Didattica e Ricerca

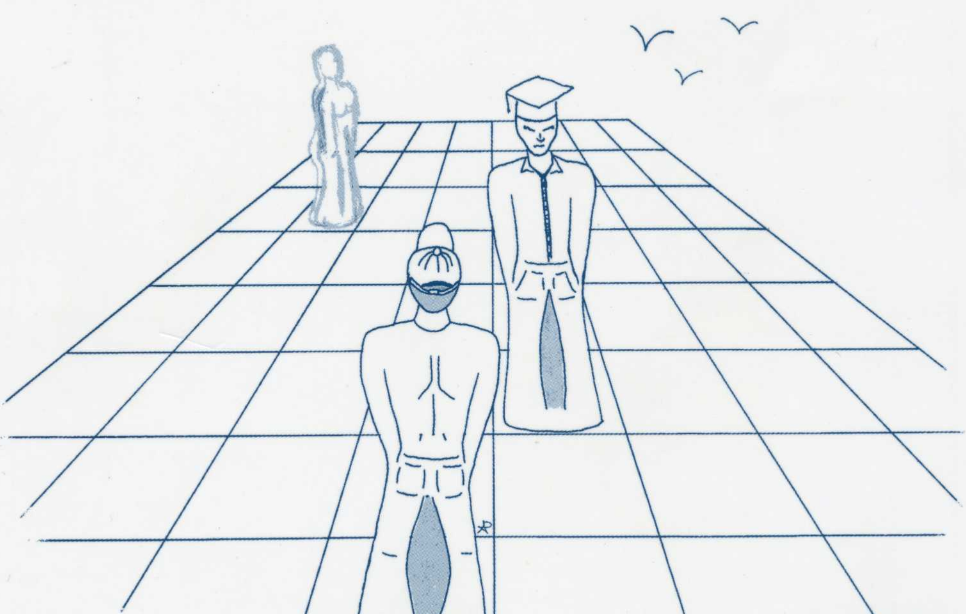
EDIZIONI

plus pisa university press

Fioravante Patrone

Decisori (razionali) interagenti

Una introduzione alla teoria dei giochi



Manuali

Prefazione

La "Teoria dei Giochi" (d'ora in poi, TdG) ha avuto negli ultimi decenni un enorme sviluppo ed anche un notevole successo, con applicazioni rilevanti, in primis in economia, ma anche in altri contesti: dalla biologia evolutiva alla scienza politica, dalla "programmazione ad agenti" all'etica, per citare alcuni esempi. Succede quindi che la TdG sia menzionata frequentemente dai mezzi di comunicazione di massa, anche per lo stimolo ricevuto dal successo di un recente film dedicato ad uno dei "padri fondatori" della TdG.

Da qui, la domanda: bisogna conoscere la TdG? Certamente si può vivere allegramente senza, però va detto che fornisce strumenti utili per la comprensione del mondo e per la categorizzazione dei fenomeni, contribuendo pertanto ad affinare la visione del mondo di chi se ne è appropriato. Un po' come per la teoria dell'evoluzione, o per la biologia molecolare, o tante altre discipline che hanno un impatto che va al di là del puro loro campo di competenza scientifica.

Da qui l'idea di scrivere un libro che consentisse di comprendere gli elementi di base della TdG, in particolare della sua parte più classica, più consolidata: la "scommessa" è quella di riuscire a posizionare questo scritto nella zona di confine fra manuale e testo divulgativo, di modo che possa essere di una qualche utilità per chi voglia conoscere i tratti fondamentali della disciplina, senza avere intenzione di diventarne un esperto, ma allo stesso tempo sia disponibile a fare uno sforzo che va al di là della lettura di qualche articolo introduttivo, sottraendosi a quella "illusione della comprensione" che un approccio non sufficientemente approfondito può dare. Presumo che vi possa essere un certo numero di potenziali lettori, anche perché lo sviluppo relativamente recente della TdG, fa sì che, persino tra chi potrebbe essere interessato alla TdG per ragioni professionali, sia ampio lo strato di coloro che non hanno avuto occasione di apprenderla attraverso una esposizione organica (ad esempio, un corso universitario). Sottolineo, d'altronde, come questo libro non sia un manuale standard di TdG: nonostante il fatto che la TdG sia, anche, una disciplina formale, non si troveranno in questo testo teoremi, dimostrazioni, definizioni dettagliate. Ho evitato di ricorrere ad elementi di “tecnologia matematica” là dove poteva essere evitata, ed ho comunque evitato di ricorrere a strumenti che non fossero alla portata di chi si sia fermato alle competenze fornite da un liceo *scientifico* o scuola secondaria assimilabile. Ciò non toglie che ci deve essere da parte del lettore la disponibilità ad un certo impegno, assolutamente indispensabile per impadronirsi almeno delle coordinate fondamentali della disciplina, visto che le intenzioni di questo libro sono anche quelle di una introduzione “tecnica” ai concetti principali della TdG. Per quanto poco possa valere la mia opinione, aggiungo che secondo me ne vale la pena, e mi auguro che questo libro possa essere utile a tal fine. Chi poi volesse approfondire, potrà farlo su altri testi, che verranno suggeriti nel capitolo dedicato ai riferimenti bibliografici.

Chi fosse interessato, potrà consultare la pagina web “associata” a questo libro, per trovare materiale aggiuntivo. Lì potranno essere trovate le definizioni formali che vengono evitate nel testo; si avrà anche la possibilità di usare software disponibile in rete, o di sperimentare alcune affermazioni relative a modelli semplici ma significativi. Vi si troveranno, naturalmente, anche link “selezionati” e commentati a siti che possono essere a mio parere interessanti. Infine, vi si troverà anche una selezione delle risposte a mio parere più interessanti che verranno date, da parte di chi vorrà farlo, ai problemi proposti in questo libro. Va da sé che, come di solito avviene con questo mezzo di comunicazione, sarà una pagina web in continua evoluzione. La pagina web sarà raggiungibile a partire dalla mia “home” di lavoro:

http://www.fioravante.patrone.name/

Da ultimo, i ringraziamenti, a vario titolo. Grazie a: Claudio Bartocci, Maurizio Cafagno, Francesco Catti, Vito Fragnelli, Roberto Gazzolo, Roberto Lucchetti, Orleo Marinaro, Stefano Moretti, Lucia Pusillo, Anna Torre.

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Il lettore potrebbe aspettarsi una introduzione piuttosto lunga e ricca di particolari: dopotutto, la finalità dichiarata di questo libro potrebbe più che ragionevolmente indurre questa aspettativa. Così invece non sarà. Mi limiterò a brevissimi cenni di inquadramento storico-concettuale, rinviando all'ultimo capitolo una analisi più approfondita, che spero a quel punto possa essere meglio apprezzata (?) dal lettore.

Ciò detto, veniamo a questo inquadramento iniziale. Il termine "teoria dei giochi" identifica una disciplina che ha come oggetto di analisi le situazioni in cui più decisori si trovano a fare delle scelte, dal complesso delle quali dipende il risultato finale. Tipicamente, inoltre, i vari esiti finali possibili sono valutati in modo differente dai decisori coinvolti. Assunzioni standard sono che i decisori siano "razionali", ovverossia che abbiano preferenze coerenti sul complesso degli esiti finali potenziali, e che ciascuno cerchi di determinare, per quanto in suo potere, l'esito che maggiormente preferisce. Altra ipotesi standard è che i decisori siano intelligenti, il che significa che sono in grado di rappresentare le situazioni che hanno di fronte, le possono analizzare, possono formulare ipotesi ed effettuare deduzioni sul comportamento proprio ed altrui, etc.

Quanto succintamente appena descritto rappresenta il nucleo centrale della teoria dei giochi, anche se vedremo come il suo apparato concettuale e formale venga ormai utilizzato anche al di fuori del quadro delineato.

Per quanto riguarda le origini della disciplina, vi è un generale e motivato consenso nel fissare una ben precisa data di nascita: il 1944, anno in cui viene pubblicato il libro *Theory of Games and Economic Behavior*, scritto da John von Neumann ed Oskar Morgenstern. Il titolo di questo volume è una tesi di lavoro: partire dall'analisi dei giochi "da tavolo" (o "di società": ci si riferisce agli scacchi, al poker, ed anche a giochi semplici quali il "pari o dispari" o la "morra cinese") per sviluppare strumenti per l'analisi del comportamento economico, il cui fulcro è individuato proprio nell'agire ed *interagire* di vari decisori (consumatori, produttori), in particolare sul mercato, ma non solo limitatamente ad esso. Dal libro scaturisce il nome della disciplina: nome in parte sfortunato perché origine di possibili malintesi e comunque non adatto ad individuare il campo di primario interesse. Tentativi di cambiarne il nome (ad esempio: "interactive decision making") non hanno riscosso per ora successo.

Va da sé che il volume di von Neumann e Morgenstern non nasce nel nulla: allo stesso von Neumann si deve, sedici anni prima, una fondamentale pubblicazione sull'esistenza di soluzioni per i giochi "a somma zero", ed un ulteriore rilevante contributo apparso nel 1937: il cosiddetto "modello di crescita di von Neumann". Quanto apparso in precedenza non è però comparabile all'opera del 1944 per organicità, né tanto meno per impatto sulla comunità scientifica. Si crearono in effetti notevoli aspettative nei confronti di questa nuova teoria che aveva l'ambizione di fornire il "nuovo" linguaggio matematico-formale per lo studio dei fenomeni economici. I successi nei primi anni furono notevoli, seguiti tuttavia, come spesso avviene, da una fase di diminuito impulso se non anche di disillusione, che termina verso la fine degli anni '60: da allora la teoria dei giochi ha avuto uno sviluppo straordinario, ampliando tra l'altro notevolmente la sua sfera d'influenza, ben al di là dell'economia. Per dare un'idea del significato che la TdG ha avuto per la teoria economica, fin dagli esordi, può essere sufficiente ricordare, da un lato, l'analisi del problema di contrattazione fatto da Nash già nel 1950, oppure la dimostrazione che (sotto opportune ipotesi, naturalmente) il modello di Walras di equilibrio economico generale ammette soluzione: risultato pubblicato nel 1954, e provato da Arrow e Debreu tramite la trasformazione del problema dato in un "gioco" di cui essi provano l'esistenza di un equilibrio (utilizzando risultati precedenti di Nash e di Debreu). Adesso, la situazione è tale per cui alcune parti dell'economia (si pensi alla "organizzazione industriale", od alla economia dell'informazione) potrebbero essere definite come TdG applicata.

Un aspetto importante dello sviluppo della TdG è dato anche dalla sua capacità di uscire fuori dall'ambito delle applicazioni di carattere strettamente economico. Laddove il paradigma del decisore razionale ed intelligente può essere proposto come chiave interpretativa, è naturale aspettarsi che la TdG possa intervenire: mi riferisco alle scienze sociali in senso lato (scienza politica, ma anche sociologia, legge, per arrivare a problematiche tipiche della "ragion pratica", in primis l'etica). Ma l'espansione della TdG è andata ancora al di là di questo ambito, come è naturale aspettarsi per una disciplina che ha un nucleo matematico-formale: così assistiamo alla applicazione della TdG a contesti quali la biologia evoluzionistica, in cui viene a cadere, quanto meno, l'assunzione di decisori intelligenti, e si applicano i metodi della TdG (convenientemente adattati) alla competizione interspecifica o intraspecifica, per comprendere i comportamenti "sociali" di alcune specie di ragni, o il mutuo reciproco adattamento competitivo tra fiori ed insetti impollinatori. Effetto di tutto ciò è che la TdG è ormai una disciplina molto vasta, sia per "corpus" di risultati formali, che per latitudine di applicazione, per cui è ormai difficile essere aggiornati sul complesso dei suoi sviluppi: la sensazione che ho è che sia in corso una frammentazione di questa disciplina, per cui potrebbe avverarsi quanto congetturato da Aumann (ed espresso nel convegno mondiale di Bilbao del 2000), ovvero che si possa perdere quella sostanziale unitarietà metodologica che ha comunque caratterizzato finora la TdG.

L'articolazione di questo libro è tradizionale, simile a quella di molti manuali. I primi capitoli sono finalizzati a presentare i modelli di base della TdG e le principali "soluzioni" che sono state proposte per le situazioni di interazione strategica (ampio spazio viene dedicato all'idea di equilibrio di Nash). Saranno messi in evidenza anche i problemi tipici, cruciali che presenta l'equilibrio di Nash: in particolare, la possibile inefficienza del risultato finale (l'archetipo è il dilemma del prigioniero, ma anche la "tragedia dei commons" rientra in questa tematica), oltre alle difficoltà che emergono qualora un gioco abbia più equilibri. Segue poi un capitolo dedicato ai cosiddetti "giochi ripetuti", il quale illustra, tra le altre cose, come (e sotto quali condizioni) possano essere ottenuti risultati efficienti qualora l'interazione strategica tra due soggetti abbia luogo ripetutamente. I due capitoli successivi costituiscono un allontanamento rispetto alle assunzioni classiche: nel capitolo dedicato ai giochi ad informazione incompleta si allentano le fortissime ipotesi di carattere informativo che vengono presupposte nel contesto classico; nel capitolo successivo si mettono in evidenza alcuni modelli che sono caratterizzati da un indebolimento delle assunzioni di razionalità e di intelligenza "illimitate". Col capitolo dedicato alla contrattazione e con quello dedicato ai giochi cooperativi, si ritorna all'interno della TdG classica, per illustrare i punti salienti dei giochi "cooperativi", mentre i capitoli precedenti erano tutti nel contesto dei giochi "non cooperativi". Questa distinzione fra giochi "cooperativi" e "non cooperativi", sta ad indicare, rispettivamente, la possibilità o meno per i giocatori di sottoscrivere accordi *vincolanti*. Per dare un'idea di quanto questa distinzione sia significativa, basta notare come la possibilità di accordi vincolanti elimini alla radice il problema di inefficienza che si presenta nel "dilemma del prigioniero". Ai due capitoli dedicati ai giochi "cooperativi" segue poi un capitolo, breve, con la pretesa di illustrare la TdG "al lavoro", cosa che verrà fatta nell'ambito di tre problemi di cui ho avuto occasione di occuparmi personalmente. La collocazione del capitolo è anche dovuta al fatto che questi tre casi sono stati affrontati con gli strumenti dei giochi "cooperativi". Segue infine un capitolo di conclusioni (provvisorie, naturalmente!) che cerca un poco di fare il punto sullo status della TdG, su dove "sta andando" la TdG e anche su dove dovrebbe andare, a mio parere. Il libro si chiude con due capitoli: l'ultimo è tradizionale, ed è la bibliografia, che vuole anche offrire una piccola guida per chi volesse approfondire lo studio della TdG; il penultimo capitolo non è affatto tradizionale per un libro con intenzioni divulgative: si tratta di una piccola raccolta di problemi, che vengono offerti più che altro come stimolo alla riflessione per chi volesse affrontarli. Non ci sono "soluzioni" per questi problemi: taluni sono quasi delle "provocazioni" per il lettore. Come detto nella prefazione, la pagina web associata a questo libro ospiterà una selezione delle risposte e dei commenti che venissero inviati.

Capitolo 2

Giochi in forma strategica ed in forma estesa

Proponiamoci di affrontare un problema di interazione strategica. Cominciamo, seguendo l'insegnamento di von Neumann e Morgenstern (1994), con un gioco vero e proprio: il "pari o dispari". Come è ben noto, esso prevede due giocatori, che indicherò convenzionalmente come I e II: essi dichiarano contemporaneamente la loro scelta, che può essere "pari" oppure "dispari". Se la dichiarazione che fanno è identica, vince il giocatore II, sennò vince il giocatore I. E' facile ed anche utile rappresentare tutto questo in forma tabellare: vedi tabella 2.1.

I \ II	pari	dispari
pari	vince II	vince I
dispari	vince I	vince II

Tabella 2.1: Tabella per il "pari o dispari"

Chiaramente questo semplice gioco presenta numerosi vantaggi, per chi lo voglia analizzare, rispetto ad una situazione di interazione più complessa (ma anche più interessante, probabilmente). Ad esempio, è chiaro chi sono i decisori coinvolti: sono quelli che ho chiamato I e II. E' chiaro quali sono le scelte che hanno a disposizione: più precisamente, possiamo notare che sia I che II possono scegliere tra "pari" e "dispari"; le regole del gioco prevedono che le scelte vengano fatte contemporaneamente dai due giocatori. Sono anche ben definiti i risultati che derivano dalle loro scelte: "vince I" oppure "vince II". In effetti, l'idea di von Neumann e Morgenstern di cominciare l'analisi delle situazioni di interazione strategica dai giochi "da tavolo", trae forza proprio dal fatto che in questa categoria di giochi le regole sono generalmente ben codificate.

Abbiamo visto la descrizione di un semplice esempio. Volendo procedere, dobbiamo chiederci quali riteniamo siano gli ingredienti essenziali, quali finalità abbiamo (osservo come tutto ciò abbia già certamente contribuito alla scelta dell'esempio stesso ed alla sua modellizzazione). Va detto, allora, che non siamo interessati a sapere quali vestiti indossino i giocatori, magari per capire se vi sono particolari influssi culturali sul loro modo di giocare; non siamo interessati a misurare la sudorazione delle loro mani, per decifrare il grado di coinvolgimento emotivo che loro hanno nel gioco, etc. Ci interessano, di questa situazione, gli aspetti riconducibili alla trattazione di giocatori *razionali* ed *intelligenti*. Mi occuperò oltre del termine "razionale"; per quanto riguarda la qualifica di "intelligente", noto che non vogliamo sapere cosa possa fare un giocatore che ha difficoltà a seguire un ragionamento logico, né ci interessa sapere quale sia il comportamento di un giocatore distratto: i giocatori devono essere interessati ad analizzare la situazione usando al massimo le loro capacità intellettive, che assumiamo siano corrispondenti almeno alle migliori disponibili per gli esseri umani. Come mostrano queste note iniziali, vi sono una serie di particolari che, come è ovvio, meriterebbero attenzione nell'analizzare una situazione di interazione strategica, ma che verranno trascurati. E' molto importante, quando ci si accosta ad una disciplina, avere presenti i suoi limiti, oltre che i suoi meriti. Come si può notare, ripensando per un momento al modellino da cui siamo partiti, la descrizione che sopra è stata fatta dei suoi "ingredienti" fondamentali, rifletteva e prefigurava il tipo di approccio appena descritto.

Va fatta ancora una precisazione estremamente importante, per delimitare il quadro di intervento della TdG: osservo incidentalmente che questa precisazione è già implicita nell'aver fatto riferimento ai giocatori "razionali ed intelligenti". Ignoreremo completamente la possibilità di altri approcci per capire cosa faranno i giocatori: non guarderemo ai giocatori come un sistema chimico/fisico da descrivere con gli strumenti che ci mette a disposizione la scienza al suo livello attuale di sviluppo. Né chiederemo aiuto alla neurologia, alla fisiologia del sistema nervoso, o simili: non cercheremo di descrivere i processi mentali dei giocatori, utilizzando questi strumenti di conoscenza. Perché tutto questo? Perché al momento attuale queste conoscenze scientifiche non ci sarebbero di aiuto, anche se un maggiore coinvolgimento sarebbe auspicabile, quanto meno per verificare "convergenze"[1]. Ci è più utile un approccio "teleologico", che mi appresto a descrivere.

[1] A dire il vero, è in corso un processo di avvicinamento, testimoniato dal diffondersi di studi che cercano di utilizzare strumenti di analisi quali la PET per individuare le zone del cervello coinvolte in vari tipi di processi decisionali.

Avendo scartato un intervento diretto delle scienze naturali, ci rimane il problema di sapere cosa dovrebbero fare i giocatori, ovverossia quale possa essere la scelta che ci aspettiamo che facciano, ed anche quale sia la scelta che potremmo indicare a loro, se ce lo chiedessero[2]. In un certo senso, questi sono i problemi essenziali della teoria dei giochi. Sarà quindi importante capire che non possiamo dare alcuna risposta a queste domande, finché non abbiamo esplicitato un elemento essenziale, anche se nel giochino che stiamo esaminando potrà sembrare ovvio. Occorre aggiungere un ingrediente alla descrizione fatta finora, senza il quale non avremo un "gioco" nel senso tecnico del termine, ma solo ciò che viene chiamato "game form": occorre indicare quali siano le preferenze dei giocatori rispetto agli esiti del gioco. Ovviamente gli esiti possibili di questo gioco sono due: "vince I" e "vince II". Possiamo ritenere scontato che un giocatore "normale" preferisca vincere anziché perdere. Ma non c'è bisogno di fare questa ipotesi che, si badi bene, non consegue affatto dalle assunzioni di razionalità ed intelligenza dei giocatori. Ciò di cui abbiamo bisogno è conoscere le preferenze dei giocatori rispetto agli esiti e di queste preferenze non possiamo fare altro che prenderne atto. Vi sono dei casi in cui un giocatore preferisce perdere anziché vincere: il mio esempio preferito è quello della nonna che gioca a carte con un nipotino capriccioso. Detto questo, va comunque messo in evidenza come, in casi in cui gli esiti del gioco sono più complessi, non possiamo proprio avere alcuna idea a priori su quali possano essere le preferenze dei giocatori. Insomma, le preferenze dei giocatori non sono deducibili dalle "regole del gioco", bensì sono un elemento aggiuntivo, esterno ad esse. Il fatto di avere preferenze sugli esiti del gioco è un ingrediente essenziale del cosiddetto "giocatore razionale". Vedremo, nel prossimo capitolo, di specificarne ulteriormente le caratteristiche.

Volendo trovare la collocazione della TdG all'interno dei filoni del pensiero scientifico, si può notare che la "scorciatoia" che utilizziamo è basata sul paradigma della economia neoclassica[3], il che mostra anche la profonda commistione fra la TdG e l'analisi economica. Descrivere l'individuo come portatore di preferenze che assumiamo essere date e sulla base di quelle dedurre quale possa essere il suo comportamento, mettendo al centro dell'attenzione gli aspetti di razionalità ed intelligenza, trascurando invece altri aspetti o determinanti del comportamento umano: si sente il "profumo" della famosa descrizione data da Lionel Robbins[4] su cosa sia l'oggetto di analisi della scienza economica. Si no-

[2]Si noti che questo aspetto di carattere normativo appare proprio perché abbiamo scelto di privilegiare un approccio diverso da quello standard delle scienze naturali.

[3]Anticipata dalla "Scuola di Salamanca"? Diego de Covarrubias y Leiva sembra esprimersi in termini estremamente "moderni", quando parla delle stime dei beni da parte degli uomini, che si debbono prendere come sono date, e dalle quali discende il valore dei beni.

[4]L'economia è la scienza che studia la condotta umana come una relazione tra scopi e mezzi scarsi applicabili ad usi alternativi.

ti, tra l'altro, la mancanza di riferimenti alle date condizioni storiche e quindi l'implicita pretesa di universalità, altra caratteristica distintiva dell'approccio neoclassico rispetto a quello classico: manca solo l'accento sui vincoli che il decisore percepisce sulle proprie azioni, ma solo perché questi sono implicitamente considerati quando si va a vedere l'ampiezza delle scelte disponibili per il giocatore. Naturalmente, e questo è un fatto rilevante, spariscono quei vincoli i quali non avevano altra funzione che di incorporare, di riassumere, gli effetti complessivi delle scelte di altri decisori (ad esempio, il "vincolo di bilancio" dipende dal prezzo di mercato: ma questo è conseguenza cumulata delle azioni di altri decisori). Si deve all'accettazione di questo paradigma la duplice veste, normativa e positiva, della teoria. Sul lato "positivo", non occupandosi di tutte le dimensioni dell'essere umano, essa potrà ottenere risultati attendibili (se tutto va bene!) solo nel caso in cui gli aspetti "altri" non giochino un ruolo significativo. Allo stesso tempo, il ruolo normativo: cosa dovrebbe fare il "vero decisore razionale ed intelligente". Vedremo come questo programma non sia particolarmente agevole: la TdG si scontra con difficoltà di ordine superiore rispetto all'analisi del decisore preso "in isolamento" (il Robinson Crusoe che tante pagine di teoria economica ha riempito).

