  $p \in [0, 1]$ . Idem facciamo per  $II$ : diremo che una sua strategia mista è  $q$ , con  $q \in [0, 1]$ .

I payoff attesi sono:

$$f(p, q) = 2pq + 1(1 - p)(1 - q)$$

$$g(p, q) = pq + 2(1 - p)(1 - q)$$

Cerchiamo  $R_{II}(p)$ . Fissiamo  $\bar{p} \in [0, 1]$  e cerchiamo  $\operatorname{argmax}_{q \in [0, 1]} g(\bar{p}, q)$ .

$$\begin{aligned} g(\bar{p}, q) &= \bar{p}q + 2(1 - \bar{p})(1 - q) = \bar{p}q + 2 - 2\bar{p} - 2q + 2\bar{p}q = \\ &= (3\bar{p} - 2)q + 2 - 2\bar{p} \end{aligned}$$

E'  $3\bar{p} - 2 > 0$  se e solo se  $\bar{p} > 2/3$ . Quindi:

- Se  $\bar{p} < 2/3$   $\operatorname{argmax} g(\bar{p}, q) = \{0\}$
- Se  $\bar{p} = 2/3$   $\operatorname{argmax} g(\bar{p}, q) = [0, 1]$ , infatti  $g(\bar{p}, q) = g(2/3, q)$  è costante.
- Se  $\bar{p} > 2/3$   $\operatorname{argmax} g(\bar{p}, q) = \{1\}$

Disegniamo  $R_{II}(p)$ : vedi Figura 1.

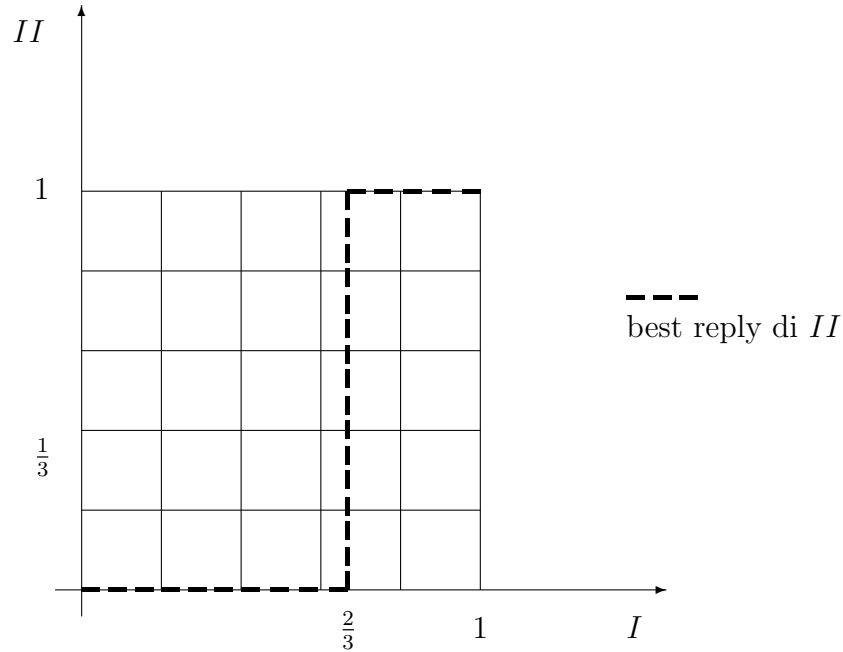


Figura 1: Il grafico di  $R_{II}$

Troviamo anche  $R_I(q)$ . Fissiamo  $\bar{q} \in [0, 1]$  e cerchiamo  $\operatorname{argmax}_{p \in [0,1]} f(p, \bar{q})$ . Abbiamo:

$$\begin{aligned} f(p, \bar{q}) &= 2\bar{q}p + (1-p)(1-\bar{q}) = 2p\bar{q} + 1 - p - \bar{q} + p\bar{q} = \\ &= (3\bar{q} - 1)p + 1 - \bar{q} \end{aligned}$$

E'  $3\bar{q} - 1 > 0$  se e solo se  $\bar{q} > 1/3$ . Quindi:

- Se  $\bar{q} < 1/3$   $\operatorname{argmax} f(p, \bar{q}) = \{0\}$ .
- Se  $\bar{q} = 1/3$   $\operatorname{argmax} f(p, \bar{q}) = [0, 1]$ , infatti  $f(p, \bar{q}) = f(p, 1/3)$  è costante.
- Se  $\bar{q} > 1/3$   $\operatorname{argmax} f(p, \bar{q}) = \{1\}$

Disegniamo, in Figura 2, il “grafico” sia di  $R_I(q)$  che di  $R_{II}(p)$ .

Osserviamo come né  $R_I$  né  $R_{II}$  siano funzioni, ma come siano invece (ovviamente) delle multiapplicazioni: anche in un gioco semplice come il gioco della battaglia dei sessi, l'idea di best reply ci porta a dover utilizzare le multiapplicazioni.

Possiamo osservare che, ad esempio:



- $R_{II}(0) = \{0\}$ ,  $R_I(2/3) = \{1\}$  e quindi  $R(0, 2/3) = \{1\} \times \{0\} = \{(1, 0)\}$
- $R_{II}(2/3) = [0, 1]$ ,  $R_I(0) = \{0\}$  e quindi  $R(2/3, 0) = \{0\} \times [0, 1]$
- $R_{II}(0) = \{0\}$ ,  $R_I(0) = \{0\}$  e quindi  $R(0, 0) = \{0\} \times \{0\} = \{(0, 0)\}$
- $R_{II}(1) = \{1\}$ ,  $R_I(1) = \{1\}$  e quindi  $R(1, 1) = \{1\} \times \{1\} = \{(1, 1)\}$
- $R_{II}(2/3) = [0, 1]$ ,  $R_I(1/3) = [0, 1]$  e quindi  $R(2/3, 1/3) = [0, 1] \times [0, 1]$

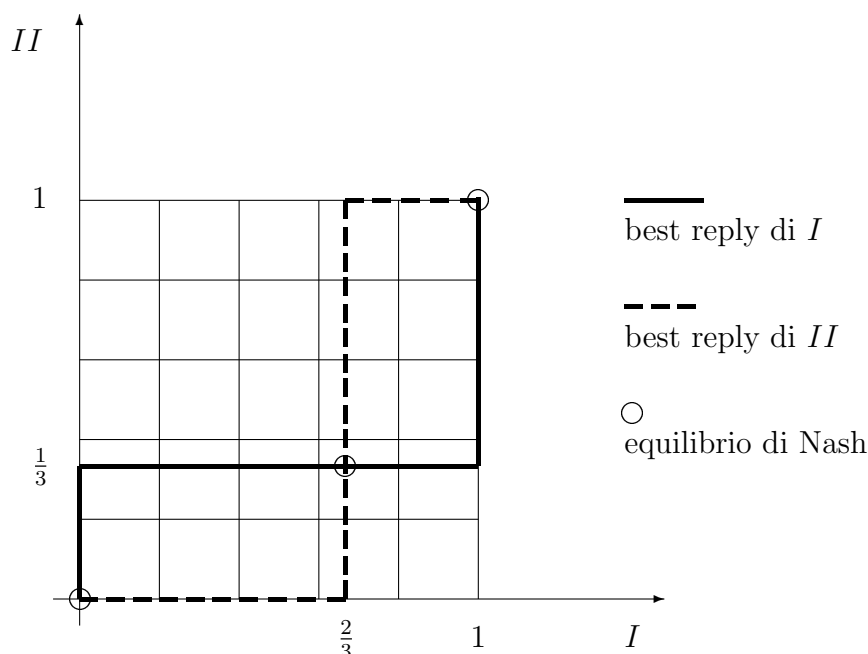


Figura 2: I grafici di  $R_I$  ed  $R_{II}$  e gli equilibri di Nash

I grafici ridotti delle due multiapplicazioni hanno intersezione non vuota e ciascuno dei punti della loro intersezione individua un punto fisso per  $R$  (grazie agli esercizi 3 e 4). Quindi  $R$  ha tre punti fissi, ovvero l'estensione mista della battaglia dei sessi ha tre equilibri di Nash. Essi sono (espressi come coppie  $(p, q)$ ):  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  e  $(2/3, 1/3)$ . Infatti:  $R(0, 0) = \{0\} \times \{0\} = \{(0, 0)\}$ , quindi  $(0, 0) \in R(0, 0)$ ;  $R(1, 1) = \{1\} \times \{1\} = \{(1, 1)\}$  e quindi  $(1, 1) \in R(1, 1)$ , inoltre  $R(2/3, 1/3) = [0, 1] \times [0, 1]$  e quindi  $(2/3, 1/3) \in R(2/3, 1/3)$ .