Vorrei ricordare come il paradigma neoclassico del decisore razionale ed intelligente, là dove riteniamo sia applicabile, offre uno "shunt" per poter fare previsioni sullo svolgersi e sull'esito di processi di interazione decisionale, senza aprire la "scatola nera" costituita dalla struttura interna del decisore. Allo stesso tempo, questo paradigma introduce, rispetto alle scienze naturali, un aspetto del tutto nuovo, ovverossia quello normativo. Nessuno si sogna di dire ad un fotone che cosa sia per "lui" più conveniente fare, visto che l'aspetto teleologico è completamente assente dalle scienze naturali (si pensi al valore di questa acquisizione in un contesto quale quello dell'evoluzione, o dell'ecologia: affermazioni come quelle relative all'armonia della natura sono ormai relegate ai romanzi d'appendice o al loro equivalente moderno). La scorciatoia che viene seguita dalla TdG offre invece lo spazio per considerazioni normative. Non è, del resto, l'unica disciplina che viola i confini tradizionali delle scienze naturali, pur ambendo comunque ad uno statuto scientifico: oltre che nelle cosiddette scienze umane, ritroviamo questi aspetti, ad esempio, nella descrizione dei processi mentali o nella psicoanalisi.

Ora che è stato sommariamente delineato il quadro generale di riferimento, torniamo al nostro "pari o dispari" e vediamo in dettaglio come la TdG modellizza questa situazione di interazione strategica. Vi sono, innanzi tutto, gli ingredienti oggettivi: l'insieme delle strategie a disposizione del primo giocatore, l'insieme di quelle a disposizione del secondo e gli esiti che si hanno in corrispondenza delle scelte operate congiuntamente da I e da II.
Formalmente, abbiamo: (X, Y, E, h), dove con X indichiamo l'insieme delle scelte a disposizione del giocatore I, con Y quello per II, mentre E rappre-

senta l'insieme dei possibili esiti derivanti dalle scelte di I e II. Infine, la funzione $h : X \times Y \to E$ ci dice come le scelte operate da I e II si traducono in esiti. Nel nostro esempio, è $X = \{\text{pari, dispari}\}$ ed Y è identico[5]: $Y = \{\text{pari, dispari}\}$. L'insieme E è $\{\text{vince } I, \text{ vince } II\}$; infine, la funzione h la ricaviamo dalla tabella 2.1. Ad esempio, $h(\text{pari, dispari}) = \text{vince } II$. Si noti che tutto questo, come anticipato, non è ancora un gioco, nel senso tecnico usato in TdG, ma è quello che viene chiamato "game form" o "meccanismo". Vedremo tra breve cosa sia un "gioco" in termini formali. Prima vorrei introdurre un altro esempio.

Visto che la TdG ambisce ad occuparsi di cose un po' più serie che non il "pari o dispari", presenterò un esempio di natura economica, anche se molto schematico. Si tratta di un classico: il modello di duopolio di Cournot. Abbiamo due aziende che producono lo stesso bene, venduto sullo stesso mercato. Ogni azienda ha dei costi di produzione che per semplicità assumeremo essere lineari: il costo per produrre la quantità q è pari a Cq (si noti: assumiamo che il coefficiente C, che rappresenta i costi unitari, sia lo stesso per entrambe le aziende). Il ricavo per un'azienda è dato da quanto riesce a vendere sul mercato. Assumiamo che il ricavo sia pari a Pq, dove P è il prezzo unitario vigente (sto assumendo piena identità tra la quantità prodotta e quantità venduta: avevo detto che si tratta di un esempio molto schematico!). Questa assunzione viene resa più accettabile dall'ipotesi che il prezzo P dipenda dalla quantità totale di prodotto immessa sul mercato. Assumerò che sia $P(q_1, q_2) = a - (q_1 + q_2)$, dove q_1 e q_2 sono le quantità prodotte dalle due aziende (identificate convenzionalmente come azienda "1" e come azienda "2"). Tutto ciò, se la quantità totale prodotta non supera a: altrimenti, il prezzo di mercato sarà 0. L'interpretazione del parametro esogeno a è quella di una soglia al di là della quale il mercato è saturo, cosa che rendiamo con l'assunzione, un po' drastica, che il prezzo di vendita diventi zero.

Abbiamo a questo punto tutti gli elementi per descrivere la "game form". Lo spazio delle strategie, cioè l'insieme delle quantità che può decidere di produrre, è, per ciascuna impresa, l'insieme dei numeri reali non negativi, cioè $[0, \infty[$. La funzione $h : [0, \infty[\times [0, \infty[\to \mathbb{R}^2$ è così definita: $h(q_1, q_2) = (q_1 P(q_1 + q_2) - Cq_1, q_2 P(q_1 + q_2) - Cq_2)$. Come si vede, il "risultato" delle scelte delle due aziende è una coppia di numeri, che indicano il guadagno *monetario* per ciascuna delle aziende.

Ciò che rende interessante per noi questo esempio, per quanto stilizzato, è la situazione di interazione strategica, dovuta al fatto che il risultato (in questo caso, il guadagno) di ciascuna impresa dipende non solo dalle proprie scelte

[5] X ed Y sono identici perché ho scelto io, modellizzatore, di non tenere conto di dettagli che ritengo non essenziali per la mia analisi. Se fosse utile, potrei rendere esplicita una condizione lasciata sottintesa e scrivere: $X = \{I \text{ sceglie pari}, \ I \text{ sceglie dispari}\}$ e $Y = \{II \text{ sceglie pari}, \ II \text{ sceglie dispari}\}$.

ma anche dalla scelta dell'altra azienda, per via dell'effetto che la quantità *totale* prodotta ha sul prezzo di vendita. Ribadisco, a costo di essere noioso, che quanto abbiamo finora descritto identifica la “game form”. Per avere un gioco, dobbiamo aggiungere le preferenze dei giocatori rispetto agli esiti del gioco. Quando viene presentato questo modello di oligopolio iper-semplificato, solitamente si assume che le preferenze dei giocatori siano “banali”: ciascuna delle due aziende preferisce guadagnare di più che di meno.

Ritorniamo al modello generale. Sappiamo come descrivere in termini formali una “game form”, che è identificata da (X, Y, E, h). Vediamo come passare ad un gioco vero e proprio, soffermandoci sul giocatore I. Dati due elementi e_1 ed e_2 di E, lui deve essere in grado di dire se preferisce e_1 ad e_2 o viceversa (gli è anche consentito dire che è indifferente tra i due). Useremo il simbolo $\sqsupset_I$ per indicare le preferenze del giocatore I. Vale a dire, se preferisce l'esito e_1 all'esito e_2, indicheremo con $e_1 \sqsupset_I e_2$ questo fatto. E' anche comodo avere a disposizione un simbolo per indicare la “preferenza debole”: ovverossia scriveremo $e_1 \sqsupseteq_I e_2$ per indicare che il giocatore I preferisce e_1 ad e_2 od è indifferente tra loro.

Abbiamo a questo punto arricchito il nostro modello che, in termini formali, sarà: $(X, Y, E, h, \sqsupseteq_I, \sqsupseteq_{II})$. Vedremo tra breve come semplificare un poco questa rappresentazione ma, prima di farlo, vale la pena di notare una cosa. La tabella che abbiamo usato per il “pari o dispari” non contiene alcuna informazione sulle preferenze dei giocatori. Se vogliamo rappresentare in forma di tabella non solo una “game form”, ma anche un gioco, dobbiamo trovare un modo per descriverle. Come? Di espedienti grafico-pittorici ne possiamo inventare vari. Ad esempio, potremmo usare delle frecce per indicare le preferenze dei giocatori. Vi è una piccola complicazione dovuta al fatto che i giocatori sono due. Ma basterà usare due tipi diversi di frecce. Ad esempio, la freccia $\rightarrow$ per indicare le preferenze di I e $\rightrightarrows$ per II. Nel nostro caso, se I è un giocatore “normale”, egli preferirà “vince I” a “vince II”. E allora descriveremo simbolicamente questo fatto così: “vince II” $\rightarrow$ “vince I”; farà comodo usare anche $\leftarrow$ col quale potremo dire la stessa cosa come “vince I” $\leftarrow$ “vince II” e servirà anche il simbolo $\leftrightarrow$ per indicare l'indifferenza. Per II, come detto useremo invece $\rightrightarrows$ (e $\leftleftarrows$, $\leftrightarrows$). Otterremo così la seguente tabella, di interpretazione ancora ragionevolmente agevole:

I \ II	pari		dispari
pari	vince II	$\rightarrow \leftleftarrows$	vince I
	$\downarrow\ \uparrow\uparrow$	⤢ ⤢⤢ ⤡ ⤡⤡	$\uparrow\ \downarrow\downarrow$
dispari	vince I	$\leftarrow \rightrightarrows$	vince II

Non è questo l'unico modo che abbiamo a disposizione, per fortuna. Perché, all'aumentare del numero delle strategie a disposizione dei giocatori, questa rappresentazione in forma tabellare diventa praticamente ingestibile. Un altro modo potrebbe consistere nell'utilizzare diverse gradazioni di colore per indicare graficamente le preferenze dei due giocatori. Per esempio, si può usare il rosso per il giocatore I e adottare la convenzione che la metà sinistra della casella viene colorata di rosso per indicare le preferenze di I e quella destra di blu, intendendo inoltre che, se una casella ha una colorazione di rosso più forte di un'altra, questo vuol dire che il giocatore I preferisce l'esito indicato nella prima casella a quello nella seconda. Neppure questa strada, comunque, ci può portare molto lontano, visto che potremmo essere obbligati a discernere fra troppe tonalità di rosso o di blu, più di quanto non ce lo possano consentire i nostri sensi.

Non è necessario, comunque, dare fondo a tutte le nostre doti di fantasia per rappresentare le preferenze dei giocatori. Sarà sufficiente usare una vecchia invenzione, che dimostra anche in questa situazione la sua prodigiosa efficacia: sto parlando dei numeri... Ovvero, introdurre le "funzioni di utilità" per i giocatori. Le descriverò soffermandomi sul giocatore I. Abbiamo detto che lui ha delle preferenze su E, che abbiamo indicato col simbolo $\sqsupset_I$. Se riusciamo a trovare una funzione $u : E \to \mathbb{R}$ tale che:

$$u(e_1) > u(e_2) \quad \text{se e solo se} \quad e_1 \sqsupset_I e_2,$$

allora diciamo che questa funzione u "rappresenta le preferenze del giocatore I", od anche che è una "funzione di utilità per il giocatore I". Nel nostro esempio è facile trovarne una. Se il giocatore I preferisce "vince I" a "vince II", sarà sufficiente definire $u(\text{vince } I) = 1$ e $u(\text{vince } II) = -1$. Si noti che i valori assegnati ad u non sono obbligati. Possiamo anche definire $u(\text{vince } I) = 87$ ed $u(\text{vince } II) = 11$. L'unica cosa essenziale è che venga soddisfatta la condizione che $u(\text{vince } I) > u(\text{vince } II)$. Ritorneremo più diffusamente su preferenze e funzioni di utilità nel prossimo capitolo. Per ora ci accontentiamo di questi pochi elementi, essenziali per la modellizzazione.

Naturalmente quanto fatto per I lo possiamo fare anche per il giocatore II. Ad esempio, supposto che lui preferisca "vince II" a "vince I", possiamo definire $v(\text{vince } I) = -1$ e $v(\text{vince } II) = 1$. In questo modo ad ogni cella della tabella 2.1 abbiamo associato una coppia di numeri. Otteniamo quindi la tabella 2.2, nella quale ogni cella contiene due numeri i quali rappresentano i valori che le funzioni di utilità rispettivamente di I e di II assumono in corrispondenza dell'evento individuato da quella cella. Si noti che la tabella 2.2 individua due funzioni reali definite su $X \times Y$. Abbiamo $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ i cui valori leggiamo guardando il numero a sinistra nelle celle, e $g : X \times Y \to \mathbb{R}$ che è individuata dai numeri che si trovano nella parte destra delle celle. Ad esempio, $f(\text{pari}, \text{dispari}) = 1$ e $g(\text{pari}, \text{dispari}) = -1$. Volendo, per maggiore sinteticità possiamo anche usare P e D al posto di "pari" e "dispari": così scriveremmo $f(P, D) = 1$ e $g(P, D) = -1$. Ebbene, la tabella 2.2 contiene gli elementi essenziali del gioco, che potrà quindi essere descritto come (X, Y, f, g).

I \ II	pari	dispari
pari	$-1, 1$	$1, -1$
dispari	$1, -1$	$-1, 1$

Tabella 2.2: Il gioco del "pari o dispari"

Conviene fare un diagramma per comprendere la semplificazione che è stata fatta. I nostri dati erano $X, Y, E, h, \sqsupseteq_I, \sqsupseteq_{II}$, che poi abbiamo trasformato in X, Y, E, h, u, v introducendo le funzioni di utilità per i giocatori. Questi dati li possiamo rappresentare col seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{R} \\
X \times Y \arrow[r, "h"] & E \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"] & \\
 & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Con l'introduzione delle funzioni f, g (si noti che f non è altro che la composizione delle due funzioni h ed u, ed analogamente g è la composta di h e v) otteniamo invece questo:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{R} \\
X \times Y \arrow[r, "h"] \arrow[urr, "f"] \arrow[drr, "g"'] & E \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"] & \\
 & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

che poi semplifichiamo cancellando la parte centrale (ovverossia, E, h, u, v):

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \\
X \times Y \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\
 & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Otteniamo così gli elementi essenziali per descrivere il gioco, cioè (X, Y, f, g).

Il lettore attento si chiederà se non stiamo usando implicitamente qualche ipotesi per poter fare questa semplificazione (detto in altri termini: non stiamo rischiando di eliminare dal modello qualche elemento essenziale?). La risposta è che stiamo sfruttando un principio standard della teoria delle decisioni e, per estenso, della TdG: il principio di consequenzialismo. Ovverossia, ciò che è rilevante per il decisore sono le conseguenze delle sue azioni, delle sue scelte. Quindi, che venga adottata una coppia di strategie (x_1, y_1) oppure (x_2, y_2) non fa nessuna differenza, per i giocatori, purché diano luogo alle stesse conseguenze: vale a dire, purché si abbia $h(x_1, y_1) = h(x_2, y_2)$ (si noti come da questo segua automaticamente che $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ ed anche $g(x_1, y_1) = g(x_2, y_2)$). Se questo non fosse vero, non potremmo "cancellare" h ed E. Si noti che f, g non fanno altro che riprodurre su $X \times Y$ le preferenze dei nostri due decisori rispetto alle conseguenze, rileggibili (e di fatto rilette) in termini di coppie di azioni.

Osservo, a questo proposito, che un discorso perfettamente analogo a quello appena visto per u, v, f e g può essere fatto a livello delle preferenze dei giocatori. Ad esempio, date le preferenze $\sqsupseteq_I$ del giocatore I su E, possiamo definire una relazione su $X \times Y$ nel modo seguente:

$$(x_1, y_1) \succeq_I (x_2, y_2) \quad \text{se e solo se} \quad h(x_1, y_1) \sqsupseteq_I h(x_2, y_2)$$

Lo stesso possiamo fare per II. Così facendo, possiamo definire un gioco come $(X, Y, \succeq_I, \succeq_{II})$, anziché $(X, Y, E, h, \sqsupseteq_I, \sqsupseteq_{II})$, con lo stesso tipo di riduzione che abbiamo visto a livello dei payoff. Possiamo anche osservare che, per il modo in cui è stata fatta la costruzione, la funzione f è una funzione di utilità che rappresenta $\succeq_I$ (e similmente g rappresenta $\succeq_{II}$).

Ora che abbiamo il quadro di riferimento, possiamo descrivere anche il problema di duopolio come gioco. Nel farlo, come si fa abitualmente assumeremo che le preferenze di ciascuna delle due imprese corrispondano esattamente ai propri guadagni. Questo significa che le funzioni u e v, che trasformano gli esiti del gioco in valori di utilità, possono essere scelte entrambe come l'identità: $u(x) = v(x) = x$. Quindi il modello è: $([0, \infty[, [0, \infty[, f, g)$, dove $f(q_1, q_2) = q_1 P(q_1 + q_2) - Cq_1$ e $g(q_1, q_2) = q_2 P(q_1 + q_2) - Cq_2$.

Alla descrizione, alla modellizzazione che abbiamo fatto, proprio per le scelte effettuate, dobbiamo ancora aggiungere un elemento essenziale. Finora abbiamo analizzato la situazione di interazione strategica come osservatori "esterni". Ma, visto che poi le decisioni saranno prese dai giocatori e non da "noi", è chiaro che conta sapere cosa i giocatori stessi conoscano della situazione nella quale si trovano ad operare. Ebbene, l'ipotesi standard che si fa è che i giocatori conoscano la situazione, esattamente come noi l'abbiamo rappresentata. Attenzione, però: questo non basta. Proprio perché i decisori coinvolti sono intelligenti, per effettuare le loro scelte non solo è per loro rilevante conoscere la situazione, ma anche sapere che gli altri la conoscono. E così via: sapere che tutti sanno che tutti sanno, etc. Assumeremo la validità di tutti questi enunciati, in modo da avere quello che tecnicamente viene detto "conoscenza comune" (Lewis (1969)) del modello. Di ciò, comunque, parleremo nel prossimo capitolo, in quanto è specificamente rilevante dal punto di vista della ricerca delle "soluzioni". A questo proposito, probabilmente il lettore vorrebbe avere qualche indicazione non solo su come descrivere una situazione di interazione strategica, ma anche su come la si possa "risolvere". Lo invito però ad avere un poco di pazienza. Pur se difficilmente la scelta di un modello è indipendente dalla soluzione che se ne ha in mente, o più in generale da quali operazioni o manipolazioni si pensa di farne, preferisco procedere nella modellizzazione delle situazioni di decisione interattiva, rinviando al capitolo seguente il tentativo di "soluzione".

Vorremmo avere a disposizione un modello generale per trattare le situazioni in cui più decisori si trovano ad interagire. E' pertanto semplicemente doveroso cercare di trovare una modellizzazione che sia sufficientemente flessibile, ed alcune necessità di generalizzazione sono ovvie rispetto a quanto abbiamo visto finora. Ad esempio, come descrivere la presenza di più di due decisori? Questo è abbastanza facile da realizzare. Supponiamo che l'insieme N dei decisori sia finito, e per semplicità assumiamo che i decisori siano identificati semplicemente come $1, \ldots, n$ (detto altrimenti, supponiamo che sia $N = \{1, \ldots, n\}$). Per ogni $k \in N$ indichiamo con X_k l'insieme delle scelte a disposizione del decisore k. Dopodiché avremo per ogni k anche una funzione f_k che valuta, per il decisore k, le conseguenze che derivano dal complesso delle scelte operate da tutti i decisori. Ovverossia, dato $x_i \in X_i$ per ogni $i \in N$, cioè dato $(x_1, \ldots, x_n)$, avremo $f_k(x_1, \ldots, x_n)$. In breve, il modello per un insieme finito di giocatori $N = \{1, \ldots, n\}$ è il seguente: $(N, (X_k)_{k \in N}, (f_k)_{k \in N})$, dove $f_k : \prod_{k \in N} X_k \to \mathbb{R}$. Si noti che ho "bypassato" la descrizione della "game form", delle preferenze e delle funzioni di utilità: non dovrebbe essere difficile, per chi lo voglia, ricostruire questi elementi. Vorrei fare ancora una osservazione: ho ribadito un paio di volte il fatto che N è un insieme finito. Per noi sarà sufficiente, ed elimina problemi nella trattazione matematico-formale. Ma non è da ritenersi una scelta "obbligata", sulla base della considerazione banale che di decisori (intesi come esseri umani) sulla Terra ve ne sono un numero finito. Ciò non deve stupire: nel caso in cui il numero di decisori sia molto grande, può essere molto più efficace modellizzare la situazione supponendo che l'insieme dei decisori sia infinito. Non solo questa è una prassi consueta in moltissimi campi della scienza, ma l'uso di modelli che assumono un numero di decisori infiniti ha permesso di ottenere risultati di particolare interesse, il più famoso dei quali è la soluzione della congettura di Edgeworth (Aumann, 1964).

Il modello finora introdotto sembra avere un altro limite: è adatto per descrivere una situazione in cui i decisori effettuino le loro scelte contemporaneamente, mentre non pare possa essere utilizzato qualora si vogliano analizzare situazioni di decisioni interattive strutturate temporalmente. Se uno pensa ai vari giochi da carte o da tavolo, tipicamente questi prevedono più mosse successive da parte dei giocatori. Ma anche situazioni più serie, che sono ovviamente il nostro obiettivo di analisi principale, hanno spesso una struttura temporale delle decisioni: si pensi alle offerte e contro-offerte durante una contrattazione, oppure ad un'asta, alle decisioni prese giornalmente in una impresa, alla stipula ed esecuzione di un contratto, etc. Naturalmente, non ci sarebbe da stupirsi se poi alla fine questa struttura temporale si rivelasse poco significativa: è tipico della scienza offrire punti di vista che si discostano anche radicalmente da quanto appare ad un osservatore non avvertito (basti pensare a quanto sia contrario all'esperienza "normale" il principio d'inerzia). Ciò detto, non possiamo però naturalmente esimerci dall'esaminare queste situazioni in cui sono presenti decisioni strutturate temporalmente. Sarà casomai il risultato finale dell'analisi a dirci che il ruolo del tempo è irrilevante.

Così come abbiamo cominciato col "pari o dispari", vediamo di analizzare un problema di decisione che sia di nuovo particolarmente semplice e che abbia delle regole ben codificate, per poi giungere al modello di gioco in forma estesa. Seguendo una tradizione consolidata, ci occuperemo di una delle tante varianti possibili del gioco dei fiammiferi.

Il gioco è questo: abbiamo 4 fiammiferi sul tavolo, allineati uno accanto all'altro. I due giocatori si alternano nelle mosse. Ogni volta, un giocatore può togliere uno oppure due fiammiferi; perde chi lascia il tavolo vuoto (chi vuole, può provare questo gioco sulla pagina collegata a questo libro). Come possiamo rappresentare questa situazione? La cosa più naturale, ben nota in teoria delle decisioni, è di utilizzare un espediente di carattere grafico: l'albero delle decisioni. WEB

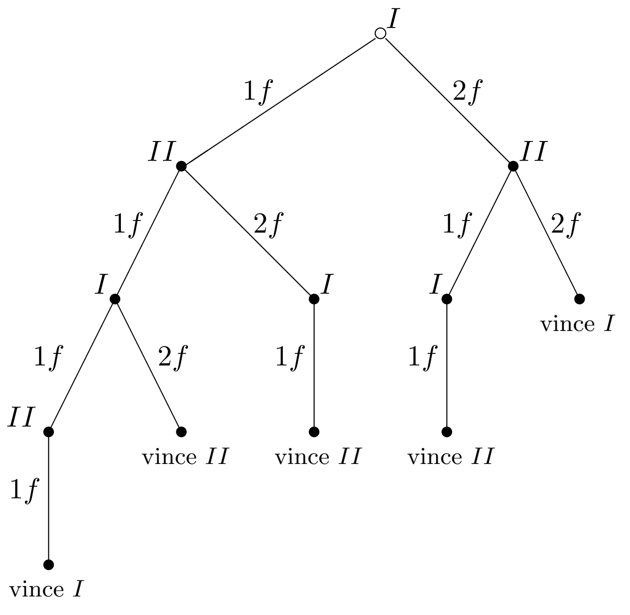


Figura 2.1: L'albero del "gioco dei fiammiferi"

L'albero mostrato in figura 2.1 descrive compiutamente gli elementi essenziali: chi sono i giocatori, quale è il punto d'inizio (evidenziato in figura col pallino "vuoto"), quando tocca giocare (i vari pallini neri) e a chi (il simbolo I o II posto vicino al pallino), quali sono le opzioni che hanno di volta in volta (chiaramente $1f$ indica "togliere un fiammifero" e $2f$ indica "togliere due fiammiferi") e quali conseguenze dirette hanno, quali sono i risultati finali (e quindi anche, implicitamente, quando il gioco è finito).