I primi due corrispondono agli equilibri  $(T, L)$  e  $(B, R)$  in strategie pure.

### 3 Punti fissi

L'equivalenza:

$$(\bar{x}, \bar{y}) \text{ è equilibrio di Nash} \Leftrightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in R(\bar{x}, \bar{y})$$

ci permette di “ridurre” il problema di trovare un equilibrio di Nash a quello di trovare un punto fisso per  $R$ .

Se  $R$  fosse una funzione ed identificassimo il singleton  $R(x, y)$  con l'unico suo elemento, potremmo scrivere  $(\bar{x}, \bar{y}) = R(\bar{x}, \bar{y})$ .

Si noti che l'idea di ridurre un problema di equilibrio a quello di un punto fisso (o viceversa) è un'idea generale. Non solo: molti problemi apparentemente lontani dall'idea di punto fisso possono esservi ricondotti. Ricordo ad esempio che mediante un teorema di punto fisso si può dimostrare il teorema di Dini sulle funzioni implicite, così come si può dimostrare l'esistenza ed unicità della soluzione per un problema di Cauchy.

Allora, avendo ridotto il problema di ricerca di equilibri di Nash a un problema di ricerca di punti fissi, chiediamoci che teoremi abbiamo a disposizione.

Quelli classici sono due: il teorema delle contrazioni e quello di Brouwer. Ovviamente li potremmo applicare direttamente solo quando  $R$  fosse una funzione.

**Definizione 3** Sia  $(S, d)$  uno spazio metrico<sup>7</sup>. Una funzione  $f : S \rightarrow S$  è detta contrazione se esiste  $K < 1$  tale che  $d(f(s), f(t)) \leq Kd(s, t)$ .

**Teorema 1 (delle contrazioni)** Sia  $(S, d)$  uno spazio metrico completo<sup>8</sup> e sia  $f : S \rightarrow S$  una contrazione. Allora  $f$  ha uno ed un solo punto fisso.

Nel contesto che ci interessa, difficilmente si riesce ad applicare il teorema delle contrazioni, perché raramente possiamo ottenere che  $R$  sia una contrazione.

Il teorema di Brouwer si presta di più al nostro tipo di problema.

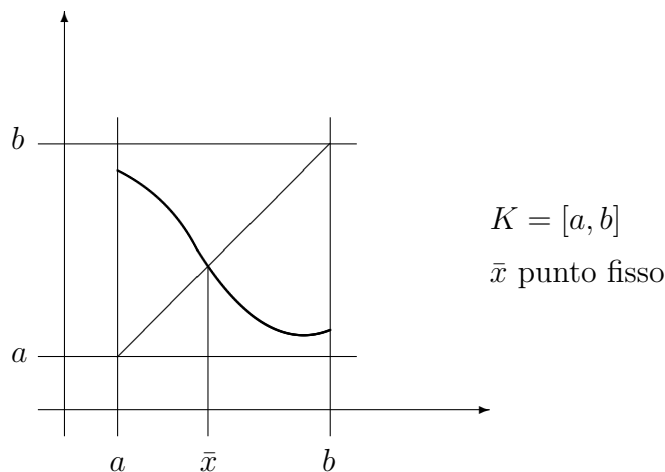
**Teorema 2 (Brouwer)** Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $K$  compatto<sup>9</sup>, convesso<sup>10</sup> e non vuoto. Sia  $f : K \rightarrow K$  continua. Allora  $f$  ha un punto fisso.

<sup>7</sup>Se  $S \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $S$  è uno spazio metrico. Dati  $x, y \in S$ ,  $d(x, y)$  è la distanza euclidea fra  $x$  ed  $y$ :  $d(x, y) = \left\{ \sum_{i=1}^k (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2}$ .

<sup>8</sup>Completo significa che tutte le successioni di Cauchy sono convergenti. Se  $S$  è un sottoinsieme chiuso di  $\mathbb{R}^k$ , allora  $(S, d)$  è uno spazio metrico completo. La metrica  $d$  è, s'intende, la solita distanza euclidea.

<sup>9</sup>Ricordiamo che un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^k$  è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

<sup>10</sup>Un sottoinsieme  $S$  di  $\mathbb{R}^k$  è convesso se e solo se, ogni qualvolta contiene due punti  $x$  ed  $y$ , contiene tutto il segmento che li congiunge. In formule: se  $x, y \in S$ , allora  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$  per ogni  $\lambda \in [0, 1]$ .



La figura sopra mostra un esempio nel quale  $K$  è un intervallo  $[a, b]$  di  $\mathbb{R}$ . In questo caso particolare, l'esistenza di un punto fisso può essere agevolmente dedotta dal teorema degli zeri. La dimostrazione del caso generale è invece assai complessa. In Baiocchi e Capelo (1978) si può trovare una dimostrazione basata ottenuta mediante un risultato di carattere combinatorio (il lemma di Sperner sulle triangolazioni) e tramite il cosiddetto "KKM" ("lemma" di Knaster, Kuratowski e Mazurkiewicz). Tra le varie dimostrazioni, ve ne sono alcune cosiddette elementari. Tra queste si possono citare sia quella di Kuga (1974) che quella di Kannai (1981).

Osservo anche che è possibile utilizzare il teorema di Brouwer per dimostrare l'esistenza di un equilibrio di Nash. Anzi, Nash stesso ha mostrato come si potesse seguire questa strada (vedi il suo lavoro del 1951). Io preferisco l'approccio mediante il teorema di Kakutani perché è più naturale (Nash ha seguito questa strada nel suo lavoro del 1950, su suggerimento di David Gale).

## 4 Teorema di Kakutani e teorema di Berge

Il teorema di Kakutani è la generalizzazione del teorema di Brouwer alle multiapplicazioni.

**Teorema 3 (Kakutani)** *Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $K$  compatto, convesso e non vuoto. Sia  $F : K \rightrightarrows K$  una corrispondenza a valori (non vuoti e) convessi, ed a grafico ridotto chiuso. Allora  $F$  ha un punto fisso nel senso che esiste  $k \in K$  tale che  $k \in F(k)$*

**Osservazione 5** *Si noti che il teorema di Kakutani è una generalizzazione del teorema di Brouwer: ovvero, se abbiamo  $f : K \rightarrow K$  e definiamo  $F(k) =$*

$\{f(k)\}$ , se  $f$  soddisfa le ipotesi del teorema di Brouwer, allora  $F$  soddisfa quelle di Kakutani.

Per dimostrare il teorema di esistenza di un equilibrio, dovremo dimostrare che la corrispondenza di miglior risposta soddisfa le ipotesi del teorema di Kakutani. In particolare, ci servirà dimostrare che ha grafico ridotto chiuso. A questo scopo è utile il teorema di Berge.

Il teorema di Berge (o del massimo) si occupa di un problema interessante di per sé: se ho  $f_n \rightarrow f$ , che succede ad  $\operatorname{argmax} f_n$ ? Tende ad  $\operatorname{argmax} f$ ? Magari ci sarebbe anche da precisare che tipo di convergenza si abbia per le  $f_n$  (puntuale?, uniforme?, in media?, etc.), ed anche che tipo di convergenza si richieda per gli  $\operatorname{argmax}$ . . . E se ho  $f_\lambda \rightarrow f_{\lambda_0}$  per  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ ?

Ma avere  $\lambda \rightarrow f_\lambda$  (con  $f_\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}$ ) è come avere:  $\varphi : \Lambda \times A \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) (una successione di funzioni  $f_n$ , con il suo limite  $f$ , può essere vista come  $\varphi : \bar{\mathbb{N}} \times A \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  e  $\varphi(n, x) = f_n(x)$ ,  $\varphi(\infty, x) = f(x)$ ). Insomma, un modo “veloce” per trattare questo problema consiste nel considerare che cosa succede ad una funzione di due variabili delle quali ne teniamo una “come parametro” e l'altra è invece la variabile rispetto alla quale massimizziamo.

Vediamo allora un enunciato del teorema di Berge (enunciato da cui si vede che riusciamo a “bypassare”, elegantemente, tutte le domande fatte poco sopra in merito a che tipi di convergenze ci interessano, sia come ipotesi che come tesi. . . Chi volesse approfondire, può consultare Klein e Thompson (1984), citato in bibliografia).