Vale la stessa osservazione fatta in precedenza per il gioco del "pari o dispari": quest'albero descrive la "game form" o meccanismo. Dobbiamo ancora una volta aggiungere un elemento importante alla descrizione: quali siano le preferenze dei due giocatori rispetto ai risultati finali. Non vi sono però particolari novità rispetto a quanto abbiamo già visto. Tutt'al più, si può notare che in casi di interazione strategica che si svolgono nel tempo si possono avere degli "esiti parziali". Noi adotteremo un semplice espediente per trattare questi casi: dato un gioco "concreto", nella nostra rappresentazione chiameremo "esito finale" non soltanto ciò che avviene al termine del gioco, ma la descrizione completa di tutti quanti gli esiti parziali (se ve ne sono) che si incontrano sul percorso dal nodo iniziale ad un nodo terminale del processo. In tale modo potremo davvero condensare nel vertice finale tutta l'informazione raccolta lungo il cammino[6]. Ad esempio, ad un nodo terminale potremmo associare questo "esito finale": "il giocatore I al nodo x ha guadagnato 6 euro; il giocatore II al nodo y ha perso 2 euro e nel nodo terminale z nessuno guadagna o perde nulla". Naturalmente, i nodi x ed y saranno nodi sul percorso che porta dal nodo iniziale al nodo terminale in questione, che sarà z.

A questo punto, alcune domande si impongono. Cominciamo dalla più ovvia: questo modello di gioco può essere messo in relazione col precedente, e come? La risposta è positiva. Vedremo dapprima l'aspetto più interessante della questione, ovverossia come tradurre questa rappresentazione del gioco in termini di quella precedente (ci occuperemo del rovescio della medaglia a pagina 23). La risposta viene da una osservazione che il lettore, di fronte a questa versione "mini" del gioco dei fiammiferi, avrà già fatto, molto probabilmente. Vale a dire, sia il giocatore I che il giocatore II hanno modo di valutare il complesso delle loro mosse: cioè, ciascuno può elaborare un piano completo di azione per ogni contingenza nella quale lui si possa trovare a dover fare la sua mossa; in altre parole, può elaborare una *strategia*. Osservo incidentalmente che è anche facile verificare, in questo gioco, che il giocatore I non ha alcuna strategia che gli garantisca la vittoria, mentre il giocatore II ha invece questa possibilità (basta che lui faccia in modo di lasciare un solo fiammifero sul tavolo, cosa che gli è possibile fare qualunque sia la prima mossa del giocatore I). Tuttavia, ora non mi interessa tanto parlare di strategie "vincenti" o meno, quanto del concetto stesso di strategia, che ci permette appunto di passare dalla descrizione di questo gioco mediante un albero alla sua descrizione in forma strategica, ovvero come (X, Y, f, g). Per farlo, sarà sufficiente indicare tutti i piani di azione che ciascun giocatore può formulare. A questo proposito osservo che in alcuni nodi i giocatori hanno un'unica scelta a disposizione: le regole del gioco e la situazione in cui si trovano non gli offrono alcuna possibilità di scelta (hanno un'unica mossa obbligata, cosa che in questo giochino avviene quando è rimasto un solo fiammifero sul tavolo). Visto che la descrizione delle strategie è già abbastanza pesante, trascurerò in modo radicale questi nodi, nel senso che non li menzionerò neppure. Volendo, potremmo aggiungerli, ma ribadisco che ciò avrebbe l'unico effetto di appesantire inutilmente il formalismo. Per quanto riguarda il giocatore II, egli ha quattro piani d'azione a disposizione:

- togliere 1 fiammifero se I ne ha tolto 1, toglierne 1 se I ne ha tolto 2
- togliere 1 fiammifero se I ne ha tolto 1, toglierne 2 se I ne ha tolto 2
- togliere 2 fiammiferi se I ne ha tolto 1, toglierne 1 se I ne ha tolto 2
- togliere 2 fiammiferi se I ne ha tolto 1, toglierne 2 se I ne ha tolto 2

[6]Si osservi che vi è una corrispondenza biunivoca fra i nodi finali ed i cammini che li congiungono col nodo iniziale: è questo fatto che ci consente di "raccattare" tutto quello che avviene lungo il percorso ed assegnare tutto quanto al nodo finale.

Indicheremo queste strategie più sinteticamente come:
$I_1 1 I_2 1$, $I_1 1 I_2 2$, $I_1 2 I_2 1$, $I_1 2 I_2 2$.

Un discorso del tutto analogo lo possiamo fare per il giocatore I:
- togliere 1 fiammifero all'inizio, togliere 1 fiammifero se gli tocca rigiocare
- togliere 1 fiammifero all'inizio, togliere 2 fiammiferi se gli tocca rigiocare
- togliere 2 fiammiferi all'inizio, togliere 1 fiammifero se gli tocca rigiocare
- togliere 2 fiammiferi all'inizio, togliere 2 fiammiferi se gli tocca rigiocare

Le strategie le possiamo indicare così:
$i1r1$, $i1r2$, $i2r1$, $i2r2$

Si può osservare come l'elenco delle strategie per I possa (giustamente!) lasciar perplessi, contrariamente a quello che succedeva per il giocatore II. In effetti, se I sceglie di togliere 2 fiammiferi, lui non sarà più chiamato a giocare, e quindi può sembrare più naturale indicare le seguenti come strategie per il giocatore I:
- togliere 1 fiammifero all'inizio, togliere 1 fiammifero se gli tocca rigiocare
- togliere 1 fiammifero all'inizio, togliere 2 fiammiferi se gli tocca rigiocare
- togliere 2 fiammiferi all'inizio

Utilizzerò tuttavia la precedente elencazione, anche se può apparire ridondante, per almeno due motivi. Uno è che la prima strada è più facilmente generalizzabile ed è applicabile in modo automatico a giochi più complessi, mentre la seconda richiede di "andare a vedere" la struttura dell'albero del gioco e quindi ci costringe ad una procedura presumibilmente più farraginosa. Un altro motivo è che potrebbe essere comodo distinguere tra la pianificazione di una certa azione e la sua effettiva realizzazione: potrebbe darsi che I voglia togliere 2 fiammiferi ma per errore[7] ne tolga 1. In tal caso, la nostra scelta di modellizzazione ci permette di "proseguire", mentre l'altra no. In effetti, questo tipo di considerazioni (che non contrastano, si noti, con le assunzioni di razionalità e di intelligenza dei giocatori) sono legate ad un concetto importante di soluzione che vedremo in seguito.

Possiamo allora scrivere la forma strategica del nostro gioco, e fornire una tabella analoga a quella che avevamo scritto per il "pari o dispari": vedi tabella 2.3. Naturalmente, questa è in realtà la "game form": basterà aggiungere le preferenze dei giocatori rispetto agli esiti per ottenere un gioco.

Si può notare come si "legga" immediatamente nella tabella il fatto, già osservato, che II ha a disposizione una strategia che porta comunque all'esito "vince II": c'è infatti una colonna (non a caso "intestata" con $I_1 2 I_2 1$) che contiene solo "vince II" nelle sue caselle.

A questo punto, possiamo ritenere di avere gli elementi essenziali per descrivere i giochi che hanno una "dimensione temporale"? Assolutamente no. Per almeno tre motivi rilevanti.

[7] Non perché è distratto, cosa che abbiamo escluso, ma perché gli sono "tremate le mani".

I \ II	$I_1 1 I_2 1$	$I_1 1 I_2 2$	$I_1 2 I_2 1$	$I_1 2 I_2 2$
$i1r1$	vince I	vince I	vince II	vince II
$i1r2$	vince II	vince II	vince II	vince II
$i2r1$	vince II	vince I	vince II	vince I
$i2r2$	vince II	vince I	vince II	vince I

Tabella 2.3: Il "gioco dei fiammiferi" in forma strategica

Il primo fa riferimento all'ampiezza di applicabilità della rappresentazione che abbiamo visto. Vi è una ipotesi implicita, che abbiamo usato per analizzare quali siano le strategie a disposizione dei giocatori. Ovverossia, che le mosse siano pubblicamente osservabili. Vi sono casi in cui ciò non avviene. Basta pensare ad una lieve modifica del gioco dei fiammiferi: quando II deve fare la sua prima mossa, lui deve indicare quanti fiammiferi vuole togliere senza aver visto la mossa fatta da I. Possiamo generalizzare questa osservazione, notando che quando uno si trova a giocare non necessariamente conosce esattamente tutta la storia precedente (non sto riferendomi al giocatore smemorato, quello che "non si ricorda le mosse precedenti": sto facendo riferimento al fatto che per come è fatto il gioco gli è strutturalmente impossibile saperlo).

Un altro motivo ha a che fare con vari giochi di carte, ma non solo (esempio classico: il backgammon): vi è o vi può essere l'intervento della sorte. Se poi teniamo conto che anche in decisioni di particolare rilievo e non solo nei giochi da tavolo il ruolo di eventi aleatori può essere rilevante, certo dovremo trovare un modo per trattarli.

Il terzo motivo ha a che fare con un ribaltamento del problema che ci siamo posti e che ci ha portato a disegnare gli alberi. Ovverossia, c'è un modo per rappresentare mosse *contemporanee* usando il diagramma ad albero? Quest'ultima domanda, come vedremo (pag. 23), si lega al problema di rappresentare in forma di albero un gioco in forma strategica.

Daremo risposta a tutte e tre queste questioni. Lo svantaggio sarà che dovremo un poco complicare la nostra struttura ad albero.

Occupiamoci prima di tutto del ruolo della sorte, che è facile da trattare. Si pensi al mazzo di carte che viene mescolato prima di giocare. Basterà introdurre un "giocatore" fittizio (usualmente indicato come "giocatore" 0), che effettua una mossa iniziale la quale corrisponde a scegliere una particolare distribuzione delle carte. Naturalmente questa mossa non corrisponde ad una scelta personale e volontaria di questo "giocatore", ma è semplicemente effettuata sulla base di una estrazione a sorte che attribuisce ad ogni ramo la sua probabilità. Nulla vieta che vi siano interventi del caso anche durante il gioco (esempio: il backgammon): questi saranno trattati allo stesso modo, ovverossia come "mosse" del giocatore 0.

Vediamo un albero molto semplice che incorpora questa novità: in figura 2.2, se I sceglie[8] B, poi tocca a II scegliere, mentre se I sceglie T, sarà poi la sorte a determinare il risultato finale. Si noti che la probabilità che vengano scelti i due rami è indicata (ad esempio, che venga scelto il ramo di sinistra è 1/4):

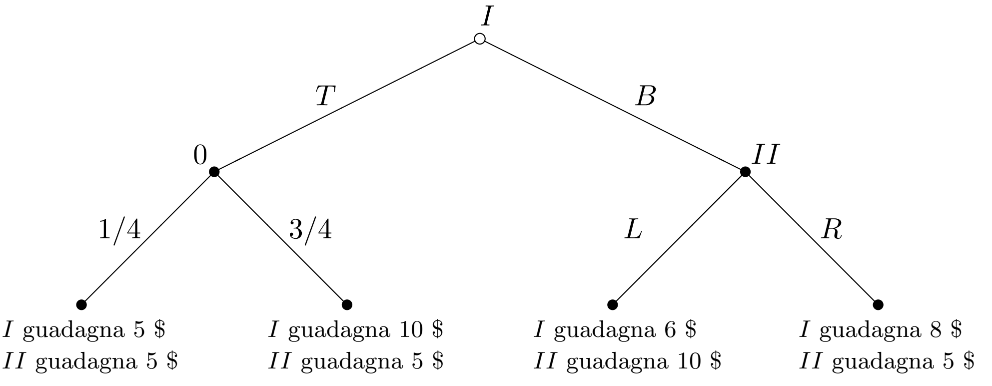


Figura 2.2: Rappresentazione dell'intervento della sorte

Un po' meno banale può sembrare, ed a ragione, la possibilità di rappresentare mosse contemporanee nella struttura ad albero. Dico a ragione, perché la struttura matematica sottostante ad un albero è una relazione d'ordine: voglio dire che, quando ci si mette a disegnare alberelli, la "vera ragione" risiede nella presenza di una struttura matematica ben precisa, e cioè una relazione d'ordine (l'albero non è altro che un espediente di natura grafica per rappresentare questa relazione d'ordine col susseguirsi dei nodi: detto altrimenti, la relazione d'ordine si traduce nella relazione "grafica" di precedenza nel susseguirsi del cammino dalla "radice" alle "foglie"). Il riferimento ad una relazione d'ordine sulle varie mosse pare essere proprio in antitesi all'idea che, ad esempio, I giochi contemporaneamente a II.

Per capire come si possa fare, conviene riflettere sul gioco del "pari o dispari" e su cosa voglia dire la regola in base alla quale i giocatori devono fare la loro dichiarazione contemporaneamente. Immaginiamo che il gioco venga giocato così: *prima* il giocatore I scrive su un foglietto la sua scelta, ma non fa vedere il foglietto a II il quale, *dopo* che I ha scritto la sua scelta, indicherà su un altro foglietto la sua. Fa differenza? Ovviamente no, nulla

[8]Qui, come spesso avverrà in seguito, non ci interessa specificare a cosa corrispondono le strategie T e B di I ed L ed R di II.

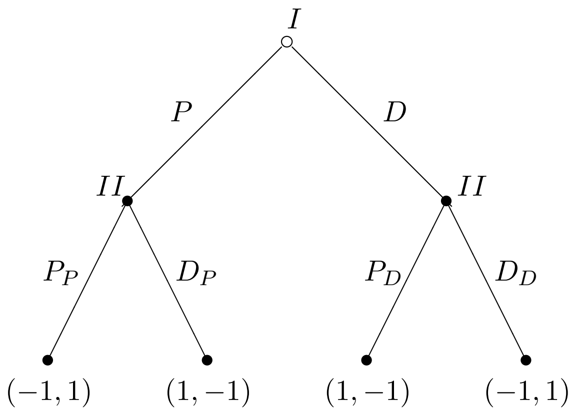


Figura 2.3: Il gioco del "pari o dispari" con mosse sequenziali

di essenziale è cambiato. Visto che I ha fatto la sua scelta prima, possiamo pensare di rappresentare il "pari o dispari" come albero: vedi figura 2.3.

Ma la situazione così rappresentata non rende esplicito il fatto che II non è in grado di osservare la mossa di I. Come possiamo evidenziare questo fatto? Con un semplice espediente: "mettiamo assieme" i nodi per cui, quando II vi si trova, non sa se si trova in uno od un altro. Otteniamo un cosiddetto "insieme di informazione", esprimente il fatto che l'informazione del giocatore non è costituita dal sapere di essere in un nodo ma in un insieme di nodi. Graficamente lo facciamo congiungendo questi nodi con una linea tratteggiata: vedasi la figura 2.4.

Per mettere in evidenza la differenza tra la rappresentazione della figura 2.4 e quella di figura 2.3, mostro con la tabella 2.4 la forma strategica che scaturisce dalla figura 2.3 (dove si può vedere immediatamente che II ha una strategia che gli consente di vincere sempre: $P_P D_D$). Quella che proviene dalla figura 2.4 è naturalmente quella, già vista, del "pari o dispari".

I \ II	$P_P P_D$	$P_P D_D$	$D_P P_D$	$D_P D_D$
P	$(-1, 1)$	$(-1, 1)$	$(1, -1)$	$(1, -1)$
D	$(1, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, -1)$	$(-1, 1)$

Tabella 2.4: Forma strategica del "pari o dispari" sequenziale

L'espediente degli "insiemi di informazione" ha in realtà un uso che va ben al di là della sola risoluzione del problema di rappresentare le mosse contemporanee. Ogni qual volta le regole del gioco fanno sì che un giocatore non sia

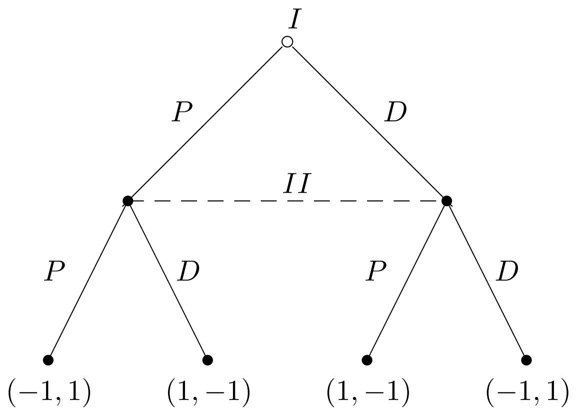


Figura 2.4: Il gioco del "pari o dispari" rappresentato come albero

necessariamente in grado di distinguere fra tutti i vertici dell'albero, ma solo tra loro gruppi (nel senso che, quando si trova in un vertice, sa di trovarsi in uno di un ben preciso gruppo ma non in quale esattamente fra i vertici del gruppo), congiungeremo questi vertici con una linea tratteggiata e ciascuno di questi complessi di vertici verrà detto "insieme di informazione". Come espediente grafico per rappresentare gli insiemi di informazione, oltre a quello del tratteggio si usa anche racchiudere tutti i vertici di un unico insieme di informazione dentro ad un "salsicciotto". Si noti che, per ogni vertice dell'albero, vi è una sola strada che porta al vertice iniziale: questo significa che il sapere in quale vertice ci si trovi equivale a *conoscere tutta la "storia"* del gioco, a partire dal vertice iniziale fino a quel punto. Il fatto che un giocatore non sia in grado di discernere fra due vertici diversi, vuole quindi dire che egli ha una informazione parziale sulla storia pregressa. Una nota di carattere terminologico: un gioco i cui insiemi di informazione sono tutti degeneri, cioè che contengano sempre un solo vertice, viene detto gioco (in forma estesa) ad *informazione perfetta*.

Osservo che, se vogliamo che il significato che gli abbiamo attribuito sia rispettato, gli insiemi di informazione devono ubbidire ad alcune restrizioni.

Una prima restrizione è ovvia: ad ogni vertice di un insieme di informazione deve essere attribuito lo stesso giocatore cui spetti la mossa. Un'altra restrizione ha anche un certo interesse come una sorta di "prova del nove", visto che traduce una condizione di coerenza fra la situazione che stiamo modellizzando e la sua rappresentazione formale: da ogni vertice di uno stesso insieme di informazione deve uscire un ugual numero di mosse. La figura 2.5 (che trascura vari dettagli irrilevanti per il discorso) mostra un esempio in cui

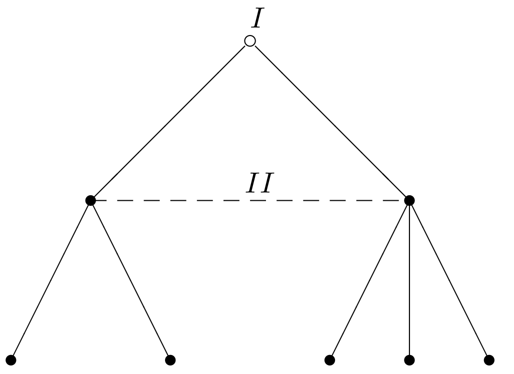


Figura 2.5: Un gioco in forma estesa "sbagliato"

questa restrizione è violata, e pertanto non rappresenta un gioco.

C'è poi una ulteriore restrizione che viene fatta normalmente, ma non è da ritenersi "obbligata": di solito si impone la condizione che un insieme di informazione non possa contenere due vertici che si trovino sullo stesso cammino che congiunge la radice con un vertice terminale. Ad esempio, non si ammettono giochi come quello in figura 2.6, detto gioco di Isbell (si noti che vi è addirittura un solo giocatore, proprio per ridurci all'essenziale). Per comodità di rappresentazione, anziché congiungere con una linea tratteggiata i due vertici che stanno nello stesso insieme di informazione, li ho racchiusi dentro ad un unico "salsicciotto".

Dato un gioco finito in forma estesa, possiamo estendere la definizione di strategia che abbiamo visto a pagina 2, per tenere conto degli insiemi di informazione: semplicemente, una strategia per un giocatore elencherà non più le scelte da fare in ogni vertice, ma in ogni insieme di informazione "di pertinenza" di questo giocatore. In questo modo, possiamo passare dalla forma estesa alla forma strategica. Per quanto riguarda il "viceversa", utilizzando gli insiemi di informazione possiamo dare una risposta molto semplice alla questione se un gioco in forma strategica possa essere rappresentato in forma estesa. Basta fare come abbiamo fatto con il "pari o dispari". Cioè, mettiamo un nodo iniziale in cui I ha a disposizione tutte le sue strategie, ognuna delle quali verrà associata ad un ramo uscente da quello iniziale; racchiudiamo poi tutti i nodi che vengono individuati dalle strategie di I in un unico insieme di informazione e da ciascuno di questi nodi facciamo partire tanti rami quante sono le strategie a disposizione di II. I payoff saranno messi nell'unico modo sensato possibile. Tutto qui. Naturalmente, potevamo fare "a rovescio", nel

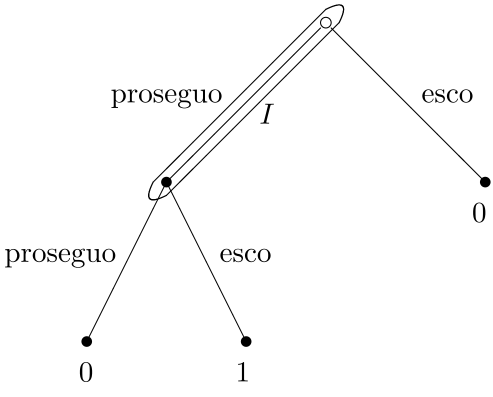


Figura 2.6: Il gioco di Isbell

senso di fare "partire" II e poi mettere I: non sarebbe cambiato nulla. A questo proposito, dovrebbe essere facile convincersi come vi possano essere molti giochi in forma estesa che danno luogo alla stessa forma strategica, quindi in genere non potremo ricostruire una unica forma estesa dalla sola conoscenza della forma strategica.

Vorrei chiudere questo spazio dedicato agli insiemi di informazione con degli esempi che mostrano interessanti situazioni che si possono presentare (alcuni di questi giochi saranno ripresi in seguito). Alcuni dei dettagli, quali i nomi dei vari rami, od i payoff, verranno omessi se non hanno un ruolo essenziale nel discorso.

Il primo esempio vuole anche contribuire a evitare che si pensi ad un gioco in forma estesa come ad una situazione in cui i vari giocatori giocano uno dopo l'altro, alternandosi nelle mosse. Nella figura 2.7 si dovrebbe leggere chiaramente che, nel momento in cui la sorte ha scelto quale sia il giocatore cui spetta scegliere per primo, costui non sa se è il primo a giocare o se l'altro ha già giocato. Il che è ben diverso da altri tipi di situazioni, interessanti, in cui non è codificato a priori chi sia colui che deve fare la prima mossa e tale scelta viene affidata al caso: volendole rappresentare come gioco in forma estesa, si otterrà un albero con una struttura analoga a quella di figura 2.7, però senza la parte "inclinata" del tratteggio.

I tre esempi delle figure 2.8, 2.9 e 2.10 sono costruiti sullo stesso albero. In tutti e tre i casi si assume che la mossa iniziale sia della sorte, dopodiché tocca giocare prima ad I e poi a II. Le differenze chiave risiedono nella diversa informazione che i giocatori hanno a disposizione al momento in cui devono "muovere", il che si riflette nel fatto che gli insiemi di informazione sono diversi nei tre casi.

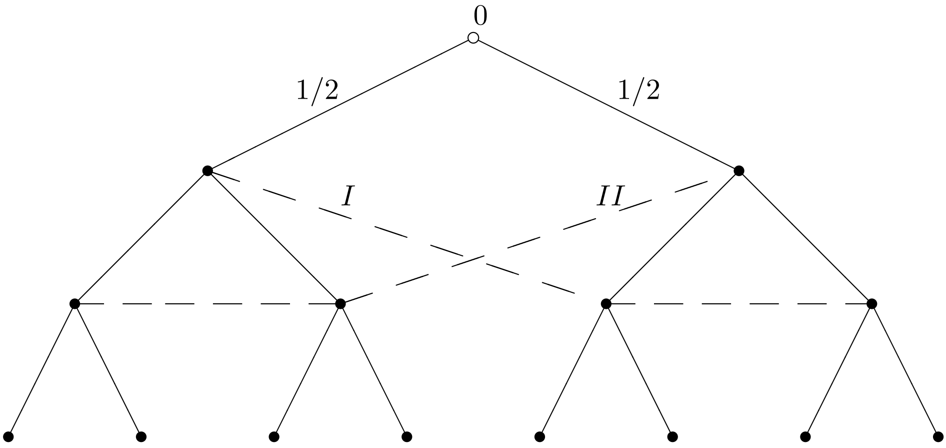


Figura 2.7: Un interessante gioco in forma estesa

Il primo caso è il più semplice: si assume che i giocatori abbiano entrambi da scegliere fra A e B, e che lo debbano fare senza sapere né quale sia il risultato dell'estrazione a sorte, né la scelta dell'altro giocatore. Una[9] forma estesa che rappresenta questa situazione è quella di figura 2.8.

Nel secondo caso, assumo invece che il giocatore I possa osservare il risultato dell'estrazione a sorte e possa quindi effettuare scelte diverse a seconda di quello che è stato estratto. Per il giocatore II, invece, continua a valere il fatto che non può osservare né la mossa di I né il risultato dell'estrazione a sorte. Il gioco è rappresentato nella figura 2.9.

Per quanto riguarda il terzo caso, vorrei procedere rovesciando "l'ordine naturale delle cose". Ovverossia, partire dalla rappresentazione in forma estesa (vedi figura 2.10) e da questa cercare di capire quale situazione descriva. I due vertici di pertinenza di I non sono raggruppati in un insieme d'informazione, il che vuol dire che egli sa se si trova in un vertice oppure in un altro: ne segue che è in grado di poter osservare il risultato dell'estrazione a sorte. Per quanto riguarda II, egli non è in grado di sapere, ad esempio, se si trova dopo A_a oppure A_b. Ciò vuol dire che è in grado di osservare la scelta di I (se I è andato "a sinistra" oppure a "destra"), ma non è in grado di sapere quale è stata la scelta operata dalla sorte.

Vale la pena di vedere quale sia la forma strategica di questi tre giochi. Anche per osservare come la scelta di una strategia da parte di I ed una da

[9]Dico una perché non è unica. Come già visto, si potrebbe mettere prima II e poi I, ad esempio.

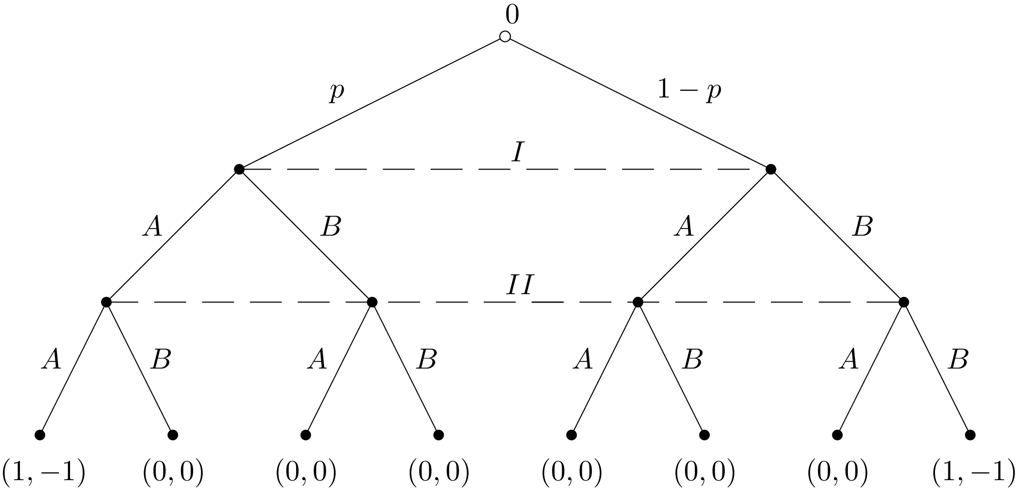


Figura 2.8: Il primo di tre esempi

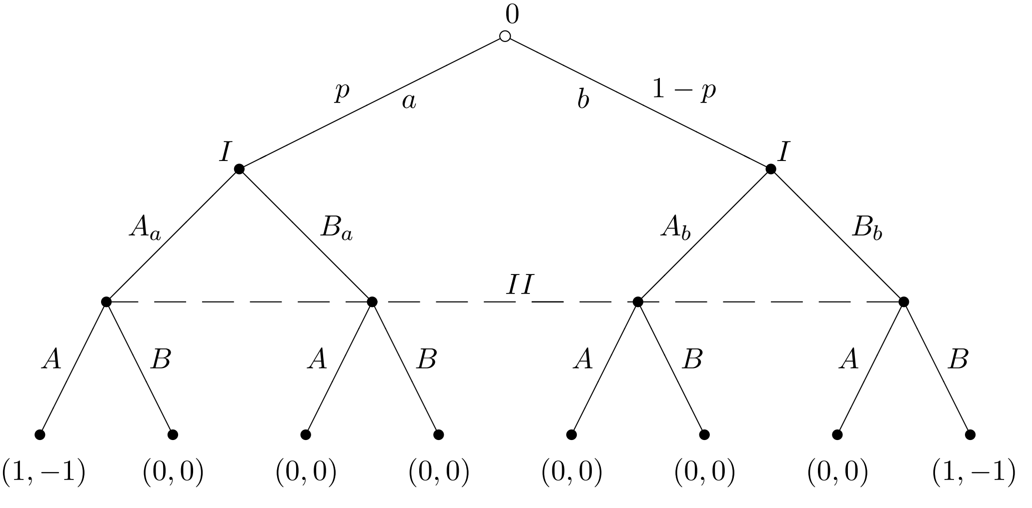


Figura 2.9: Il secondo di tre esempi

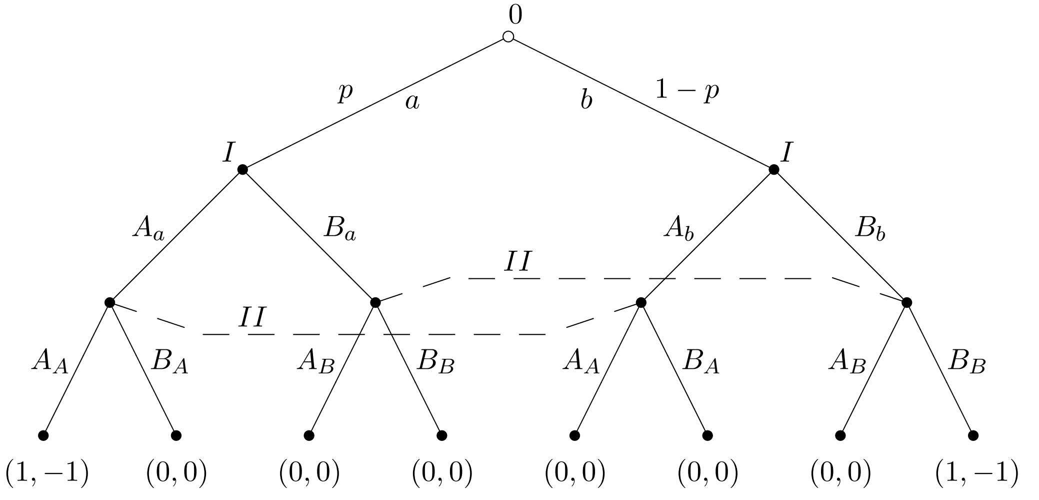


Figura 2.10: Il terzo di tre esempi

parte di II, a causa della presenza della sorte, non determina un risultato finale ma ci dice quale è la probabilità che esca ciascuno degli esiti finali. In questi tre esempi, dato che la sorte sceglie solo fra due rami, la scelta di una strategia di I e di una di II darà un certo esito con probabilità p ed un altro con probabilità $1-p$. Ad esempio, nel primo gioco la scelta di A da parte di I e di A da parte di II dà come risultato $(1,-1)$ con probabilità p e $(0,0)$ con probabilità $1-p$. Assumendo che abbia senso farlo (in effetti così è, ma lo vedremo nel prossimo capitolo), condenseremo questa informazione nel risultato $p(1,-1)+(1-p)(0,0)$, cioè $(p,-p)$, che in termini tecnici è il "risultato atteso". Rappresento la forma strategica dei tre giochi nelle tabelle 2.5, 2.6 e 2.7.

I \ II	A	B
A	$(p,-p)$	$(0,0)$
B	$(0,0)$	$(1-p,p-1)$

Tabella 2.5: Il primo gioco, rappresentato in forma strategica

In conclusione, osservo che mediante l'uso degli insiemi di informazione abbiamo risposto alle ultime due delle domande poste, ed abbiamo imparato che ciò che conta non è la contemporaneità temporale ma quella informativa.

Una osservazione che mi sento in dovere di rendere esplicita è che non ho

I \ II	A	B
A_aA_b	$(p, -p)$	$(0, 0)$
A_aB_b	$(p, -p)$	$(1 - p, p - 1)$
B_aA_b	$(0, 0)$	$(0, 0)$
B_aB_b	$(0, 0)$	$(1 - p, p - 1)$

Tabella 2.6: Il secondo gioco, rappresentato in forma strategica

I \ II	A_AA_B	A_AB_B	B_AA_B	B_AB_B
A_aA_b	$(p, -p)$	$(p, -p)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
A_aB_b	$(p, -p)$	$(1, -1)$	$(0, 0)$	$(1 - p, p - 1)$
B_aA_b	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
B_aB_b	$(0, 0)$	$(1 - p, p - 1)$	$(0, 0)$	$(1 - p, p - 1)$

Tabella 2.7: Il terzo gioco, rappresentato in forma strategica

dato una definizione formale e generale di cosa sia un gioco in forma estesa, ma mi sono limitato ad evidenziare ingredienti essenziali della descrizione, cercando di mettere in rilievo i punti più significativi. Mi evito in questo modo una formulazione che è tecnicamente un poco pesante. Così come non ho parlato di "memoria perfetta", una condizione che individua una sottoclasse significativa dei giochi in forma estesa. Chi fosse interessato a conoscere tutti questi aspetti, può consultare manuali standard di teoria dei giochi, oppure la pagina web associata a questo libro. WEB

Abbiamo così visto due dei tre principali modelli usati dalla TdG per rappresentare situazioni di interazione strategica: la "forma strategica" e la "forma estesa". Il terzo modello, giochi in forma caratteristica (detti anche giochi in forma di coalizione), lo vedremo molto più avanti, quando parleremo dei cosiddetti "giochi cooperativi". Noto, per chiudere, che gli esempi visti sono tutti esempi "giocattolo". E' certamente ragionevole partire dalle cose semplici, ma ci si può chiedere giustamente se la TdG possa effettivamente padroneggiare le complicazioni tipiche di una reale situazione di interazione strategica. Si noti che situazioni più complesse possono portare ad esempio ad una forma estesa o strategica di fatto ingestibile (esempio classico: il gioco degli scacchi), oppure possono mettere in dubbio la effettiva possibilità di riuscire a recuperare nel modello tutti i dettagli significativi, i quali potrebbero disperdersi dentro ad una sorta di "rumore" complessivo.

Intendo dire, in sintesi, che la scelta di usare il paradigma del decisore razionale ed intelligente ci permette di affrontare i problemi di interazione strategica con qualche speranza di poter trarre conclusioni significative, ma potrebbe non essere una semplificazione sufficiente: potrebbe essere necessario "buttare via" altri dettagli oppure cercare un approccio radicalmente diverso. Se questo è a mio parere il momento giusto per porre la questione, non lo è per la (mia) risposta, che rinvio al capitolo 10.

Capitolo 3

Il paradigma di razionalità e l'equilibrio di Nash

Come detto, oggetto centrale d'interesse della TdG sono decisori razionali ed intelligenti che si trovano ad interagire. Vedremo in seguito come sia possibile ed anche opportuno allentare questi requisiti, ma in questo capitolo ci concentreremo su questa ipotesi. Assumeremo inoltre che i parametri del gioco, nonché l'intelligenza e la razionalità dei giocatori siano conoscenza comune fra i giocatori.

E' opportuno allora specificare in dettaglio cosa intendiamo quando parliamo di decisori razionali ed intelligenti.

La seconda ipotesi è la più facile da esplicitare, e già l'avevamo fatto in parte nel capitolo precedente: si assume che i decisori abbiano capacità deduttive, di calcolo e di analisi della situazione illimitate. E' ovvio che queste ipotesi non sono soddisfatte da nessun decisore concreto. Ma stiamo facendo una operazione di semplificazione ben consueta, là dove si ambisce costruire una teoria, od anche semplicemente un modello: si cerca di astrarre dalle caratteristiche della realtà in esame che paiono essere secondarie. Un po' come quando nella meccanica classica si assume che l'attrito sia trascurabile. Ma, naturalmente, prima o poi dell'attrito bisognerà tener conto, altrimenti certi fenomeni resterebbero inspiegabili: a questo proposito, l'analisi del ruolo dell'attrito nello spiegare il buono o cattivo funzionamento del regolatore di Watt, così come è raccontato in Pontrjagin (1962), è qualcosa di affascinante.

E' immediato trovare un esempio in cui questa assunzione di intelligenza così radicale confligge con la realtà concreta dei decisori: il gioco degli scacchi. Il metodo di induzione a ritroso, che verrà descritto a pagina 72, può essere usato per dimostrare che un giocatore intelligente (e razionale) ha a sua disposizione una strategia ottimale. Tuttavia, nessuno è stato finora in grado di esibire una di queste strategie (né per il bianco, né per il nero). La ragione sta proprio nella capacità di calcolo richiesta, che va ben al di là dei più avanzati calcolatori attualmente disponibili. Già la semplice elencazione delle strategie a disposizione dei giocatori è un "task" formidabile!

Quindi la TdG è ben consapevole del fatto che l'ipotesi di intelligenza illimitata, così come è stata descritta, è una assunzione molto forte. Tuttavia, le difficoltà di analisi che emergono dallo studio di vari problemi di interazione strategica, e che costituiscono il fascino intellettuale della TdG, non trovano tipicamente le loro origini nelle limitazioni delle potenzialità "calcolistiche" dei giocatori. I "toy game" che sottostanno a questi esempi critici sono tipicamente di bassa complessità, per quanto riguarda il numero di strategie coinvolte, e più in generale per le capacità di analisi e deduttive che vengono richieste. Insomma, le criticità stanno "altrove". Va comunque detto che l'indebolimento dell'assunzione di intelligenza illimitata è interessante e conduce a risultati significativi: essa, per di più, è appropriata per situazioni di interazione ove l'intelligenza illimitata dei decisori coinvolti non può essere sensatamente postulata (si pensi ai conflitti tra animali, od ai meccanismi di adattamento reciproco tra fiori ed insetti impollinatori). Parleremo nel capitolo 6 di questo, che costituisce un uso particolarmente interessante degli strumenti analitici sviluppati dalla TdG al di fuori del suo campo primario di analisi. Come detto, in questo capitolo ci concentreremo sul nucleo classico della TdG, e quindi assumeremo che i decisori siano provvisti di capacità intellettive illimitate.

La "razionalità" dei decisori costituisce l'altra ipotesi essenziale della TdG. Non solo, il cuore e la novità della disciplina stanno proprio nel passaggio dalla razionalità del decisore in isolamento a quella in cui si trova ad interagire con altri consimili. Potremmo sintetizzare così, in prima approssimazione: la TdG tenta di costruire una teoria delle decisioni in situazioni di interazione, fondandola sulla razionalità (ed intelligenza) dei decisori individuali.

Il termine "razionalità" non deve trarre in inganno. E' opportuno non fare riferimento al significato consueto del termine. Come spesso avviene, e la TdG non è da meno in questo, una teoria può utilizzare termini del linguaggio comune, dandogli un significato molto più precisamente delineato ma non necessariamente sovrapponibile a quello comune. Il termine "razionale" (e suoi derivati) saranno qui usati nel loro significato specifico della teoria, che poi è quello preso a prestito dalla teoria delle decisioni individuali, che a sua volta lo ha ereditato dalla teoria economica neoclassica.

INTERLUDIO

Per il ruolo fondante che ha il concetto di razionalità, effettueremo un'ampia digressione che servirà a delinearne gli aspetti essenziali.

Quando si parla di razionalità ci si riferisce ad un decisore il quale è in condizione di effettuare delle scelte tra diverse alternative disponibili. Queste scelte hanno delle conseguenze (anche complesse) e la razionalità del decisore sta nel fatto che:

- ha preferenze sulle conseguenze
- queste preferenze sono coerenti
- sceglierà l'azione, tra quelle a lui disponibili, la cui conseguenza è la preferita

Un esempio molto semplice per descrivere questi tre punti può essere la scelta di un frutto, con la finalità di mangiarlo, da un cesto. Supponiamo che il cesto contenga un mango, una banana, una pera, una mela ed un'arancia, e che le preferenze del decisore siano tali per cui si abbia:

$$\begin{array}{ccl} \text{mango} & \sqsupseteq & \text{banana} \\ \text{banana} & \sqsupseteq & \text{pera} \\ \text{pera} & \sqsupseteq & \text{mela} \\ \text{mela} & \sqsupseteq & \text{arancia} \end{array}$$

Ho utilizzato il simbolo $\sqsupseteq$ per indicare le preferenze del decisore. Cioè, ad esempio: "pera $\sqsupseteq$ mela" sta ad indicare che il decisore preferisce mangiare la pera anziché la mela. Coerenza delle preferenze significa, in termini formali, assumere che queste siano *transitive*. Ciò vuol dire in generale che, se abbiamo $a \sqsupseteq b$ e $b \sqsupseteq c$, allora deve aversi necessariamente che $a \sqsupseteq c$. Nel nostro caso, ad esempio, avremo che mango $\sqsupseteq$ pera (perché mango $\sqsupseteq$ banana e banana $\sqsupseteq$ pera), banana $\sqsupseteq$ arancia, etc. L'azione che il decisore può compiere consiste nello scegliere un frutto dal cesto. Se, per qualche motivo che non c'interessa, la scelta del decisore è limitata fra la banana, la pera e l'arancia, egli prenderà una banana.

Gli esempi possono essere naturalmente molto più complessi. In particolare, un elemento chiave è rappresentato dal fatto che non necessariamente si ha una relazione *deterministica* fra azioni e conseguenze. Più precisamente, le conseguenze di una data azione sono effetto sia della scelta operata dal decisore che di fattori esterni alla sua potestà. Un caso importante è quello in cui l'intervento di altri decisori può concorrere al risultato finale, problematica che sarà al centro della nostra attenzione in questo libro: qui, però, ci riferiamo al fatto che elementi di carattere aleatorio[1] possono concorrere alla determinazione del risultato finale, aspetti che analizzeremo in seguito. Per

[1] Osservo che non darò spazio alla considerazione di eventi che, ben più che essere incerti, non sono addirittura previsti, o immaginati, dal decisore.

ora ci limitiamo al caso “semplice”, ovvero al caso in cui le conseguenze sono *determinate* dalle azioni e solo da loro.

La situazione è simile a quella rappresentata nel capitolo precedente, quando a pagina 10 siamo passati rapidamente dalla “game form” al gioco. Abbiamo un insieme X che rappresenta le azioni a disposizione del nostro decisore, l'insieme E delle conseguenze ed una funzione $h : X \to E$. Il decisore ha preferenze su E, descritte da $\sqsupseteq$ (come nel capitolo precedente, usiamo questo simbolo per rappresentare quelle che abbiamo chiamato “preferenze deboli” e che possiamo interpretare come “preferisce a ... o è indifferente a ...”[2]). Assumeremo, come detto, che la relazione $\sqsupseteq$ sia transitiva. Per ragioni di convenienza, faremo anche l'ipotesi ulteriore che, dati comunque due elementi di E, il nostro decisore sia comunque in grado di confrontarli, cosa che esprimeremo in termini formali dicendo che la relazione è “totale”[3]. Quindi, dati comunque $e_1, e_2 \in E$, almeno una delle due affermazioni: $e_1 \sqsupseteq e_2$, $e_2 \sqsupseteq e_1$, sarà vera.

Se l'insieme delle conseguenze E è finito, una relazione transitiva e totale può essere sempre rappresentata da una “funzione di utilità” $u : E \to \mathbb{R}$. Cioè potremo trovare una funzione $u : E \to \mathbb{R}$ per cui si abbia:

$$u(e_1) \geq u(e_2) \qquad \text{se e solo se} \qquad e_1 \sqsupseteq e_2$$

In riferimento al nostro esempio iniziale, potremmo ad esempio avere (se le preferenze del nostro decisore sono tutte “strette”):

$$\begin{array}{rcl} u(\text{mango}) & = & 5 \\ u(\text{banana}) & = & 4 \\ u(\text{pera}) & = & 3 \\ u(\text{mela}) & = & 2 \\ u(\text{arancia}) & = & 1 \end{array}$$

Ma andrebbe altrettanto bene:

$$\begin{array}{rcr} u(\text{mango}) & = & 10 \\ u(\text{banana}) & = & 9 \\ u(\text{pera}) & = & 6.15 \\ u(\text{mela}) & = & -1 \\ u(\text{arancia}) & = & -5 \end{array}$$

Così come abbiamo fatto nel precedente capitolo, possiamo costruire un diagramma:

---

[2]Cioè, “mango $\sqsupseteq$ banana” sta a significare che il nostro decisore preferisce il mango alla banana oppure è indifferente fra i due frutti.

[3]E' anche in uso il termine “completa” per indicare questa proprietà. Ciò succede in particolare in testi di derivazione economica, che hanno poco rispetto per la terminologia standard in uso per le relazioni d'ordine.

$$X \xrightarrow{\quad h \quad} E \xrightarrow{\quad u \quad} \mathbb{R}$$

Se consideriamo la composizione delle funzioni u ed h, cioè $f = u \circ h$, abbiamo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & E \arrow[r, "u"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Anche questa volta lo possiamo "cortocircuitare", eliminando gli elementi intermedi h, E, u e rimanendo quindi solo con X ed f:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend right, "f"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Il decisore sceglierà l'elemento $\bar{x} \in X$ che rende massima f, ovverossia quello per cui si ha:

$$f(\bar{x}) \geq f(x) \qquad \text{per ogni} \qquad x \in X.$$

Abbiamo così ridotto il problema di decisione ad un problema di massimizzazione. Ciò, per lo meno, se abbiamo un insieme finito: ma questo fatto si estende, sotto opportune e ragionevoli restrizioni, anche al caso in cui X sia un insieme infinito.