**Teorema 4 (Berge)** *Siano  $S, T$  spazi metrici<sup>11</sup> e sia  $f : S \times T \rightarrow \mathbb{R}$ , continua. Allora la multiapplicazione  $M : S \rightrightarrows T$  definita come  $M(s) = \operatorname{argmax}_{t \in T} f(s, t)$ , ha grafico ridotto chiuso.*

**Dimostrazione.** Ci serve dimostrare che:

$$\left. \begin{array}{l} s_n \rightarrow s_0 \\ t_n \rightarrow t_0 \\ t_n \in \operatorname{argmax}_{t \in T} f(s_n, t) \end{array} \right] \Rightarrow t_0 \in \operatorname{argmax}_{t \in T} f(s_0, t)$$

Supponiamo per assurdo che  $t_0 \notin \operatorname{argmax}_{t \in T} f(s_0, t)$ . Allora  $\exists \bar{t}$  tale che  $f(s_0, t_0) < f(s_0, \bar{t})$ .

Sia  $\epsilon = f(s_0, \bar{t}) - f(s_0, t_0)$ . Abbiamo:

$$\epsilon = [f(s_0, \bar{t}) - f(s_n, \bar{t})] + [f(s_n, \bar{t}) - f(s_n, t_n)] + [f(s_n, t_n) - f(s_0, t_0)].$$

Osserviamo che:

---

<sup>11</sup>Naturalmente è sufficiente assumere che  $S$  e  $T$  siano sottoinsiemi di un opportuno spazio euclideo finito-dimensionale.

- $s_n \rightarrow s_0$ , quindi  $f(s_n, \bar{t}) \rightarrow f(s_0, \bar{t})$  per la continuità di  $f$ ,
- $t_n \in \operatorname{argmax}_{t \in T} f(s_n, t)$ , pertanto  $f(s_n, \bar{t}) - f(s_n, t_n) \leq 0$ ,
- $(s_n, t_n) \rightarrow (s_0, t_0)$  e quindi  $f(s_n, t_n) \rightarrow f(s_0, t_0)$ , sempre per la continuità di  $f$ ,

Allora (per  $n$  sufficientemente grande):

$$\epsilon = [f(s_0, \bar{t}) - f(s_n, \bar{t})] + [f(s_n, \bar{t}) - f(s_n, t_n)] + [f(s_n, t_n) - f(s_0, t_0)] \leq \frac{1}{3}\epsilon + 0 + \frac{1}{3}\epsilon.$$

Quindi  $\epsilon \leq \frac{2}{3}\epsilon$ . Contraddizione.  $\square$

Si noti che l'enunciato completo del teorema di Berge dice qualcosa anche riguardo al comportamento della successione  $v_n = \max_{t \in T} f(s_n, t)$  (ammesso che sia definita). Questa parte non viene riportata, non essendo rilevante per il teorema di Nash.

Per curiosità, vediamo alcuni esempi di quello che succede:

**Esempio 1** Siano  $S = T = [0, 1]$  ed  $f(s, t) = st$ . Allora,  $\operatorname{argmax}_{t \in T} f(s, t) = \{1\}$  se  $s \in ]0, 1]$ , mentre  $\operatorname{argmax}_{t \in T} f(0, t) = [0, 1]$ . Il grafico della multiapplicazione  $\operatorname{argmax}$  è disegnato in figura 3. E' la linea calcata, composta da due segmenti.

**Esempio 2** Siano  $S = T = [0, 1]$  ed  $f(s, t) = st - t^2$ . Allora,  $\operatorname{argmax}_{t \in T} f(s, t) = \{s/2\}$ , per  $s \in [0, 1]$ . Il grafico della multiapplicazione  $\operatorname{argmax}$  è disegnato in figura 4. E' la linea calcata.

**Esempio 3** Siano  $S = T = \mathbb{R}$  ed  $f(s, t) = 2st^2 - t^4$ . E'  $\frac{\partial f}{\partial t} f(s, t) = 4st - 4t^3 = 4t(s - t^2)$ , che si annulla per  $t = 0$  e per  $t = \pm\sqrt{s}$ . Naturalmente  $t = 0$  è un punto di massimo per  $s \leq 0$ , e di minimo (locale) per  $s > 0$ . Mentre i punti  $t = \pm\sqrt{s}$  sono punti di massimo (globale) per  $s > 0$ . Allora:

$$\operatorname{argmax}_{t \in T} f(s, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \leq 0, \\ \{-\sqrt{s}, \sqrt{s}\} & \text{se } s \geq 0. \end{cases}$$

Il grafico della multiapplicazione  $\operatorname{argmax}$  è disegnato in figura 5. E' dato dall'unione dell'asse delle  $x$  negative e di una parabola. Chiaramente, per via della parabola, *non* è grafico di una *funzione* da  $S$  a  $T$ .