Questa presentazione dei problemi di decisione in condizioni di certezza è stata molto rapida, e certamente vi sono aspetti che meriterebbero di essere approfonditi: il realismo delle ipotesi, i limiti di applicabilità della teoria, teorie alternative, etc. Rinvio per questo a testi specifici (vedasi Kreps (1988), French (1993), Fishburn (1979), Roberts (1979)) e passo invece rapidamente a vedere cosa succede quando si introducono fattori aleatori nel problema di decisione

Un metodo sufficientemente generale e flessibile per rappresentare i problemi di questo tipo è quello di immaginare che la conseguenza di un'azione sia determinata congiuntamente[4] e dalla scelta operata dal decisore e dallo "stato di natura" che si è realizzato, tra i vari possibili.

[4]E *indipendentemente*!

Vediamo subito un esempio molto semplice. Il decisore deve scegliere se puntare 100 euro sul 13 alla roulette oppure no. Se sceglie di non giocare, la conseguenza certa della sua scelta è che egli guadagnerà esattamente zero. Se invece sceglie di puntare, il risultato dipende dallo "stato di natura" che si realizzerà. Ovverossia, da quale tra le 37 caselle possibili, numerate da 0 a 36, ospiterà la pallina lanciata dal croupier. Se la casella è quella che porta il numero 13, il giocatore avrà un guadagno netto di 3500 euro (il croupier gli passa 3600 euro, ma questi comprendono anche i 100 che egli aveva messo sul tavolo verde). Se la casella è un'altra, il giocatore perde 100 euro.

Volendo formalizzare il problema, possiamo individuare l'insieme X delle scelte possibili, che nel nostro caso conterrà due soli elementi (è un problema veramente molto semplice!): $X = \{$"punto 100 euro sul 13", "non gioco"$\}$. Per scrivere un po' di meno, userò i simboli P e NP per indicare, rispettivamente, le azioni: "punto 100 euro sul 13" e "non gioco". Pertanto, avremo $X = \{P, NP\}$. Altro ingrediente è l'insieme dei possibili stati di natura (rilevanti per il problema che stiamo trattando, s'intende!). E' naturale identificare questo insieme con l'insieme dei numeri da 0 a 36: $S = \{0, 1, \ldots, 36\}$.

Usiamo una tabella per descrivere la situazione che il decisore ha di fronte. Nelle caselle della tabella 3.1 mettiamo i guadagni (in euro) del giocatore.

azione \ stato di natura	0	1	...	13	...	36
P	-100	-100	...	3500	...	-100
NP	0	0	...	0	...	0

Tabella 3.1: La roulette con indicati gli stati di natura

Se riteniamo che i 37 stati di natura siano, in questo caso, equiprobabili, possiamo integrare la tabella con questa ulteriore informazione, come mostrato nella tabella 3.2.

probabilità	1/37	1/37	1/37	1/37	1/37	1/37
azione \ stato di natura	0	1	...	13	...	36
P	-100	-100	...	3500	...	-100
NP	0	0	...	0	...	0

Tabella 3.2: La roulette con indicate le probabilità

Abbiamo a questo punto gli ingredienti necessari per analizzare quello che viene usualmente descritto come problema di decisione in condizioni di rischio.

In generale, abbiamo l'insieme X delle azioni possibili: $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, l'insieme $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ degli stati di natura, le probabilità $p_1, \ldots, p_n$ che vengono attribuite alla possibilità che si verifichino i vari stati di natura. Si noti che abbiamo implicitamente assunto, nella formalizzazione fatta, che X ed S siano finiti, sempre al fine di evitare complicazioni tecnico-formali.

Abbiamo quindi la tabella 3.3 dove, all'intersezione tra la riga i e la colonna j, abbiamo posto e_{ij}, che è la conseguenza dell'azione scelta x_i se lo stato di natura "vero" è s_j. Come di consueto, indicheremo con E l'insieme delle conseguenze. Ciò che è importante, affinché possiamo applicare la nostra analisi, è che l'insieme delle conseguenze contenga tutti gli elementi e_{ij}.

p	p_1	$\ldots$	p_j	$\ldots$	p_n
$X \setminus S$	s_1	$\ldots$	s_j	$\ldots$	s_n
x_1	e_{11}	$\ldots$	e_{1j}	$\ldots$	e_{1n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_i	e_{i1}	$\ldots$	e_{ij}	$\ldots$	e_{in}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_m	e_{m1}	$\ldots$	e_{mj}	$\ldots$	e_{mn}

Tabella 3.3: Tabella di un problema di decisione

Ribadisco, un'azione non identifica una sola conseguenza, ma un intero ventaglio di conseguenze possibili. Quale sia quella che si verificherà effettivamente dipenderà ovviamente dall'azione compiuta (che individua la riga della tabella), ma anche da quale sarà lo stato di natura che si realizzerà. Si noti che un presupposto per la validità di questa modellizzazione è che azioni e stati di natura siano assolutamente indipendenti tra loro. Se così non fosse, magari perché la scelta dell'azione può avere influenza sulla realizzabilità degli stati di natura, non potremmo adottare questo modello[5]. L'ulteriore presupposto della teoria delle decisioni in condizioni di rischio è che ad ognuno degli stati di natura si possa assegnare la probabilità che questi ha di realizzarsi[6]. In altre parole, che nella tabella 3.3 si possa "riempire" la prima riga (quella che ha "p" come intestazione). Ammettere questo significa fare un notevole passo in avanti.

Significa, in particolare, che di fatto un'azione del decisore identifica una

[5] O, meglio, probabilmente lo potremmo ancora usare, ma dovremmo fare un'analisi più approfondita, che magari tenga conto in modo più preciso dello svolgersi delle azioni nel tempo.

[6] Con la precisazione che stiamo parlando di una distribuzione di probabilità "oggettiva". Detto altrimenti, il decisore assume come data la valutazione della probabilità, ovvero essa rappresenta un dato *esogeno* rispetto al problema di decisione.

distribuzione di probabilità sulle conseguenze. Questa è "leggibile" dalla tabella, usando la riga corrispondente all'azione scelta e l'informazione fornita dalla riga delle probabilità. Ad esempio, nel caso del giocatore che deve scegliere se puntare o no sul 13, nel caso in cui decida di puntare, ciò che ne deriva è che con probabilità 1/37 guadagna 3500 euro e con probabilità 36/37 ne perde 100. Se invece non gioca, guadagna 0 con probabilità 1 (cosa che, ai nostri fini, identificheremo con la certezza).

Visto che le conseguenze dei nostri decisori sono distribuzioni di probabilità su E, volendo estendere il paradigma del decisore razionale a questo contesto, assumeremo che il nostro decisore abbia preferenze[7] coerenti (cioè transitive) su queste distribuzioni di probabilità (dette anche "lotterie" nel gergo della disciplina). Si noti che, a questo punto, non ci interessa più sapere chi siano concretamente gli stati di natura rilevanti: l'unica loro caratteristica che ha importanza per noi è la probabilità che hanno di essere il vero stato di natura.

Se le preferenze del decisore soddisfano opportune ipotesi strutturali, allora esse possono essere rappresentate mediante una cosiddetta funzione di utilità "di von Neumann e Morgenstern" (d'ora in poi, vNM). Cioè, dato $E = \{e_1, \ldots, e_k\}$, si può determinare una[8] $u : E \to \mathbb{R}$ tale che, comunque siano assegnate due distribuzioni di probabilità $p = (p_1, \ldots, p_k)$ e $q = (q_1, \ldots, q_k)$ su E, si abbia:

$$p \sqsupset q \qquad \text{se e solo se} \qquad \sum_{i=1}^{k} p_i u(e_i) > \sum_{i=1}^{k} q_i u(e_i)$$

Se utilizziamo questa rappresentazione, possiamo riscrivere la tabella del problema di decisione in condizioni di incertezza, sostituendo agli esiti i valori che la funzione di utilità del decisore loro assegna: vedasi la tabella 3.4. Nel caso della roulette, abbiamo che la distribuzione p assegna probabilità 36/37 all'esito "perdo 100 euro" e probabilità 1/37 all'esito "guadagno 3500 euro". Invece, q assegna probabilità 1 all'esito "guadagno 0". Quindi, se u è una funzione di utilità di vNM per un decisore, si ha che egli preferisce p a q se e solo se $\frac{36}{37}u(-100) + \frac{1}{37}u(3500) > u(0)$. Insomma, il nostro decisore punterà i 100 euro se e solo se vale quest'ultima disuguaglianza.

Anzi, possiamo procedere oltre, con una tabella in cui abbiamo solo una colonna, nella quale inseriamo i valori dell'utilità attesa: vedi la tabella 3.5. Si noti che ciò significa aver ormai ricondotto il problema di scelta ad un problema banale (le difficoltà a questo punto sono tutte superate): si trat-

[7]Continueremo a denotarle col simbolo $\sqsupseteq$, ed useremo $\sqsupset$ per le preferenze "strette".

[8]E' importante osservare che, date le preferenze del nostro decisore, non è *univocamente* determinata una funzione di utilità che le rappresenti. Precisamente, u è una funzione di utilità di vNM che rappresenta le preferenze del decisore se e solo se lo è anche la funzione $v = au + b$, con $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$.

p	p_1	$\ldots$	p_n
$X \setminus S$	s_1	$\ldots$	s_n
x_1	$u(e_{11})$	$\ldots$	$u(e_{1n})$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_m	$u(e_{m1})$	$\ldots$	$u(e_{mn})$

Tabella 3.4: Un problema di decisione coi valori della funzione di utilità

ta di scegliere l'azione alla quale corrisponde il massimo tra i valori dell'utilità attesa. Si noti che possiamo introdurre la funzione così definita (su X): $f(x_i) = \sum_{j=1}^{n} p_j u(e_{ij})$, effettuando anche qui quel "corto circuito" già descritto a pagina 35.

X	valori dell'utilità attesa
x_1	$\sum_{j=1}^{n} p_j u(e_{1j})$
$\ldots$	$\ldots$
x_m	$\sum_{j=1}^{n} p_j u(e_{mj})$

Tabella 3.5: Un problema di decisione coi valori attesi della funzione di utilità

Non possiamo, per la finalità di questo scritto, soffermarci troppo a lungo sulla teoria delle decisioni per il decisore singolo. Occorre però fare ancora un passo in avanti, anche per una precisazione terminologica, legata allo "status" della distribuzione di probabilità su S: è tradizione distinguere tra situazioni di decisioni in condizioni di rischio e decisioni in condizione di incertezza. Si parla di decisioni in condizioni di rischio laddove la distribuzione di probabilità su S sia esogenamente data, e non vi sia materia di discussione in merito. Si pensi al problema da cui siamo partiti, ovverossia il gioco alla roulette: a meno che non siamo interessati a una situazione in cui la roulette potrebbe essere truccata, non vi è alcun motivo operativo per ritenere che la probabilità con cui "esce" ciascuno dei 37 numeri possibili sia diversa da $1/37$. Se invece non è plausibile ritenere che la probabilità assegnata ai vari possibili "stati di natura" sia esogenamente data, si parla di decisioni in condizione di incertezza. La teoria delle decisioni bayesiane (ovvero, la teoria del decisore bayesiano) formula opportune condizioni sulle preferenze del decisore in modo da poter ricondurre la scelta alla massimizzazione della utilità attesa: le probabilità assegnate ai vari stati di natura sono assegnate endogenamente dal decisore, a partire dalle sue preferenze sui dati del problema, i quali dati sono costituiti dalle varie "righe" della tabella (e null'altro!).

Non va ignorato, però, che il passaggio dalla teoria delle decisioni in condizioni di rischio a quella in condizione di incertezza non è scontato: non sempre è facile assegnare ad uno stato di natura la probabilità che esso si verifichi, come abbiamo potuto fare nel caso della roulette. Anzi, una importante corrente interpretativa del calcolo delle probabilità (mi riferisco ai cosiddetti "frequentisti") non ritiene accettabile assegnare valori di probabilità ad eventi per i quali non sia disponibile una "statistica" adeguata (vedasi, ad esempio, la discussione in French (1993)).

Chiudo questo intermezzo con un flash di storia. La teoria delle decisioni in condizioni di rischio e di incertezza nasce e si sviluppa assieme al calcolo delle probabilità, motivata anche dall'esigenza della valutazione del rischio e dell'assicurazione dei carichi delle imprese commerciali. Un importante contributo concettuale proviene dall'analisi di Bernoulli (1738), che mostra l'inadeguatezza del criterio del guadagno atteso per analizzare le decisioni in condizioni di rischio. Nel secondo dopoguerra, von Neumann e Morgenstern fissano le basi "assiomatiche" per l'uso del criterio dell'utilità attesa come criterio di scelta. La fondazione teorica della teoria delle decisioni in condizioni di incertezza, intimamente connessa alla teoria soggettiva del calcolo delle probabilità (de Finetti (1937)), è stata formulata da Savage (1954). La teoria delle decisioni in condizione di rischio ed incertezza costituisce le strumento di base delle decisioni in materia finanziaria ed assicurativa, e consente di esprimere concetti quali l'avversione al rischio, oppure di soppesare il ruolo dei rendimenti attesi e della loro rischiosità, nella scelta tra diversi possibili investimenti.

FINE INTERLUDIO

Abbiamo fatto un breve sommario della teoria delle decisioni, cercando di rendere esplicito cosa si intende quando si parla di decisore razionale (la sua razionalità verrà di fatto espressa come massimizzazione della utilità attesa). Ciò in quanto sono proprio "costoro" i soggetti sui quali la TdG concentra la sua attenzione. Visto che nel sommario abbiamo anche introdotto rapidamente i problemi di decisione in condizione di incertezza, approfitteremo di questo per sottolineare una importante analogia con il problema di quale strategia debba scegliere un giocatore in un gioco (a due persone) in forma strategica.

Consideriamo un gioco in forma strategica, in cui le strategie a disposizione dei due giocatori siano rispettivamente $x_1, \ldots, x_m$ ed $y_1, \ldots, y_n$. Rappresentiamo la forma strategica limitandoci però a riportare i soli payoff del giocatore I. Abbiamo la tabella 3.6: si noti l'analogia con una tabella tipica di un problema di decisioni in condizioni di incertezza.

Questa analogia fa sì che ci si possa domandare se non sia sufficiente utilizzare gli strumenti standard della teoria delle decisioni in condizioni di incer-

$X \setminus Y$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_n
x_1	$f(x_1, y_1)$	$\dots$	$f(x_1, y_j)$	$\dots$	$f(x_1, y_n)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	$f(x_i, y_1)$	$\dots$	$f(x_i, y_j)$	$\dots$	$f(x_i, y_n)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	$f(x_m, y_1)$	$\dots$	$f(x_m, y_j)$	$\dots$	$f(x_m, y_n)$

Tabella 3.6: Tabella parziale di un gioco in forma strategica

$X \setminus S$	s_1	$\dots$	s_j	$\dots$	s_n
x_1	$u(e_{11})$	$\dots$	$u(e_{1j})$	$\dots$	$u(e_{1n})$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	$u(e_{i1})$	$\dots$	$u(e_{ij})$	$\dots$	$u(e_{in})$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	$u(e_{m1})$	$\dots$	$u(e_{mj})$	$\dots$	$u(e_{mn})$

Tabella 3.7: Tabella di un problema di decisione in condizioni di incertezza

tezza per risolvere i problemi di interazione strategica[9]. Si noti, e qui sta la chiave del problema, che nella tabella 3.7 relativa alle decisioni in condizioni di incertezza non abbiamo indicato le probabilità che il decisore assegna ai vari stati di natura.

Al di là della suggestione che può dare la somiglianza formale fra le due tabelle, vale la pena evidenziare i tratti comuni e quelli differenti fra una situazione di decisione in condizioni di incertezza ed una di decisioni "interattive". Una fondamentale differenza è che la tabella relativa ad un gioco a due giocatori in forma strategica presenta una simmetria tra "righe" e "colonne" che manca per quelli di decisioni in condizioni di incertezza. Invece, una importante somiglianza sta nel fatto che per il giocatore I la sua scelta non determina il risultato finale: nel caso del gioco, esso sarà conseguenza anche della scelta effettuata dal giocatore II (sul quale *I non può esercitare nessuna influenza*) e che non gli è nota al momento in cui effettua la sua scelta: tutte condizioni che trovano una perfetta corrispondenza con gli "stati di natura" entro i quali è compreso quello vero (o che si realizzerà), che però egli non conosce al momento della scelta.

Ci si potrebbe chiedere se I non possa attribuire una probabilità a quei fattori che sfuggono al suo controllo e che però contribuiscono a determinare quale sia il risultato finale. Da un certo punto di vista questo programma può apparire ragionevole, ed essere in accordo con l'approccio bayesiano più

[9]Questa tesi è stata, ad esempio, sostenuta da Kadane e Larkey (1982).

avvertito, il quale richiede che il decisore faccia ogni sforzo per giustificare la distribuzione di probabilità che assegna agli eventi a lui ignoti. D'altro canto, emergono elementi di tipo nuovo. Uno è la riflessività della situazione. Il nostro decisore, intelligente, non può ignorare che questa volta ha di fronte a sé non la "cieca fortuna", bensì un decisore strutturalmente identico a lui (l'unica differenza tra I e II, oltre alle diverse strategie che hanno a disposizione, sta nel fatto che possono avere preferenze diverse sugli esiti). Quindi, ogni argomentazione che, sulla base della data tabella, lui può effettuare a sostegno di una tesi che potrebbe essere rilevante per individuare la distribuzione di probabilità, può essere riprodotta dall'altro. Ovviamente tutto questo non avviene nelle decisioni in condizioni di incertezza. Si badi bene che anche in questo caso gli stati di natura ignoti al decisore possono incorporare aspetti dovuti a decisioni di altri, ma si presuppone che non vi sia consapevolezza della interazione strategica. Intendo dire che altri decisori eventualmente coinvolti e le cui scelte contribuiscono a determinare il vero stato di natura, agiscono senza tenere conto del rapporto di interrelazione strategica esistente, anche magari per il semplice fatto che questo rapporto è così poco rilevante da rendere inutile una analisi di tipo strategico della situazione. Per fare un esempio, basta pensare alla decisione se usare il treno o l'auto per recarsi da Genova a Torino: è ovvio che il possibile traffico che uno può trovare in autostrada, e che è un fattore importante nella scelta del mezzo di trasporto, è conseguenza delle scelte di molti altri decisori, ma impostare questo problema come problema di interazione strategica non è molto utile. E' molto meglio procurarsi delle statistiche sulla densità di traffico che si trova in giorni analoghi a quello in cui si deve fare il viaggio, tenere conto del tempo atmosferico, di eventi particolari (fiera del libro, derby della Mole...), ascoltare le notizie sul traffico (se la tempistica della decisione lo consente), etc.

Ritornando alla nostra questione di fondo, si può fare un esempio molto semplice in cui si percepisce direttamente la rilevanza del fatto che "dall'altra parte" ci sia non "la natura" bensì un altro giocatore razionale ed intelligente. Si consideri il problema di decisione in condizioni di incertezza descritto nella tabella 3.8 (i numeri nelle caselle sono i valori di una funzione di utilità del decisore): la scelta tra T e B dipende dalla probabilità che I attribuisce ai due stati di natura s_1 e s_2. Se la probabilità che assegna ad s_1 è maggiore di 2/3, allora il decisore sceglierà T, se è minore, sceglierà B, se è uguale, sarà indifferente scegliere T o B.

Consideriamo una situazione analoga, però di interazione strategica, in cui riportiamo i payoff anche del secondo giocatore (vedi tabella 3.9). Sulla base della razionalità ed intelligenza del giocatore II, è immediato dedurre per I che la scelta che verrà fatta da II è L. Pertanto, la scelta per I diventa a questo punto facile: giocherà sicuramente T.

Potremmo sintetizzare tutto questo dicendo che il giocatore I, grazie a

$I \backslash S$	s_1	s_2
T	1	0
B	0	2

Tabella 3.8: Un esempio di decisione in condizioni di incertezza

$I \backslash II$	L	R
T	$(1, 2)$	$(0, 1)$
B	$(0, 2)$	$(2, 1)$

Tabella 3.9: Un gioco facile

considerazioni di carattere endogeno, basate sulla assunzione di razionalità e di intelligenza di II, ha potuto determinare la probabilità da attribuire agli elementi a priori incogniti che, congiuntamente alla sua scelta, determinano l'esito. Tutto ciò è del tutto estraneo ad una situazione di decisione in condizioni di incertezza: le considerazioni che portano il nostro decisore ad assegnare agli stati di natura la probabilità che si possano verificare sono esogene rispetto al problema di decisione. Non possiamo quindi pensare di ricondurre un problema di scelta in condizioni di interazione strategica ad un problema di scelta in condizioni di incertezza: le procedure che stanno alla base dell'assegnazione delle probabilità agli stati di natura sono differenti, e ciò è dovuto al diverso significato che gli stati di natura assumono nei due casi.

Cercheremo, allora, di determinare quale possa essere la scelta che i nostri decisori faranno, in un contesto di interazione strategica. Va subito detto che non esistono soluzioni semplici a questo problema, tranne che per casi particolari. Uno di questi è quello in cui ciascuno dei due giocatori abbia a sua disposizione una strategia fortemente dominante.

Dato un gioco (X, Y, f, g), una strategia $x_1 \in X$ domina fortemente una strategia $x_2 \in X$ per il giocatore I se:

$$f(x_1, y) > f(x_2, y) \quad \text{per ogni } y \in Y$$

Dirò che $x_1 \in X$ domina debolmente una strategia $x_2 \in X$ per il giocatore I se:

$$f(x_1, y) \geq f(x_2, y) \quad \text{per ogni } y \in Y$$

Dirò infine che $x_1 \in X$ domina strettamente una strategia $x_2 \in X$ per il giocatore I se x_1 domina debolmente x_2 ed inoltre esiste un $\hat{y} \in Y$ per cui:

$$f(x_1, \hat{y}) > f(x_2, \hat{y})$$

Dirò allora che $\hat{x} \in X$ è una strategia fortemente dominante per il giocatore I se $\hat{x}$ domina fortemente ogni altra strategia $x \in X$. Dirò che una strategia x è fortemente dominata se esiste una strategia x' che la domina fortemente. Per la stretta o debole dominanza si ha una terminologia del tutto analoga.

Devo dire che la terminologia riguardante le strategie dominanti non è cosa di cui vantarsi, in TdG. Noto inoltre che ciò che io ho qui chiamato "dominanza forte" viene spesso indicata come "dominanza", mentre ciò che ho chiamato "dominanza stretta" viene spesso indicato come "dominanza debole".

Ritornando al nostro problema di trovare soluzioni, se il giocatore I ha una strategia fortemente dominante $\hat{x}$ e se anche per il giocatore II c'è una strategia fortemente dominante $\hat{y}$, possiamo aspettarci che venga scelta la coppia $(\hat{x}, \hat{y})$. In tal caso diremo che il gioco ha soluzione in strategie fortemente dominanti.

Ci si rende facilmente conto, però, che questo avviene ben di rado. Anche se la procedura che suggerisco può essere criticata, invito il lettore a riempire "a caso" di payoff la tabella di un gioco: potrà constatare come siano molti i giochi che non hanno soluzione in strategie fortemente dominanti, anche nel caso più semplice, cioè quando sia I che II abbiano a disposizione solo un paio di strategie ciascuno.

Si può richiedere una condizione meno forte, che permette di ampliare un poco la classe dei giochi che sono "risolubili" mediante l'idea di "dominanza".

Vediamo questa idea attraverso un esempio. Consideriamo il gioco seguente (si noti che non vi sono strategie fortemente dominanti, né per I né per II):

I \ II	L	R
T	$(2, 1)$	$(3, 0)$
M	$(1, 0)$	$(1, 1)$
B	$(3, 1)$	$(2, 0)$

Si osserva subito che la strategia M è fortemente dominata (sia da T che da B). Detto questo, si può effettuare una considerazione molto interessante[10]. Il giocatore I non sceglierà M perché conosce i propri payoff ed è razionale. Più significativamente, il giocatore II è in grado di prevedere che I non giocherà M, purché conosca i payoff di I e purché sappia che I è razionale. Assumendo

[10]Che, tra l'altro, offre un esempio non banale di determinazione endogena delle probabilità che un giocatore assegna alle strategie dell'altro.

che M non verrà scelta da I, II può concentrare la propria attenzione sul gioco "ridotto" riportato nella tabella seguente:

$I \setminus II$	L	R
T	$(2, 1)$	$(3, 0)$
B	$(3, 1)$	$(2, 0)$

In questo gioco, II ha una strategia fortemente dominata, R. Quindi, non la giocherà. Ma la cosa più interessante è che I è in grado di prevedere questo fatto, purché:
- conosca i payoff di II e sappia che II è razionale
- sappia che II sa quanto sopra asserito (cioè: I deve sapere che II conosce i payoff di I e che sa che I è razionale).

Si noti che la seconda condizione è essenziale, per la correttezza della deduzione.

A questo punto, la strategia R di II non sarà utilizzata e quindi I (purché sappia che II sa che I sa...) sceglierà B.

In conclusione, ci aspettiamo che I giochi B e II giochi L. Nell'esempio (naturalmente scelto opportunamente) capita che attraverso la eliminazione iterata di strategie fortemente dominate sopravviva una sola coppia di strategie. In tal caso, il gioco si dice (ovviamente) risolubile per eliminazione iterata di strategie fortemente dominate.

La caratteristica essenziale che permette di applicare la procedura di eliminazione iterata è la conoscenza comune dei parametri del gioco, ed in particolare la *conoscenza comune della razionalità*. Ricordo che una proprietà è "conoscenza comune" ("common knowledge", vedi pagina 14) fra i giocatori se tutti sanno che questa proprietà è vera, tutti sanno che tutti sanno che è vera, etc.

Come si può capire, le condizioni che permettono di utilizzare l'idea di eliminazione iterata di strategie dominate sono delle condizioni significativamente restrittive, ma che comunque possono essere ritenute soddisfatte in alcune situazioni di interazione strategica. Un punto importante a favore di questa idea di "soluzione" è che (come succede per le strategie fortemente dominanti) per ciascun giocatore viene individuato un sottoinsieme delle sue strategie, che può essere considerato "sensato" in modo *indipendente* dal conoscere quale sia la strategia utilizzata dall'altro giocatore. Altro punto a favore è che si può provare come il risultato che si ottiene non dipende dall'ordine di eliminazione delle strategie[11]

[11]Fatto che non vale se si vanno ad eliminare le strategie strettamente dominate (vedi

Si tratta quindi di una interessante idea di soluzione, la quale ha tuttavia lo svantaggio di non fornire, in genere, delle previsioni molto specifiche. Come succede per l'idea di strategia fortemente dominante, anche qui vale la considerazione che in un gioco "preso a caso" di solito non si giunge alla determinazione di un'unica strategia iterativamente non dominata per ciascun giocatore.

Ad esempio, nel gioco della "battaglia dei sessi", che verrà introdotto a pagina 51, non vi è nessuna strategia fortemente dominata (ma neanche debolmente) e quindi questa procedura non riesce ad "eliminare" nessuna strategia.

Vi sono alcuni casi in cui invece ottengono dei risultati significativi: l'esempio più classico è dato dal modello di duopolio introdotto nel capitolo precedente, per il quale una sola strategia sopravvive alla eliminazione iterata[12]. In generale, comunque, questa strada permette di "risolvere" una classe di giochi troppo ristretta.

WEB

A questo punto è giunta l'ora di introdurre l'idea di equilibrio di Nash. Anticipiamo subito che per ogni gioco finito si può individuare un equilibrio di Nash (serviranno le "strategie miste", a questo scopo): è quindi soddisfatta una ragionevole condizione di universalità che ci aspettiamo debba avere un concetto di soluzione. Tuttavia, come vedremo in seguito, pagheremo a caro prezzo il raggiungimento di questo obiettivo.

Passiamo allora alla definizione formale di equilibrio di Nash, per un gioco con due giocatori in forma strategica.

Definizione 3.1 *Sia dato il gioco $G = (X, Y, f, g)$. Diremo che $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ è un equilibrio di Nash per G se:*

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \qquad \text{per ogni } x \in X \tag{3.1}$$

$$g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \qquad \text{per ogni } y \in Y \tag{3.2}$$

Alla base di questa definizione vi sono alcuni presupposti. Per capirli, dobbiamo però *ribadire e precisare l'interpretazione* che avevamo dato di G. Sappiamo che I sceglie quale strategia usare nell'ambito delle strategie che ha a disposizione: ovverossia, sceglie un elemento $x \in X$; analogamente, II sceglie $y \in Y$. La cosa importante da ricordare è che in un gioco in forma strategica si presume due giocatori effettuino le loro scelte contemporaneamente. Può essere utile immaginare che ciascuno dei giocatori, al momento di effettuare le sue scelte, sia da solo in una stanza con davanti dei tasti e che esprima la

---

Problema 28), il che può in parte spiegare come mai non ci siamo concentrati sull'idea di eliminazione delle strategie strettamente dominate.

[12] Il dettaglio dei calcoli lo si trova sulla pagina web.

sua scelta premendo il tasto corrispondente alla strategia scelta. Un qualche marchingegno (un computer, ad esempio), ricevute come input le scelte dei due giocatori, produrrà l'esito ad esse corrispondente. Assumiamo inoltre che le interazioni strategiche si realizzino una sola volta (più radicalmente: assumiamo che i due giocatori non si incontreranno più).

A questo punto, dobbiamo introdurre una specificazione *fondamentale*. L'idea di equilibrio di Nash rappresenta un concetto chiave nel contesto dei giochi *non cooperativi*. Osservo come la distinzione fra giochi cooperativi e non cooperativi è una delle demarcazioni concettuali fondamentali all'interno della TdG: parliamo di giochi *cooperativi* se ai giocatori è data facoltà di sottoscrivere *accordi vincolanti*; se questa opportunità non è data[13], allora la situazione è indicata come gioco *non cooperativo*[14]. Con la specificazione della impossibilità di sottoscrivere accordi vincolanti, abbiamo a disposizione una storiella che fornisce un qualche valore sostantivo alla definizione formale di equilibrio di Nash[15].

Immaginiamo che i due giocatori (prima di recarsi nelle loro "stanze" dove effettueranno le loro scelte) si mettano d'accordo per giocare l'uno la strategia $\bar{x}$ e l'altro la strategia $\bar{y}$. Se vogliamo che questo accordo (non vincolante!) possa essere considerato sensato, sembra ragionevole richiedere che esso sia robusto rispetto a considerazioni del tipo seguente (il giocatore I, chiuso da solo nella sua stanza, riflette):

> "Bene, ci siamo accordati per giocare in quel modo: visto che se violo l'accordo non mi succede nulla, vediamo se posso far meglio che giocare la $\bar{x}$ che si era detto. Le possibilità sono due: o l'altro giocatore non rispetta l'accordo, ed è allora inutile tenerne conto, oppure lo rispetta. In questo secondo caso, vediamo un po' se non c'è un'altra strategia x per cui $f(x, \bar{y}) > f(\bar{x}, \bar{y})$."

La definizione di equilibrio è strutturata proprio in modo da recepire queste considerazioni: le condizioni (1) e (2) dicono proprio che nessuno dei

[13]Quanto questa distinzione sia rilevante, dovrebbe essere evidente: non sarebbe carino che, una volta pagata un'automobile, il venditore si rifiutasse di consegnarcela. La possibilità di rendere obbligatoria l'esecuzione di un contratto sottoscritto fra le parti costituisce un rilevante contributo all'efficienza delle interazioni economiche (naturalmente ciò ha un costo: polizia, giudici, avvocati, carceri, etc.)

[14]Come già osservato a proposito del concetto di razionalità per i giocatori, anche qui è opportuno mettere in evidenza come il linguaggio specifico della TdG non corrisponda all'uso consueto dei termini. E' opportuno sottolineare in particolare che, quando ci si riferisce ai "giochi cooperativi", non si sottintende affatto una speciale "attitudine cooperativa" da parte dei giocatori. Semplicemente, essi hanno di fronte un "quadro istituzionale" che consente loro di stipulare accordi vincolanti. Null'altro.

[15]Si può osservare che il non poter sottoscrivere accordi vincolanti era sottinteso quando si parlava di strategie dominanti e dominate, come emergerà chiaramente esaminando il cosiddetto "dilemma del prigioniero": vedi pagina 49.

due giocatori ha convenienza a deviare dalla strategia che gli è "prescritta" dall'equilibrio, *fermo restando che neppure l'altro giocatore "devii"*.

L'idea di "stabilità di un accordo non vincolante" non è l'unica giustificazione che viene addotta per sostenere la rilevanza del concetto di equilibrio di Nash. Ve ne è una che è particolarmente interessante per almeno due ordini di motivi: essa fa direttamente leva sulle assunzioni di razionalità e di intelligenza dei giocatori e inoltre non richiede che i giocatori possano comunicare fra loro prima della effettiva interazione strategica modellizzata dal gioco. Penso sia evidente da queste ultime parole una debolezza rilevante della interpretazione che abbiamo appena visto: essa presuppone una fase di interazione fra i giocatori ("pre-play communication") che non viene esplicitamente modellizzata, il che rappresenta un notevole indebolimento della teoria nel suo complesso, per lo meno delle sue ambizioni di esaustività.

Vediamo allora questa seconda motivazione per l'equilibrio di Nash: l'idea è che esso incorpora condizioni *necessarie* per ogni concetto di soluzione che possa essere proponibile da una teoria fondata sulla razionalità e intelligenza degli individui. L'osservazione cruciale è che una teoria, la quale prescrivesse come "soluzione" per un gioco non cooperativo una coppia di strategie che non fossero un equilibrio di Nash, sarebbe una teoria auto-falsificantesi. Tale teoria, infatti, darebbe un incentivo ad almeno uno dei giocatori di comportarsi in modo diverso da quanto prescritto. Supponiamo che la teoria preveda che venga giocata la coppia di strategie $(\hat{x}, \hat{y})$. Se $(\hat{x}, \hat{y})$ non è un equilibrio di Nash, ciò vuol dire che per almeno un giocatore (supponiamo sia il giocatore I) c'è una strategia x^* per cui $f(x^*, \hat{y}) > f(\hat{x}, \hat{y})$. Quindi, quanto più la teoria è fondata e quindi tanto maggiore è l'aspettativa che i giocatori vi si conformino[16], tanto maggiore sarà l'incentivo per almeno uno di loro (nel nostro esempio, il giocatore I) a scegliere in modo *diverso* da come prescritto dalla teoria.

Questa seconda giustificazione per l'equilibrio di Nash sarebbe molto più persuasiva della prima se non fosse significativamente indebolita da una caratteristica dell'equilibrio di Nash che avremo occasione di incontrare più volte: in condizioni ragionevoli, avviene che un gioco abbia più di un equilibrio di Nash e che questi prescrivano scelte diverse per i giocatori. Se potessimo contare su una essenziale unicità dell'equilibrio di Nash, l'argomentazione che abbiamo visto a suo supporto avrebbe una molto maggiore forza di persuasione.

Abbiamo appena visto la definizione di equilibrio di Nash e motivazioni

[16] Si noti l'importanza della assunzione di intelligenza dei giocatori, a questo proposito: se la teoria è fondata, si può assumere che i nostri iper-intelligenti decisori non abbiano difficoltà a riprodurre nella loro mente i ragionamenti, le argomentazioni che vengono portati a sostegno della teoria. In altre parole, non si fa alcun ricorso ad alcun "principio di autorità", né si richiede che i giocatori parlino tra loro prima di giocare.

che possono indurre ad accreditarlo, se non come "la soluzione", comunque come un concetto importante.

Ora andremo a vedere alcuni degli esempi più classici della TdG, i quali mostrano caratteristiche e problemi dell'equilibrio di Nash. Voglio però premettere una osservazione.

Una persona (ingenua?) potrebbe aspettarsi che venissero date, prima o poi, delle evidenze osservativo/sperimentali relative alla rilevanza di questo concetto. Anche per capire quanto il paradigma del decisore razionale e intelligente, e le conseguenze che ne abbiamo tratto, possano trovare corrispondenza nei comportamenti effettivi, rilevabili. Dopotutto, i dati di un gioco e i risultati che la teoria dell'equilibrio di Nash prevede non sono impermeabili ad una verifica empirica, anche se alcuni aspetti non sono banali: in particolare, le assunzioni di conoscenza (conoscenza comune) dei parametri del gioco, incluse le preferenze dei giocatori, costituiscono un elemento delicato dal punto di vista dell'assessment sperimentale. Si noti che una verifica empirica non è irrilevante neppure se si vuole privilegiare l'aspetto normativo della teoria: se noi prescriviamo, suggeriamo dei comportamenti ai giocatori, basandoci su un modello della realtà che non ha il supporto di una verifica empirica, la nostra forza di convinzione non sarà molto alta. Per meglio dire, non dovrebbe essere molto alta: il successo dell'astrologia, di maghi e ciarlatani, la cui presenza si insinua anche all'interno della scienza (con maggior facilità dentro alle scienze "soft"), mi induce a temperare queste affermazioni.

Io non dedicherò molto spazio a questo aspetto (vedasi comunque il capitolo delle conclusioni), ma vorrei osservare come l'atteggiamento della stragrande maggioranza dei manuali (compresi quelli che io considero essere tra i migliori disponibili) è quello semplicemente di *ignorare* questa problematica, o comunque di darle un rilievo assolutamente marginale (eccezioni significative sono Dutta, 1999 e Davis, 1970). Questo fatto testimonia difficoltà importanti per quanto riguarda lo statuto scientifico della TdG.

Ma passiamo ora agli esempi classici di equilibri di Nash, che sono noti proprio perché mettono in evidenza aspetti problematici o significativi di questa idea di soluzione.

Esempio 3.1 Questo è il gioco più famoso: si tratta del "dilemma del prigioniero":

$I \backslash II$	NC	C
NC	$(2,2)$	$(0,3)$
C	$(3,0)$	$(1,1)$

Si vede che l'equilibrio di questo gioco è dato dalla coppia di strategie

(C, C). La cosa poco gradevole è che *entrambi i giocatori* preferirebbero l'esito derivante dalla coppia di strategie (NC, NC).

Abbiamo cioè un risultato "inefficiente". In teoria delle decisioni (ed in economia) il termine "efficienza" ha il seguente significato. Abbiamo una situazione i cui gli esiti (indico con E l'insieme di tutti gli esiti possibili) sono valutati da differenti decisori, che supponiamo essere indicati come $1, 2, \ldots, n$. Indicate con $\sqsubseteq_i$ le preferenze (deboli) del decisore i-esimo, si dice che un certo esito $\hat{e}$ è *efficiente*[17] se *non* esiste un altro esito e tale che si abbia:
- $\hat{e} \sqsubseteq_i e$ per ogni decisore i
- $\hat{e} \sqsubset_k e$ per almeno un decisore k.

Se le preferenze del generico decisore i sono rappresentate dalla funzione di utilità $u_i : E \to \mathbb{R}$, dire che $\hat{e}$ è efficiente significa che non esiste un altro esito e tale che:
- $u_i(\hat{e}) \leq u_i(e)$ per ogni decisore i
- $u_k(\hat{e}) < u_k(e)$ per almeno un decisore k.

In effetti, nel "dilemma del prigioniero", all'esito derivante dall'equilibrio (cioè, all'esito derivante da (C, C)), entrambi i giocatori preferiscono l'esito derivante da (NC, NC), cosa che si vede chiaramente dalla tabella in quanto entrambi i numeri nella casella individuata da (NC, NC) sono maggiori dei numeri nella casella individuata da (C, C).

La ragione per cui questo gioco viene chiamato "dilemma del prigioniero" risale ad una storia inventata tanto tempo fa per illustrare la teoria dei giochi ad una conferenza per non specialisti... La storiella è la seguente. Due individui vengono arrestati dalla polizia e chiusi in celle separate; essi sono sospettati di aver compiuto un crimine (una rapina, ad esempio) che, se provato, comporta una pena di 3 anni. La polizia ha solo le prove per farli condannare a 1 anno per un crimine lieve (ricettazione, porto abusivo d'arma...), per cui promette che se uno confesserà e l'altro no, chi avrà confessato sarà libero. Ovviamente, se entrambi confessano, verranno condannati (ma ad una pena un poco più lieve, data la loro collaborazione: 2 anni). Il significato dei numeri nelle caselle può essere messo in diretta correlazione col numero di anni di *sconto* di pena (rispetto alla condanna più grave).

Soffermiamoci un momento ancora sul significato dei numeri nelle caselle (un aspetto sul quale molto spesso si glissa, ben poco opportunamente). I numeri *devono* rappresentare il valore che le due funzioni di utilità assegnano al risultato che compare nella casella. Ad esempio, il risultato di NC e C è: il giocatore I sconta 3 anni e II nessun anno. Per come abbiamo definito un gioco in forma strategica, dobbiamo assegnare a questo esito il valore delle

[17] Osservo che si può anche definire l'efficienza debole: un esito $\hat{e}_i$ è debolmente efficiente se *non* esiste un altro esito e tale che si abbia $\hat{e} \sqsubset_i e$ per ogni decisore i. Molto spesso ci si riferisce a questi concetti di "efficienza" come "efficienza paretiana", od anche (pur se impropriamente) "ottimalità paretiana", in omaggio a Pareto (1906).

funzioni di utilità rispettivamente di I e di II: per fare questo, abbiamo assunto che il numero di anni di sconto di pena rappresenti correttamente l'utilità che ciascun decisore assegna ai vari esiti possibili. Si noti che ciò non basta: occorre che questi valori (come tutti i parametri del gioco) siano conoscenza comune fra i giocatori. Siamo così sicuri che il giocatore II conosca il valore che la funzione di utilità di I assegna a 3 anni di galera? E che I sappia che II lo sa, etc.? Come è facile capire, queste ipotesi sono molto forti. D'altro canto, in questo particolare esempio, è sufficiente per l'analisi sapere che per entrambi i giocatori "meno anni di galera faccio, meglio è" (e che ognuno è interessato solo ed esclusivamente ai *suoi* anni di galera). Conoscere questo è sufficiente per poter applicare la nostra analisi e per poter affermare che si avrà un risultato inefficiente (e non è irrealistico assumere che queste caratteristiche siano conoscenza comune fra i giocatori).

Naturalmente questo gioco non è importante per via della storiella, ma lo è perché mostra come l'esito prevedibile di un gioco possa essere *inefficiente*, ancorché i giocatori siano razionali ed intelligenti. In questo senso, il "dilemma del prigioniero" rappresenta l'esempio paradigmatico di molte situazioni in cui si verifica questo fenomeno. Oltretutto, le strategie che danno luogo all'equilibrio di Nash sono anche strategie fortemente *dominanti*. Cioè, la scelta di B dà ad I un risultato migliore che se non avesse scelto T, *qualunque* sia la scelta fatta da II. Questo fatto rende ancora più netto il "messaggio" che proviene da questo gioco e quindi non ci si deve sorprendere del fatto che esso sia da sempre al centro dell'attenzione. Dopo tutto, questo semplice giochino ci dice una cosa che è sorprendente: il fatto che i decisori siano razionali ed intelligenti non è sufficiente per consentire loro di ottenere un risultato efficiente!

Esempio 3.2 Anche questo è un gioco famoso: si tratta della "battaglia dei sessi":

$I \backslash II$	L	R
T	$(2,1)$	$(0,0)$
B	$(0,0)$	$(1,2)$

Tabella 3.10: La "battaglia dei sessi"

Qui di equilibri ce ne sono due: (T, L) e (B, R). Il guaio è che:

> se i due giocatori hanno la possibilità di parlarsi prima e possono accordarsi sulla scelta di una di queste due coppie di strategie, sulla base delle considerazioni che abbiamo fatto immaginiamo

che questa coppia venga effettivamente "giocata". Ma quale delle due coppie sceglieranno? I preferisce l'equilibrio (T, L), mentre II preferisce l'equilibrio (B, R);

se i due giocatori non hanno questa possibilità, devono scegliere quale strategia giocare "al buio". In questo caso, non è facile capire come giocare. Perché I potrebbe decidere di giocare T, in quanto mira all'equilibrio che egli preferisce. Per le stesse identiche ragioni II potrebbe decidere di giocare R. Risultato: entrambi guadagnerebbero 0, anziché il 2 sperato.

La storiella che in questo caso dà il nome al gioco riguarda la scelta se andare a teatro o all'incontro di calcio. Potete immaginare marito (giocatore I) e moglie (giocatore II): il marito preferisce il calcio (la scelta di andare allo stadio è indicata con il simbolo T per il giocatore I e col simbolo L per II), mentre la moglie preferisce il teatro (indicato con B per il giocatore I e con R per II). In ogni caso preferiscono essere assieme anzichè in due posti diversi. Ognuno deve recarsi per suo conto al posto che ritiene opportuno.

Cosa rende così interessante questo gioco? Il fatto che un gioco abbia due equilibri non è di per sé particolarmente grave. Il guaio è che questi due equilibri non sono "equivalenti": come già notato, I preferisce (T, L) e II invece (B, R). E' chiaro che questo è un limite significativo per il valore "predittivo" dell'equilibrio di Nash.

Ma la non unicità mette in evidenza anche un altro aspetto, che esprime una debolezza di tipo *fondamentale* dell'equilibrio di Nash: un equilibrio di Nash è una ***coppia*** di strategie che "aut simul stabunt, aut simul cadent". Un equilibrio di Nash **NON** è ottenuto per giustapposizione di due strategie determinate in modo indipendente per i due giocatori. Intendo dire che *non ha senso alcuno* dire che T è una strategia d'equilibrio per I. Perché questa terminologia avesse senso, dovrebbe aversi che, giustapponendo a piacere una "strategia d'equilibrio" per I (ad esempio, T) con una "strategia d'equilibrio" per II (ad esempio, R), ciò che si ottiene (nel nostro esempio, (T, R)) fosse un equilibrio. Ovverossia che l'insieme degli equilibri di Nash avesse la cosiddetta proprietà di "rettangolarità", che verrà espressa in termini formali a pagina 61. Cosa che evidentemente è falsa, visto che (T, R) *non* è un equilibrio di Nash.

Esempio 3.3 Un gioco che ha alcune caratteristiche simili alla battaglia dei sessi è un gioco di puro coordinamento, un cui semplice prototipo lo troviamo descritto nella tabella 3.11.

I giocatori, come si vede, hanno le stesse preferenze sugli esiti (in effetti, ciò è quello che caratterizza i giochi di puro coordinamento).

Parrebbe una situazione idilliaca, senza alcuna parvenza di conflitto fra i due decisori: tutto vero, ma ciò nonostante la scelta da operare è quanto mai

$I \backslash II$	L	R
T	$(1,1)$	$(0,0)$
B	$(0,0)$	$(1,1)$

Tabella 3.11: Gioco di puro coordinamento

difficile se pensiamo che i giocatori debbano effettuare la loro scelta in modo indipendente (cioè, senza poter comunicare). Ci ritroviamo di fronte a quella difficoltà già osservata per la battaglia dei sessi: un equilibrio di Nash è una *coppia* di strategie: quanto questo fatto sia rilevante emerge nel modo più "drammatico" proprio nei giochi di puro coordinamento.