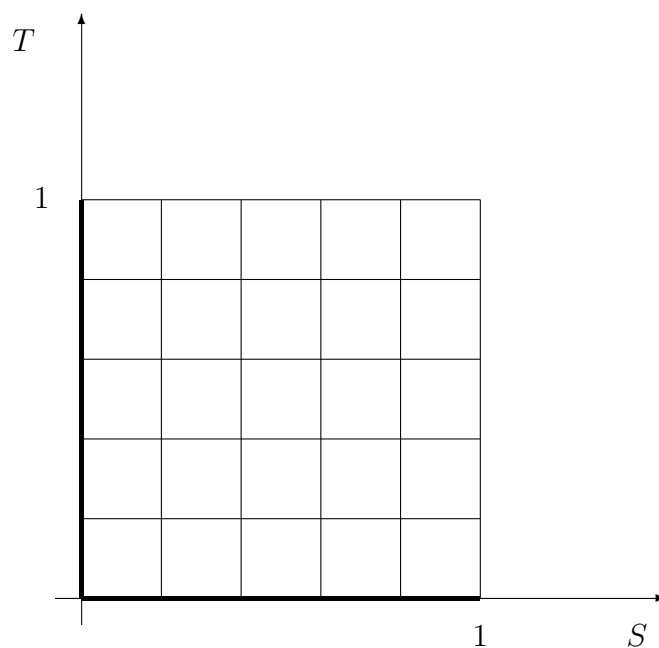


Figura 3: Il grafico di argmax nell'esempio 1

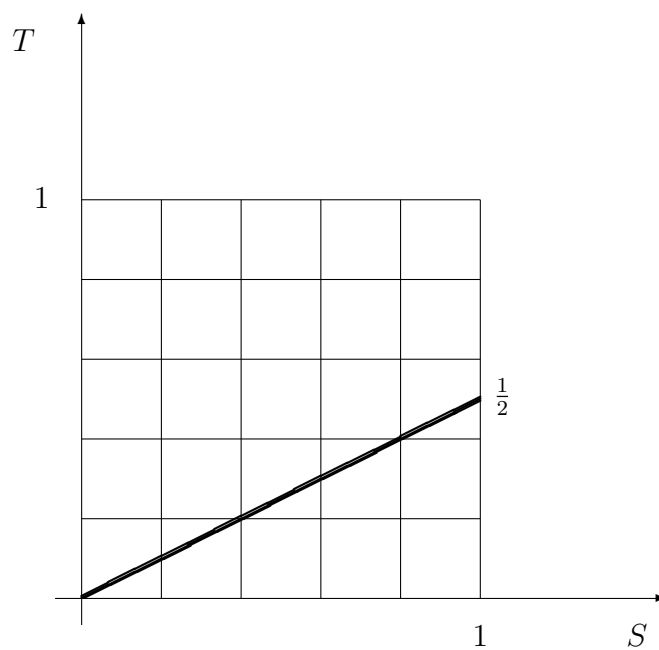


Figura 4: Il grafico di argmax nell'esempio 2

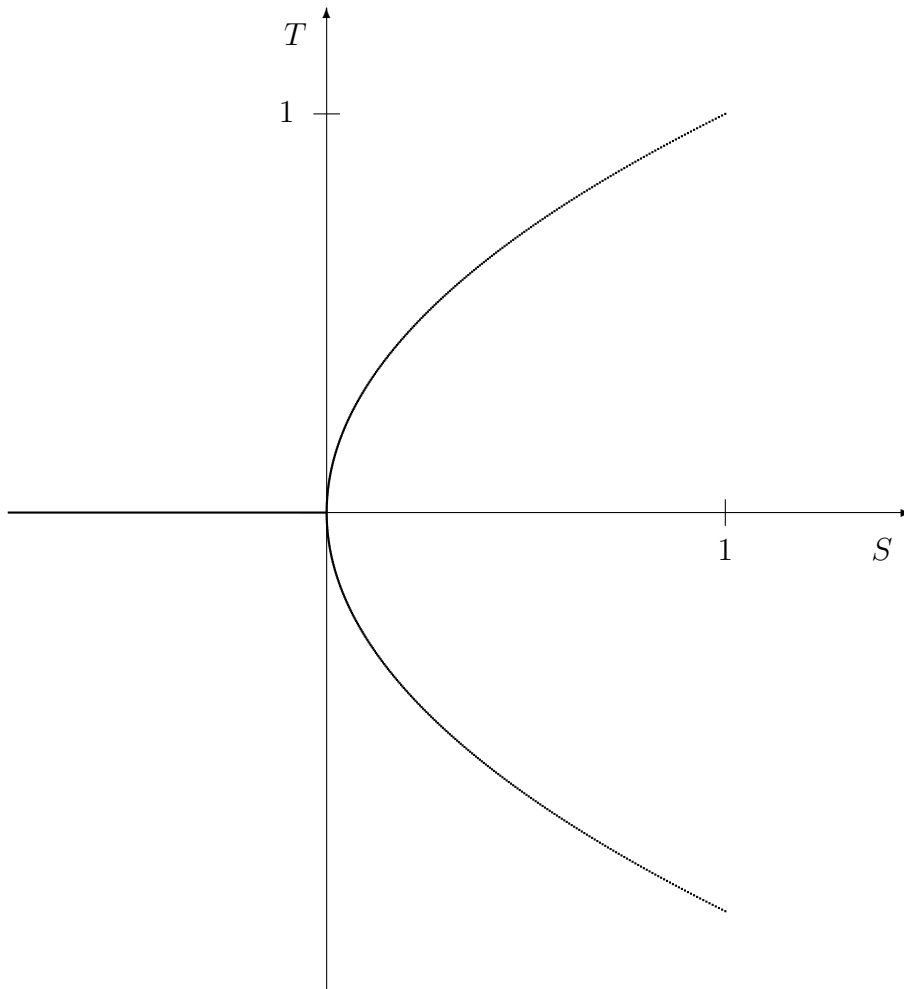


Figura 5: Il grafico di argmax nell'esempio 3

## 5 Dimostrazione del teorema di esistenza per equilibri di Nash

**Teorema 5** Sia  $G = (X, Y, f, g)$ . Con  $X, Y$  sottoinsiemi non vuoti, compatti e convessi di spazi euclidei di dimensione finita. Siano  $f, g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

Supponiamo che le funzioni  $x \mapsto f(x, \bar{y})$  e  $y \mapsto g(\bar{x}, y)$  siano quasi concave ( $\forall \bar{y} \in Y$  e  $\forall \bar{x} \in X$  rispettivamente).

Allora esiste  $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$  che è equilibrio di Nash per  $G$ .

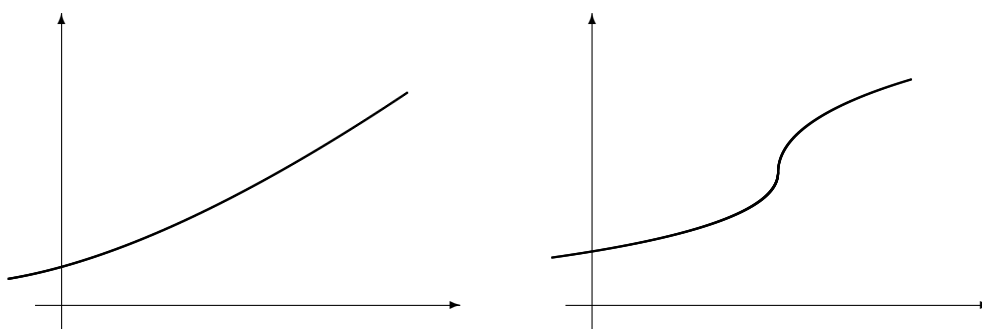
Vediamo alcune considerazioni e specificazioni relative a questo teorema.

Spazio euclideo: possiamo assumere ad esempio  $X \subseteq \mathbb{R}^m$  e  $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ . Con la solita metrica.

**Definizione 4** Sia  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $E$  convesso,  $\varphi$  si dice quasi concava se  $\forall t \in \mathbb{R} \{x \in E : \varphi(x) \geq t\}$  è convesso.

**Esercizio 6** Dimostrare che se  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  è concava, allora è quasi-concava.

**Esempio 4** I grafici seguenti mostrano funzioni quasi concave, ma non concave; anzi, la prima è addirittura strettamente convessa:



**Problema 1** Sia  $\succeq$  preordine totale su  $E$  ( $E \subseteq \mathbb{R}^k$ ,  $E$  convesso). Sia  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ , funzione di utilità che rappresenta  $\succeq$ . Trovare una condizione su  $\succeq$  che sia equivalente alla quasi concavità di  $\varphi$ .