Anche se si potrebbe sostenere che l'assunzione di scelte indipendenti di per sé implichi quello che sto per dire, mi pare opportuno affermare esplicitamente che stiamo escludendo per i due giocatori la possibilità di accordarsi *prima* di giocare. Intendiamo cioè dire che non vi è la presenza di una fase precedente in cui i giocatori possono comunicare tra loro (fase che, si noti, non includiamo in modo esplicito nella descrizione formale del gioco). E' chiaro che, se è data ai giocatori la possibilità di comunicare[18], essi potranno facilmente coordinarsi, decidendo di giocare rispettivamente T ed L (oppure B ed R, è del tutto indifferente).

Si noti che in genere la possibilità di coordinare le scelte non si limita solo al caso in cui essa sia frutto di una comunicazione esplicita in merito intercorsa fra i due giocatori (può essere verbale, scritta, o comunque imperniata sullo scambio di segnali decodificabili da ambo le parti), ma può derivare dall'analisi della situazione. Basti pensare al gioco della tabella 3.12. In questo gioco, pur se (T, L) e (L, R) sono entrambi equilibri, ci aspettiamo che decisori intelligenti siano capaci di coordinare le loro scelte anche in modo implicito, e scelgano rispettivamente T ed L.

$I \backslash II$	L	R
T	$(2,2)$	$(0,0)$
B	$(0,0)$	$(1,1)$

Tabella 3.12: Un altro gioco di coordinamento

La situazione descritta in questo esempio potrebbe corrispondere al caso in cui due amici si perdano in una manifestazione ed abbiano due soli punti

[18]In modo reciprocamente intelligibile, s'intende

per potersi ritrovare. Se ad entrambi piace la birra ed uno di questi posti è un pub, non dovrebbe essere molto difficile ritrovarsi. A volte questa opzione di coordinamento implicito potrebbe dipendere da fattori esterni: anche se non gli piace la birra (in termini teorici, se non hanno delle differenze a livello delle preferenze), potrebbero però essere di origine inglese e possiamo allora immaginare che un pub possa essere un "focal point" più che non un qualsiasi bar. Il termine "focal point" non è stato usato a caso: è un omaggio a Schelling che ha introdotto questo termine nella letteratura, in un suo importante libro del 1960.

Vediamo un altro esempio.

Esempio 3.4 Il gioco della tabella 3.13 è interessante per varie ragioni: è un esempio di gioco a somma zero; descrive un gioco molto familiare (pari o dispari), tant'è vero che l'ho usato proprio come punto di partenza nel capitolo precedente; peccato che *non abbia equilibri*, come è facile verificare.

$I\backslash II$	P	D
P	$(-1,1)$	$(1,-1)$
D	$(1,-1)$	$(-1,1)$

Tabella 3.13: Il "pari o dispari"

Quest'ultimo esempio pone un problema molto importante. Se vogliamo proporre l'idea dell'equilibrio di Nash come "soluzione" del gioco, non possiamo certo essere soddisfatti se un gioco semplice come questo non ammette soluzione. Avremmo giustamente scarsa fiducia in una teoria che non ci permetta di dare risposte in un caso così semplice. Ma così non è. La chiave per uscire fuori da questo problema sta nell'introduzione delle strategie miste.

INTERLUDIO

Cosa sono le strategie miste? Più e prima che darne la definizione formale, osservo che si tratta di riconsiderare in profondità quale sia la *scelta* effettuata da un decisore. E' sembrato ovvio, fino a questo punto, che il problema di scelta per un decisore (sia in isolamento che in interazione con altri) fosse quello di scegliere, tra varie alternative disponibili, quella per lui "migliore" (dove ovviamente il termine "migliore" è da intendersi rispetto alle preferenze del decisore).

L'idea di strategia mista comporta un cambiamento importante di punto di vista: il decisore sceglierà non più un'alternativa, bensì una distribuzione di probabilità sulle alternative. Ad esempio, nel caso del "pari o dispari", potrebbe decidere di giocare P con probabilità $1/3$ e D con probabilità $2/3$. Oppure potrebbe decidere di giocare P e D con identica probabilità, etc.

Possiamo concretizzare questa nuova idea, immaginando che il nostro decisore utilizzi un opportuno "meccanismo aleatorio" per implementare la sua scelta. Ad esempio, che decida di lanciare un dado e di giocare P se dal dado escono fuori i numeri 1 o 2, e di giocare D altrimenti. Oppure, qualora volesse giocare P e D con uguale probabilità, basta che decida di giocare P se esce uno dei numeri 1, 2 o 3.

Abbiamo così ottenuto un ampliamento significativo delle opzioni per i nostri decisori. Prima di chiederci se si tratti di un effettivo ampliamento (è importante anticipare che la risposta sarà affermativa: se così non fosse, sarebbe difficile motivare questa "complicazione", questo "shift" nella definizione di quale sia l'oggetto di scelta consapevole per un decisore razionale), ci dobbiamo domandare se siamo in grado di maneggiare questa novità. La risposta è positiva, ammesso che i decisori si conformino alla teoria di von Neumann e Morgenstern. Ovverossia, ammesso che siano in grado di valutare in modo coerente scelte che danno un risultato che dipende da fattori aleatori. Da un punto di vista calcolistco, è sufficiente assumere che i giocatori utilizzino i loro payoff attesi.

Vediamolo direttamente nel nostro esempio. Supponiamo che il giocatore I decida di giocare P e D con probabilità $1/2$, mentre il giocatore II gioca P con probabilità $1/3$ e D con probabilità $2/3$.

Se ammettiamo, come è ragionevole nel nostro contesto, che i due giocatori usino due meccanismi aleatori *indipendenti*, avremo la seguente distribuzione di probabilità sulle coppie di strategie:

$I\backslash II$	P	D
P	1/6	2/6
D	1/6	2/6

Infatti, grazie all'ipotesi di indipendenza, la probabilità che venga giocata ad esempio la coppia di strategie (P, D) è data dal prodotto della probabilità che sia giocato P da I e che sia giocato D da II: $1/2 \cdot 2/3 = 2/6$.

Ne segue che possiamo calcolare l'utilità attesa per I, se assumiamo che egli sia un decisore di vNM:

$$\frac{1}{6}(-1) + \frac{2}{6}(1) + \frac{1}{6}(1) + \frac{2}{6}(-1)$$

I calcoletti qui sopra possono ovviamente essere sempre fatti, ma sono *significativi*, nel senso che il loro risultato può essere utilizzato per descrivere le preferenze del decisore I, se stiamo per l'appunto maneggiando una funzione di utilità di vNM[19].

Osservato che siamo in grado di assegnare un significato a quello che stiamo facendo, noto che questo tipo di considerazioni e di calcoli possono essere generalizzati a un qualunque gioco i cui spazi delle strategie siano finiti, portando all'introduzione di ciò che viene chiamato "estensione mista" di un gioco. Vediamo rapidamente i dettagli formali.

Sia dato un gioco (X, Y, f, g), con $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ ed $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Possiamo considerare $\Delta(X) = \{p \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^m p_i = 1 \text{ e } p_i \geq 0 \text{ per ogni } i\}$, cioè l'insieme delle distribuzioni di probabilità su X. Analogamente per Y. Possiamo poi calcolare, date $p \in \Delta(X)$ e $q \in \Delta(Y)$, il valore atteso $\hat{f}(p,q) = \sum_{i=1}^m \sum_{i=1}^n p_i q_j f(x_i, y_j) = p_1q_1f(x_1,y_1) + p_2q_1f(x_2,y_1) + \ldots + p_mq_1f(x_m,y_1) + p_1q_2f(x_1,y_2) + \ldots + p_mq_2f(x_m,y_2) + \ldots + p_1q_nf(x_1,y_n) + \ldots + p_mq_nf(x_m,y_n)$, ed analogamente per g.

La nuova struttura matematica che otteniamo: $(\Delta(X), \Delta(Y), \hat{f}, \hat{g})$, viene detta *estensione mista* del gioco (X, Y, f, g).

E' assai rilevante il fatto che $(\Delta(X), \Delta(Y), \hat{f}, \hat{g})$ è esso stesso un gioco, nel senso che *corrisponde alla definizione che abbiamo dato a suo tempo di gioco*: possiamo quindi in particolare considerare anche per $(\Delta(X), \Delta(Y), \hat{f}, \hat{g})$ la nozione di equilibrio. Si noti che spesso, anziché parlare di equilibrio di Nash per $(\Delta(X), \Delta(Y), \hat{f}, \hat{g})$ (cioè, per l'estensione mista di (X, Y, f, g)), si usa la terminologia "equilibrio di Nash in strategie miste per (X, Y, f, g)"; di riflesso, ci si riferisce alle strategie del gioco di partenza come alle strategie "pure".

Il teorema di von Neumann del 1928 e quello di Nash del 1950 garantiscono
WEB l'esistenza di equilibri per l'estensione mista di un gioco finito[20]. La differenza fra i due risultati sta nel fatto che il teorema di von Neumann era provato per giochi a somma zero, mentre Nash ne ha esteso la validità eliminando questa restrizione. Siamo quindi certi che il gioco del "pari o dispari" abbia equilibrio in strategie miste. Per la precisione, ha un unico equilibrio, che prevede per entrambi i giocatori di giocare P o D con uguale probabilità.

Vale la pena di notare (anche perché questa osservazione è cruciale nella dimostrazione di Nash del 1950) che un equilibrio di Nash non è altro che un *punto fisso* per la corrispondenza di miglior risposta.

Vediamo allora come si definisce questa "miglior risposta". Dato un gioco $G = (X, Y, f, g)$, consideriamo un elemento $\hat{y}$ di Y: l'insieme degli elementi $\hat{x} \in X$ per cui

$$f(\hat{x}, \hat{y}) \geq f(x, \hat{y}) \quad \text{per ogni } x \in X$$

[19] La rilevanza di questo fatto è ben comprensibile qualora si pensi che la prima formulazione assiomatica della teoria delle decisioni in condizioni di rischio è dovuta proprio a von Neumann e Morgenstern nella seconda edizione, del 1947, del loro libro fondativo.

[20] Per chi è interessato, sono disponibili sulla pagina web gli enunciati di questi due teoremi.

viene detto "insieme di miglior risposta" per I alla strategia $\hat{y}$ e verrà da me indicato con il simbolo $R_I(\hat{y})$.

E' di dimostrazione immediata il fatto che $(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio di Nash per G se e solo se $\bar{x} \in R_I(\bar{y})$ e $\bar{y} \in R_{II}(\bar{x})$. Questa coppia di condizioni può essere "riscritta" come condizione di "punto fisso" per la corrispondenza di miglior risposta: se ad ogni $(\hat{x}, \hat{y}) \in X \times Y$ associamo $R(\hat{x}, \hat{y}) = R_I(\hat{y}) \times R_{II}(\hat{x})$, sottoinsieme di $X \times Y$, otteniamo una corrispondenza di $X \times Y$ in se stesso. La condizione $\bar{x} \in R_I(\bar{y})$ e $\bar{y} \in R_{II}(\bar{x})$ non significa altro che $(\bar{x}, \bar{y}) \in R(\bar{x}, \bar{y})$, ovvero che $(\bar{x}, \bar{y})$ è un punto fisso per la corrispondenza R. Visto che questa condizione è equivalente al fatto che $(\bar{x}, \bar{y})$ sia un equilibrio di Nash, un teorema il quale garantisca l'esistenza di un punto fisso per la corrispondenza R ci fornisce automaticamente un teorema di esistenza di equilibri di Nash. In effetti, la dimostrazione di Nash del 1950 consiste nel provare che si può utilizzare il teorema di punto fisso di Kakutani (1941) a tale scopo.

Sulla pagina web si possono trovare alcuni esempi in cui viene data una rappresentazione grafica di questa procedura, in particolare quando si usano le strategie miste. Qui mi limito ad osservare come l'idea di "miglior risposta" possa essere usata per trovare facilmente eventuali equilibri di Nash per un gioco finito[21]. Basta rappresentare il gioco in forma tabellare, utilizzando funzioni di utilità per i due giocatori, e procedere nel modo seguente. Su ogni colonna si individuano gli elementi preferiti del giocatore I e si evidenziano in qualche modo (ad esempio, sottolineando il numero che rappresenta il payoff per I). Stesso procedura, riga per riga, per il giocatore II. Eventuali celle per le quali i payoff di entrambi i giocatori risultano essere sottolineati, individuano un equilibrio di Nash per il gioco. Vediamolo con un esempio: WEB

$I \backslash II$	L	C	R
T	$(\underline{2}, 0)$	$(-1, 0)$	$(\underline{5}, \underline{1})$
M	$(1, \underline{2})$	$(\underline{3}, 0)$	$(-2, 1)$
B	$(0, -4)$	$(\underline{3}, \underline{0})$	$(1, \underline{0})$

come si vede, nella colonna "L" abbiamo sottolineato 2 perché è il payoff più alto per I che compare in quella colonna (detto altrimenti, T è la "miglior risposta" di I alla strategia L). Analogamente, sulla riga "B" abbiamo sottolineato i due "0", che sono il payoff più alto per II su quella riga.

Come si può verificare facilmente, (T, R) e (B, C) sono due equilibri per questo gioco.

Dopo questa digressione sull'idea di miglior risposta, ritorniamo ad occuparci delle strategie miste. Per quanto riguarda gli altri giochi che abbiamo

[21] Purché le strategie non siano troppe! Di certo funziona per ogni gioco la cui tabella occupi solo una pagina.

visto negli esempi precedenti, essi avevano tutti equilibri: come è facile verificare[22], un equilibrio di un gioco finito rimane anche un equilibrio per l'estensione mista (con la reinterpretazione "obbligata" per cui giocare una strategia pura equivale a giocare una strategia mista che assegna probabilità uno a quella strategia). Nulla vieta, però, che si aggiungano nuovi equilibri in strategie miste.

Nel caso del "dilemma del prigioniero", la considerazione delle strategie miste non introduce alcun nuovo equilibrio (conseguenza del fatto che l'equilibrio è ottenuto in corrispondenza di strategie fortemente dominanti).

Per la "battaglia dei sessi", avviene invece che ai due equilibri già visti se ne aggiunga uno in strategie miste. Questo terzo equilibrio prevede che il giocatore I giochi T con probabilità $2/3$ e B con probabilità $1/3$, e che II giochi L con probabilità $1/3$ ed R con probabilità $2/3$. E' interessante calcolare quali siano i payoff attesi per i due giocatori in questo equilibrio: per il giocatore I il payoff atteso è $2/9 \cdot 2 + 2/9 \cdot 1 = 2/3$; anche per il giocatore II il payoff atteso è $2/3$.

E' opportuno soffermarsi un attimo su questo nuovo equilibrio, sia per sottolinearne alcuni aspetti, sia per evitare che vengano fatte delle considerazioni scorrette. Cominciamo da questo rischio: il fatto che il payoff atteso sia uguale per entrambi i giocatori può attirare l'attenzione su questo equilibrio come un modo per risolvere la "tensione competitiva" che esiste tra I e II in questo gioco: abbiamo, infatti, che I preferisce l'equilibrio (T, L), mentre II preferisce l'equilibrio (B, R). L'equilibrio in strategie miste offre ai due giocatori lo stesso payoff. Abbiamo allora un meccanismo interessante che può essere usato dai due giocatori per essere su un piede di parità, almeno in termini di payoff attesi[23]? Entro certi limiti, sì. Ma non dobbiamo attribuire ai numeri ottenuti un significato che essi non hanno. Il fatto che il payoff atteso sia uguale per i due giocatori non ha alcun significato reale. Possiamo cambiare i "numeri" senza cambiare minimamente la struttura delle preferenze dei giocatori (vedi la nota a pagina 38), sostituendo alla matrice tradizionale che abbiamo finora usato per rappresentare la battaglia dei sessi, quella di tabella 3.14. Per ottenere questa tabella abbiamo moltiplicato per 100 i payoff per I, ed abbiamo invece sottratto 2 ai payoff di II: non abbiamo fatto altro che usare altre

[22] Si noti che il risultato non è scontato: se $(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio di Nash, il giocatore I non ha alcuna strategia *pura* x per cui $f(x, \bar{y}) > f(\bar{x}, \bar{y})$. A priori, però, potrebbe anche esistere una strategia mista che dà ad I un payoff migliore (in termini di utilità attesa) di $f(\bar{x}, \bar{y})$.

[23] Va da sé che, "ex post", ovverossia quando i meccanismi aleatori usati dai due giocatori avranno operato, il risultato non potrà essere che uno di quelli previsti dal gioco. Ma sarà la sorte ad avere scelto, ed in una situazione in cui è inevitabile una asimmetria "finale" tra i due giocatori (per lo meno, per quanto riguarda i risultati efficienti): non molto diversamente da quando si "tira a sorte" a chi tocchi l'ultima caramella rimasta, o giocare col bianco nel gioco degli scacchi.

rappresentazioni (ma equivalenti!) delle preferenze dei due giocatori mediante funzioni di utilità di vNM.

$I \backslash II$	L	R
T	$(200, 0)$	$(0, -2)$
B	$(0, -2)$	$(100, -1)$

Tabella 3.14: Sempre la "battaglia dei sessi"!

Gli equilibri, sia in strategie pure che miste, rimangono gli stessi. Non c'è bisogno di fare alcun calcolo per convincersi che i payoff dell'equilibrio misto non saranno più uguali per i due giocatori.

Cosa rimane, allora, una volta eliminate letture fallaci della "battaglia dei sessi"?

A livello degli equilibri in strategie pure, rimane inalterato il fatto che I preferisce l'equilibrio (T, L) a (B, R), e viceversa per II. Così come continua a rimanere il già menzionato problema della non "rettangolarità" dell'insieme degli equilibri di Nash, di cui ci occuperemo più in là. Per quanto riguarda l'equilibrio in strategie miste, esso rimane interessante in quanto compromesso, nel senso che *dà uguali chance ai due equilibri in pure* di manifestarsi. Osservo che il payoff atteso per I è $2/9 \cdot 200 + 2/9 \cdot 100 = 200/3$, mentre per II è $4/9 \cdot (-2) + 1/9 \cdot (-2) + 2/9 \cdot (-1) = -4/3$. Come si può agevolmente verificare, questi payoff offrono ai giocatori lo stesso identico livello di "insoddisfazione" rispetto alla loro alternativa preferita: possiamo quindi sostenere con ragione che l'equilibrio in strategie miste rappresenta una sorta di compromesso fra i due giocatori che, per così dire, mettono nelle mani della sorte quanto otterranno, partendo però su un piede di parità per quanto riguarda il risultato atteso, misurato in termini delle loro aspettative e possibilità.

Non possiamo, comunque, riporre troppe speranze nell'equilibrio della battaglia dei sessi in strategie miste. Se esso ha il pregio di porre "a priori" i due giocatori sullo stesso piano, ha anche però un notevole difetto: l'esito previsto, in termini di payoff atteso, è *inefficiente*. Infatti, entrambi i giocatori preferiscono ciascuno degli equilibri in pure all'equilibrio in strategie miste. Possiamo dire quindi che i giocatori "pagano" a caro prezzo questa interessante possibilità "egualitaria", il che ne limita considerevolmente l'appeal. Osservo come la "chiave" che ci conduce all'inefficienza del risultato sta nella assunzione che i giocatori usino meccanismi aleatori *indipendenti*: torneremo in seguito su questa assunzione, per vedere se e come possa essere eliminata.

Si noti che le strategie miste non hanno alcun ruolo speciale per quanto riguarda l'inefficienza che abbiamo osservato. Il gioco in tabella 3.15 presenta, in strategie pure, lo stesso fenomeno: tre equilibri, di cui uno preferito da I, un altro da II ed un terzo che è inefficiente.

$I \backslash II$	L	C	R
T	$(3,2)$	$(0,0)$	$(0,0)$
M	$(0,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$
B	$(0,0)$	$(0,0)$	$(2,3)$

Tabella 3.15: Un gioco con tre equilibri in pure, di cui uno inefficiente

Chiudo la digressione sulle strategie miste citando un caso molto interessante in cui effettivamente sono utilizzate (e da utilizzare!) le strategie miste:
WEB si tratta del *bluff* nel poker. E' disponibile, sulla pagina web, la descrizione di un modello molto semplificato di poker, con la dimostrazione (formale e "concreta") che la scelta di bluffare con una ben precisa scelta della probabilità da attribuire alle strategie pure è ottimale.
FINE INTERLUDIO

A questo punto abbiamo a disposizione un concetto di soluzione, l'equilibrio di Nash, per il quale possiamo garantire l'esistenza in condizioni abbastanza generali.

Questa nozione di soluzione per un gioco non rappresenta certo la "fine della storia". Vi è in effetti una tensione fra una sua pretesa universalistica, derivante dalle motivazioni addotte in suo favore ed anche dal fatto che abbiamo a disposizione un teorema che ne garantisce l'esistenza, e d'altro lato i problemi che si trascina dietro, che abbiamo introdotto grazie agli esempi e che ora discuteremo in termini generali.

C'è il problema dell'inefficienza dell'equilibrio di Nash, di cui il dilemma del prigioniero offre l'esempio più noto. Ma proprio il dilemma del prigioniero mostra come questo sia un problema inerente alla scelta razionale in condizioni di interazione strategica: le scelte di equilibrio del giocatore sono rappresentate da strategie dominanti, soddisfano quindi un criterio molto forte di razionalità, almeno nel quadro concettuale in cui ci siamo posti, e quindi questo "difetto" non è ascrivibile ad una "scelta errata" dell'idea di soluzione rappresentata dall'equilibrio di Nash. Dico di più: che da una situazione di interazione strategica possa scaturire un risultato inefficiente è un *fatto* ampiamente osservato, col quale dobbiamo convivere e che l'equilibrio di Nash lo possa prevedere è un punto a favore di questo concetto di soluzione. Noto come altri famosi modelli portano a un risultato inefficiente: il modello di oligopolio che abbiamo visto nel precedente capitolo e la famosa "tragedia dei commons" (rinvio a manuali standard di TdG per i dettagli di questo modello[24]; suggerisco il libro di Dutta (1999)).

Ben diverso è il discorso che scaturisce da situazioni, quali quella della battaglia dei sessi o il gioco di puro coordinamento, in cui abbiamo più di un equilibrio di Nash. Si noti che questo non è un problema che possiamo ignorare, o trattare come una curiosità: vi sono risultati matematici che garantiscono che, preso "a caso" un gioco finito, questo *normalmente* avrà più di un equilibrio di Nash (Harsanyi (1973)).

Come già notato, il problema essenziale non è il fatto che un gioco abbia più di un equilibrio di Nash. Anche in un problema di scelta individuale ciò può capitare, ma non è un dramma, perché ovviamente in tal caso il decisore è indifferente rispetto alle molteplici alternative ottimali che ha di fronte, e quindi l'unica cosa cui deve fare attenzione è di non fare la fine dell'asino di Buridano.