**Dimostrazione (del teorema)** Basta verificare che  $R : X \times Y \rightrightarrows X \times Y$  soddisfa le ipotesi del teorema di Kakutani. Sia  $(x, y) \in X \times Y$ , allora  $R_I(y)$  ed  $R_{II}(x)$  sono non vuoti (argmax di funzioni continue su compatti non vuoti). Quindi  $R(x, y)$  è non vuoto.

Inoltre  $R_I(y)$  è convesso. Infatti  $\text{argmax}_{x \in X} f(x, y) = \{x \in X : f(x, y) \geq \max_{x \in X} f(x, y)\}$ , quindi è convesso perché  $f(\cdot, y)$  è quasi concava: basta prendere, nella definizione di funzione quasi concava,  $t = \max_{x \in X} f(x, y)$ .

Discorso analogo si fa per  $R_{II}(x)$ .  $R(x, y)$  è convesso perché prodotto cartesiano di convessi.

Il fatto che  $R$  abbia grafico ridotto chiuso, dipende dal fatto che  $R_{II}$  e  $R_I$  hanno questa proprietà.

Dire che  $R$  ha grafico (ridotto) sequenzialmente chiuso significa:

$$\left. \begin{array}{l} (x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) \\ (z_n, w_n) \rightarrow (z_0, w_0) \\ (z_n, w_n) \in R(x_n, y_n) \end{array} \right] \Rightarrow (z_0, w_0) \in R(x_0, y_0)$$

Ma questo si scinde nelle due condizioni:



$$\left. \begin{array}{l} y_n \rightarrow y_0 \\ z_n \rightarrow z_0 \\ z_n \in R_I(y_n) \end{array} \right\} \Rightarrow z_0 \in R_I(y_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow x_0 \\ w_n \rightarrow w_0 \\ w_n \in R_{II}(x_n) \end{array} \right\} \Rightarrow w_0 \in R_{II}(x_0)$$

E queste sono conseguenze dirette del teorema di Berge.  $\square$

**Osservazione 6** *Se  $(X, Y, f, g)$  è un gioco finito allora la sua estensione mista  $(\Delta(X), \Delta(Y), \hat{f}, \hat{g})$  soddisfa le condizioni del teorema. Infatti  $\Delta(X)$  e  $\Delta(Y)$  sono sottoinsiemi non vuoti, compatti e convessi di spazi euclidei,  $\hat{f}, \hat{g}$  sono continue perché polinomi. Ed  $\hat{f}, \hat{g}$  sono lineari (quindi quasi concave) nella “loro” variabile.*

Questo è il teorema di Nash.

## 6 Bibliografia

Baiocchi C. e A.C. Capelo (1978): *Disequazioni variazionali e quasivariazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera*, Vol.2, pp.300, (Collana Quaderni dell’Unione Matematica Italiana n.7), Pitagora, Bologna.

Berge, C. (1959): *Espaces topologiques, fonctions multivoques*, Dunod, Paris; english translation (1963): *Topological Spaces*, Oliver and Boyd, Edinburgh; reprinted (1997), Dover Publications, Mineola, New York.

Kakutani, S. (1941): *A generalization of Brouwer’s fixed point theorem*, Duke Math J., **8(3)**, 457-459.

Kannai, Y. (1981): *An Elementary Proof of the No-Retraction Theorem*, American Mathematical Monthly, **88(4)**, 264-268.

disponibile in rete (al 12 maggio 2007):

<http://cowles.econ.yale.edu/P/cp/p05a/p0529.pdf>

Klein, E. e A.C. Thompson (1984): *Theory of correspondences*, Wiley, New York.

K. Kuga (1974), *Brouwer's Fixed Point Theorem: An Alternate Proof*, SIAM Journal of Mathematical Analysis, **5**, 893-897.  
disponibile in rete (al 12 maggio 2007; NB: occorre essere registrati sul sito):  
<http://locus.siam.org/fulltext/SIMA/volume-05/0505085.pdf>

Nash, J.F. Jr. (1950): *Equilibrium Points in n-Person Games*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **36**, 48-49.

Nash, J.F. Jr. (1951): *Non-Cooperative Games*, Ann. of Math., **54**, 286-295.