Nel caso dell'interazione strategica, la non unicità degli equilibri risulta essere devastante per due ordini di motivi, che vedremo in dettaglio:

- i decisori possono avere preferenze contrastanti sui diversi equilibri
- non vale la proprietà di "rettangolarità"

Non a caso, la "battaglia dei sessi" è un gioco famoso: proprio perché presenta in nuce entrambi questi fenomeni. Riprendo quanto detto a proposito della "rettangolarità" per la battaglia dei sessi: avevamo osservato che, se I sceglie T e II sceglie R, si ottiene (T, R) che non è un equilibrio di Nash (e, tra l'altro, i giocatori ottengono un risultato non molto allettante). Come detto, questo è legato al fatto che un equilibrio di Nash è una *coppia* di strategie. Questo fatto può avere degli effetti perversi in caso di non unicità. Tutto ciò non avverrebbe se valesse la proprietà di "rettangolarità", che finalmente descriviamo: cioè se, dati due equilibri di Nash (x^*, y^*) ed (x^{**}, y^{**}), si potesse garantire che sia (x^*, y^{**}) ed (x^{**}, y^*) sono anch'essi equilibri di Nash. Se così fosse, potremmo ragionevolmente parlare di *strategia* di Nash per *ciascuno* dei due giocatori. Avremmo infatti che potremmo "comporre a caso" una strategia di Nash per I ed una per II, ottenendo sempre e comunque un equilibrio di Nash. Ma così non è, come mostra l'esempio della battaglia dei sessi. Vale la pena di

[24]In estrema sintesi, la tragedia dei "commons" rappresenta una situazione in cui più decisori hanno accesso ad una risorsa comune (i "commons" propriamente detti, ma possono essere risorse naturali come l'aria o l'acqua, o le orbite disponibili per satelliti geostazionari, etc.). Per come è la struttura dei payoff, avviene che in equilibrio ciascuno dei decisori utilizzerà una quota della risorsa comune che è maggiore di quella che sarebbe ottimale (e stiamo parlando di ottimale per lui, beninteso). Si ha quindi un risultato inefficiente, analogo al caso dell'oligopolio. Cosa non sorprendente, dato che questi due modelli hanno una struttura *formale* identica nei suoi tratti essenziali.

osservare che la proprietà di rettangolarità vale per una importante sottoclasse di giochi, ovverossia quelli a somma zero. Per questi giochi, che poi sono quelli per cui von Neumann aveva dimostrato l'esistenza di equilibri già nel 1928, possiamo parlare con piena ragione di *strategie* di equilibrio per i giocatori. Tra l'altro, vale anche un altro fatto importante: in caso di molteplicità di equilibri, i giocatori sono indifferenti rispetto a quale venga scelto. Si può quindi dire che nel caso dei giochi a somma zero permane la validità di tutti quei "buoni" fatti che sussistono nel caso del decisore singolo.

Nash stesso era consapevole della rilevanza del problema: sia nella sua tesi di dottorato che nel suo lavoro del 1951 si dilunga molto di più su questi aspetti che non sul teorema di esistenza e sulla sua dimostrazione.

Il problema della molteplicità degli equilibri di Nash diventa ancora più grave in alcune classi di giochi (ad esempio, i giochi ripetuti, che tratteremo nel capitolo seguente), ponendo quindi problemi severi alla significatività di una teoria che si affidi troppo "tranquillamente" all'equilibrio di Nash come concetto di soluzione.

Ciò può rendere comprensibile come vi sia stato il tentativo di altri approcci al problema della "soluzione" di un gioco. Ed è interessante come queste nuove strade non solo avessero dei tratti in comune, il che è poco sorprendente, ma talvolta si muovessero in direzioni opposte.

INTERLUDIO: giochi a somma zero

Prima di "esplorare" queste nuove strade, un piccolo intermezzo dedicato ai giochi a somma zero, visto il ruolo significativo che hanno avuto nello sviluppo della TdG. Vorrei in particolare vedere cosa sono e quali siano le loro proprietà significative.

Cosa si intende per "gioco a somma zero"? Il nome col quale vengono designati suggerisce la risposta: si tratta di un gioco (X, Y, f, g) con la proprietà che $f(x, y) + g(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in X \times Y$. Se, ovviamente, la condizione $f(x, y) + g(x, y) = 0$ trascrive direttamente l'idea di "a somma zero", può essere più conveniente esprimerla come $g(x, y) = -f(x, y)$: in questo modo dovrebbe risultare evidente il fatto che gli interessi dei due giocatori sono contrapposti, diametralmente. Vale la pena effettuare ancora una piccola manipolazione formale per dedurne che:

$$g(x_1, y_1) - g(x_2, y_2) = -[f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)]$$

Questa relazione ci dice una cosa importante: i due giocatori hanno preferenze opposte sugli esiti. Infatti, se $g(x_1, y_1) - g(x_2, y_2) > 0$, cioè $g(x_1, y_1) > g(x_2, y_2)$, ne segue che $f(x_1, y_1) - (x_2, y_2) < 0$, ovvero $f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$.

Possiamo riscrivere queste condizioni in termini di preferenze dei giocatori: abbiamo che $(x_1, y_1) \succ_I (x_2, y_2)$ se e solo se $(x_2, y_2) \succ_{II} (x_1, y_1)$. Questo era il punto cui intendevo arrivare. Cioè, ad una riformulazione della idea di gioco a somma zero come gioco "antagonistico" (o a interessi antagonistici, se si preferisce). Perché? Per una ragione molto semplice, che possiamo ricollegare a quanto abbiamo fatto per la "battaglia dei sessi": cosa succede se utilizziamo *diverse* rappresentazioni delle preferenze mediante funzioni di utilità? Per fissare le idee, possiamo considerare il gioco del "pari o dispari" (vedi tabella 3.13): se applichiamo alle funzioni di utilità di vNM, che rappresentano le preferenze dei giocatori, delle trasformazioni ammissibili e *diverse* per i due giocatori, possiamo ottenere (ad esempio) la rappresentazione del "pari o dispari" di tabella 3.16).

$I \backslash II$	P	D
P	$(0, 100)$	$(2, -100)$
D	$(2, -100)$	$(0, 100)$

Tabella 3.16: Sempre il "pari o dispari"!

E' evidente che la somma dei payoff non è più zero. E' altrettanto agevole verificare come la condizione

$$f(x_1, y_1) > f(x_2, y_2) \quad \text{se e solo se} \quad g(x_2, y_2) > g(x_1, y_1)$$

continua ad essere soddisfatta[25]. Questo è il motivo per cui è preferibile considerare la classe dei giochi antagonistici anziché la classe dei giochi a somma zero: se si prende sul serio il fatto che i dati del problema sono le preferenze dei giocatori rispetto agli esiti e non una particolare scelta (arbitraria) di una funzione di utilità che le rappresenti, è chiaro come la qualificazione di "essere a somma zero" perde di significato. Nulla vieta, tuttavia, che la si possa continuare ad utilizzare, purché con una significativa precisazione: possiamo dire che un gioco è a somma zero se esistono delle rappresentazioni delle preferenze dei giocatori mediante funzioni di utilità tali che il gioco risulti a somma zero. Con questa puntualizzazione, se necessario possiamo continuare ad usare tranquillamente la condizione analitica che $f(x, y) + g(x, y) = 0$.

Ora che abbiamo a disposizione una definizione corretta di gioco a somma zero, possiamo cercare di capire quali conseguenze abbia questa condizione.

Possiamo dimostrare, in modo relativamente semplice, che valgono le seguenti proprietà (per un qualsiasi gioco a somma zero):

[25] Non solo! Vale anche per l'estensione mista del gioco. Ovvia conseguenza del fatto che abbiamo usato funzioni di vNM equivalenti alle precedenti

- "rettangolarità" dell'insieme degli equilibri: se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono equilibri di Nash, allora lo sono anche (x_2, y_1) e (x_1, y_2)

- "equivalenza": se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono equilibri di Nash, allora si ha che $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$ (e quindi anche $g(x_1, y_1) = g(x_2, y_2)$)

- "efficienza": ogni equilibrio di Nash è efficiente

Osservo, prima di passare alla dimostrazione formale di queste proprietà, come esse mostrino che nessuna delle difficoltà che abbiamo incontrato nel dilemma del prigioniero (inefficienza) e nella battaglia dei sessi (non "rettangolarità" e non equivalenza) si possono presentare per un gioco a somma zero.

Vediamo innanzi tutto l'efficienza[26] degli equilibri, in quanto questo risultato non solo è banale, ma non dipende minimamente dal fatto che stiamo considerando un equilibrio: in un gioco a somma zero, ogni esito sarà sempre efficiente. Infatti, dato un esito (x, y), per ogni altro esito (x', y') che sia, ad esempio, preferito da I a (x, y), automaticamente abbiamo che il decisore II preferirà invece (x, y). Possiamo esprimere a parole questa importante (anche se banale) proprietà dei giochi a somma zero, dicendo che un gioco a somma zero non offre alcuno spazio per la ricerca di reciproci vantaggi.

Per quanto riguarda la dimostrazione delle altre due proprietà, ci sarà utile la seguente osservazione preliminare: (x_0, y_0) è un equilibrio di Nash del gioco a somma zero (X, Y, f, g) se e solo se (x_0, y_0) è un punto di sella per la funzione f, vale a dire:

$$f(x_0, y) \geq f(x_0, y_0) \geq f(x, y_0) \quad \text{per ogni } x \in X,\ y \in Y$$

Per provare questa asserzione è sufficiente notare che $f(x_0, y) \geq f(x_0, y_0)$ è equivalente a $g(x_0, y_0) \geq g(x_0, y)$.

Detto questo, otterremo entrambe le proprietà di rettangolarità ed equivalenza come conseguenza della seguente catena di disuguaglianze:

$$\begin{array}{lcl}
f(x_1, y_1) & \geq & [\text{perché } (x_1, y_1) \text{ è equilibrio di Nash}] \\
f(x_2, y_1) & \geq & [\ (x_2, y_2) \text{ è equilibrio di Nash, cioè punto di sella per } f] \\
f(x_2, y_2) & \geq & [\ (x_2, y_2) \text{ è equilibrio di Nash}] \\
f(x_1, y_2) & \geq & [\ (x_1, y_1) \text{ è equilibrio di Nash, cioè punto di sella per } f] \\
f(x_1, y_1) & &
\end{array}$$

Ma il primo ed ultimo termine di questa catena di disuguaglianze sono uguali: quindi tutti i termini della catena di disuguaglianze devono esserlo anch'essi.

[26] Per la definizione di efficienza, vedasi pagina 50.

Pertanto: $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, e questo prova la proprietà di equivalenza. Inoltre, possiamo scrivere (per ogni $x \in X$ ed $y \in Y$):

$$f(x_1, y) \geq f(x_1, y_1) = f(x_1, y_2) = f(x_2, y_2) \geq f(x, y_2)$$

Abbiamo sfruttato il fatto che (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono equilibri di Nash e quindi punti di sella per f, oltre alle uguaglianze che abbiamo appena dimostrato. Abbiamo ottenuto:

$$f(x_1, y) \geq f(x_1, y_2) \geq f(x, y_2) \quad \text{per ogni } x \in X,\ y \in Y$$

ovvero, (x_1, y_2) è punto di sella per f e pertanto è un equilibrio di Nash.

Vorrei chiudere questa breve parentesi sui giochi "a somma zero" dedicando un poco di spazio all'idea di strategia di max min (o "conservativa" che dir si voglia), ed alle sue relazioni con l'equilibrio di Nash.

L'importanza storica di questo concetto può essere facilmente colta se si tiene presente che il teorema di esistenza di von Neumann del 1928 viene tipicamente citato come "teorema di minimax".

E' abbastanza facile[27] riuscire a capire come mai l'idea di minimax sia interessante, riprendendo quanto abbiamo appena visto. In particolare, sappiamo che un equilibrio di Nash (per un gioco a somma zero) è un punto di sella per f:

$$f(x_0, y) \geq f(x_0, y_0) \geq f(x, y_0) \quad \text{per ogni } x \in X, y \in Y$$

Da questa relazione siamo in grado di dedurre che x_0 è una strategia di max min per il giocatore I (e analogamente si dimostra per y_0). Certo, se vogliamo ottenere questo risultato, sarà opportuno definire cosa sia una strategia di max min... La definizione è abbastanza semplice[28].

Sia $G = (X, Y, f, g)$ un gioco (non necessariamente a somma zero). Data una strategia $\bar{x} \in X$, consideriamo $\phi_I(\bar{x}) = \min_{y \in Y} f(\bar{x}, y)$. Ovvero, il minimo payoff che I può ottenere se sceglie $\bar{x}$. Avendo ϕ a disposizione, la definizione di max min è immediata ed anche naturale: x_0 è una strategia di max min per I se $\phi_I(x_0) \geq \phi_I(\bar{x})$ per ogni $\bar{x} \in X$. Si noti che la definizione utilizza *solo* f: il payoff di II, ovvero g, non viene neppure preso in considerazione! Il numero $\phi_I(x_0)$, che non è altro che $\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$, viene detto valore di max min, o valore conservativo del gioco per il giocatore I. Ribadisco che la

[27]Ma attenzione: ciò che faremo non corrisponde alla genesi storica del concetto, come è evidente per il fatto che il teorema di von Neumann precede di oltre venti anni il risultato di Nash sull'esistenza di equilibri (risultato grazie al quale l'equilibrio si impone come idea principale di soluzione per un gioco non cooperativo).

[28]Soprattutto se si ignora, come farò, un problema che si può presentare: i massimi e minimi che verranno evocati dalla definizione potrebbero *non esistere*. In tal caso, devono essere sostituiti con adeguati surrogati (in termini tecnici, dovremmo parlare di sup anziché di max).

definizione di strategia di max min, così come quella di valore di max min, non è data solo per giochi a somma zero, ed in effetti avremo in seguito occasione di utilizzare questo concetto fuori dal contesto dei giochi a somma zero.

Vi sono molti modi per dare un senso all'idea di strategia di max min: possiamo vedere il giocatore I come estremamente pessimista (e quindi sceglierà una strategia di max min in modo da cautelarsi). Sì può ascrivere a questa linea di pensiero anche l'uso del criterio di max min nei problemi di decisione in condizioni di "completa ignoranza", ovvero qualora il decisore non sia in grado di associare ai vari "stati di natura" una sua stima della probabilità che si verifichino.

Altra giustificazione per il max min è che esso non pone problemi di "segretezza" al giocatore I: se I avesse ragionevole sospetto che II sia in grado di conoscere la sua scelta, una strategia di max min renderebbe inutile questo "vantaggio competitivo" di II.

Va detto che l'uso di strategie di max min fuori dal contesto dei giochi a somma zero è difficilmente sostenibile in generale. Basta pensare ad un gioco come quello della tabella 3.17. Se venisse utilizzato il criterio del max min il

$I \backslash II$	L	C	R
T	$(100, 100)$	$(-1, 0)$	$(-1, 0)$
M	$(0, -1)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$
B	$(0, -1)$	$(1, 0)$	$(0, 1)$

Tabella 3.17: Un esempio per il min max

giocatore I non sceglierebbe la strategia T. Ciò è tuttavia poco credibile in un gioco come questo. Non a caso questo esempio presenta un evidente interesse *comune* dei due giocatori a che venga scelta la coppia di strategie (T, L), che è anche l'unico equilibrio in strategie pure del gioco. Il concetto di max min non è in grado di cogliere questo aspetto, e quindi non è in certo casuale che esso dia risultati in genere poco convincenti, fuori dal contesto dei giochi a somma zero[29].

Per quanto riguarda i giochi a somma zero, ci rimane da vedere la connessione esistente fra strategie di max min e punti di sella.

Nel contesto dei giochi a somma zero, la quantità $\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$ viene anche detta *valore inferiore* del gioco, ed è indicata con $\underline{v}$. Possiamo capire il perché di questa terminologia e notazione se consideriamo il

[29] Naturalmente, poche cose sono semplici in TdG... Il problema 25 mostra un gioco in cui i giocatori tipicamente (almeno, così avviene in esperimenti documentati) scelgono una strategia di max min anziché l'equilibrio di Nash (vi è un unico equilibrio, si noti!).

giocatore II. Infatti, possiamo definire anche per II il valore conservativo del gioco, che è $\max_{y \in Y} \min_{x \in X} g(x,y)$. Se abbiamo un gioco a somma zero, visto che $g(x,y) = -f(x,y)$, abbiamo che $\max_{y \in Y} \min_{x \in X} g(x,y) = -\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x,y)$.

La quantità $\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x,y)$ viene detta valore superiore del gioco ed è indicata con $\bar{v}$.

Parlare di valore inferiore e superiore è giustificato dal fatto che si ha, come si può facilmente dimostrare[30], che si ha, *sempre*: $\underline{v} \leq \bar{v}$.

Basta notare che, per ogni $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$:

$$\min_{y \in Y} f(\bar{x}, y) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) \leq \max_{x \in X} f(x, \bar{y})$$

Quindi,

$$\min_{y \in Y} f(\bar{x}, y) \leq \max_{x \in X} f(x, \bar{y})$$

Visto che la quantità a destra non dipende da $\bar{x}$, si ha:

$$\max_{\bar{x} \in X} \min_{y \in Y} f(\bar{x}, y) \leq \max_{x \in X} f(x, \bar{y})$$

Visto che la quantità a sinistra non dipende da $\bar{y}$ si ha:

$$\max_{\bar{x} \in X} \min_{y \in Y} f(\bar{x}, y) \leq \min_{\bar{y} \in Y} \max_{x \in X} f(x, \bar{y})$$

ovvero $\underline{v} \leq \bar{v}$

Concludo osservando che, per un gioco a somma zero, le seguenti due affermazioni sono equivalenti:

- (x_0, y_0) è un equilibrio di Nash
- $\underline{v} = \min_{y \in X} f(x_0, y)$, $\bar{v} = \max_{x \in X} f(x, y_0)$ e $\underline{v} = \bar{v}$

Si noti che, se (x_0, y_0) è un equilibrio di Nash, allora x_0 ed y_0 sono strategie di $\max\min$, ma non possiamo garantire il viceversa, a meno che non sia $\underline{v} = \bar{v}$.

Non riporto la dimostrazione, che è comunque del tutto elementare e che si può trovare su molti manuali, oltre che sul mio sito web. Mi limito ad osservare WEB come questi fatti potrebbero essere utilizzati per una diversa dimostrazione della proprietà di rettangolarità ed equivalenza per gli equilibri di Nash di giochi a somma zero.

FINE INTERLUDIO: giochi a somma zero

[30] Ricordo ancora una volta, per tacitare la mia coscienza di matematico, che sto assumendo che esistano tutti i max ed i min che vengono menzionati. Comunque, la disuguaglianza $\underline{v} \leq \bar{v}$ vale anche se non esistono i max o i min e questi vengono rimpiazzati da sup ed inf.

Dopo questa digressione sui giochi “a somma zero”, ritorniamo ai giochi non cooperativi di carattere generale.

Dopo avere rapidamente esaminato le idee di soluzione imperniate sul concetto di dominanza, abbiamo visto l’equilibrio di Nash e ne abbiamo esaminato alcune proprietà. Abbiamo cercato di indicare delle motivazioni significative per adottarlo appunto come idea di soluzione, per di più confortati dal fatto che ogni gioco finito ha equilibri di Nash (per lo meno in strategie miste). L’equilibrio ha però dei problemi. In una veloce sintesi, ricordo tre fatti:
- un gioco normalmente ha *più di un equilibrio*
- essere equilibrio è una proprietà che hanno le *coppie* di strategie
- *non vale* la proprietà di *rettangolarità*

Il “combinato disposto” di questi fatti è che, dato un gioco, non solo è difficile prevedere quale equilibrio venga “giocato”, ma non è neppure scontato che l’esito sia un esito d’equilibrio[31]! Certo questa constatazione non è di poco conto e di fatto rappresenta un limite fondamentale alla pretesa che la modellizzazione dell’interazione strategica come è stata proposta dalla TdG nella sua forma più classica possa essere considerata risolutiva. In alcuni dei capitoli seguenti, delineeremo estensioni e “vie di uscita” che sono state proposte e praticate: con l’avvertenza che (per lo meno, a parere di chi scrive) esse non forniscono affatto “la soluzione” al problema.

Ci occuperemo invece, in questo capitolo, di ulteriori approcci alla “soluzione” di un gioco non cooperativo, rimanendo sempre nell’ambito di un modello “classico”: nel senso, in particolare, che i parametri rilevanti del gioco saranno assunti essere conoscenza comune fra i giocatori, i quali continuano ad essere rappresentati come decisori (“infinitamente”) razionali ed intelligenti.

Ho detto che le varianti rispetto all’equilibrio di Nash di cui ci occuperemo si muovono (in parte) in direzioni opposte, anche se ciò può sembrare curioso. Da una parte, abbiamo i tentativi di imporre condizioni aggiuntive all’equilibrio di Nash: in questa linea troviamo sia il tentativo di “selezionare” per ogni gioco un unico equilibrio di Nash (effettuato da Harsanyi e Selten (1988)), di cui non ci occuperemo[32], che i numerosi tentativi di “raffinamento” degli equilibri di Nash. Io mi occuperò solo di uno di questi, ovverossia dell’idea di equilibrio perfetto nei sottogiochi, introdotta da Selten nel lontano 1965. Ma di proposte di raffinamenti ve ne sono state molte e vale la pena di citare almeno il nome di alcune: equilibri perfetti (o equilibrio “della mano tremante”: di nuovo Selten (1975)); equilibri propri (Myerson (1978)); equilibri sequenziali (Kreps e Wilson (1982)); l’idea di “stabilità strategica” (Kohlberg e Mertens (1986)). Descriverò infine brevemente, sempre in questo capitolo, sia l’idea di equilibrio correlato che quella di strategie razionalizzabili: in entrambi i casi,

[31] Vedasi, ad esempio, quanto detto a pagina 52 per la battaglia dei sessi.

[32] Naturalmente, ciò segnala implicitamente che questo tentativo, per quanto benemerito ed interessante, non è da me ritenuto conclusivo.

abbiamo dei concetti che individuano come "soluzione" un insieme che, per ogni gioco, contiene quello dei suoi equilibri di Nash.

Vediamo dapprima un tentativo di trovare condizioni più restrittive. Come detto, il "via" a questa linea di ricerca è stato dato da Selten che, nel 1965, ha introdotto l'idea di equilibrio perfetto nei sottogiochi. Per illustrare l'dea, ricorrerò all'esempio che solitamente (e giustamente) si usa in questo contesto. Si consideri il gioco di figura 3.1, la cui forma strategica è indicata in tabella 3.18[33].

E' immediato verificare che vi sono due equilibri di Nash: (T, L) e (B, R).

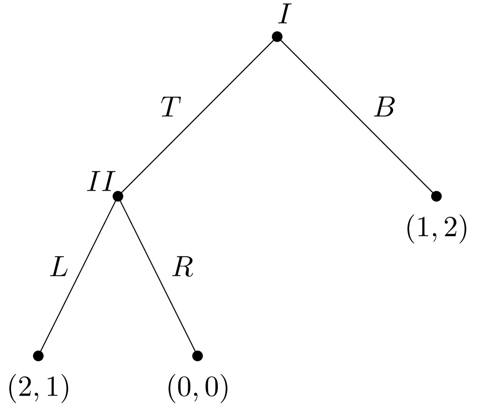


Figura 3.1: Il gioco "di Selten"

$I \backslash II$	L	R
T	$(2, 1)$	$(0, 0)$
B	$(1, 2)$	$(1, 2)$

Tabella 3.18: La forma strategica del gioco "di Selten"

[33]Volendo, potrei indicare alcuni casi "reali" in cui questa situazione si verifica. Un esempio standard proposto a questo proposito è quello di vedere II come un monopolista ed I come un possibile "entrante" sul mercato. La scelta R potrebbe essere interpretata come la scelta di dare il via ad una "guerra dei prezzi". Osservo che esempi come questo non sono da considerare come descrizioni adeguate di una situazione reale: sono piuttosto delle descrizioni stilizzate che aspirano a cogliere alcuni (o anche un solo) elementi significativo di una situazione. Nulla di più. Si noti, oltretutto, come i "numeri" che vengono usati siano (non solo qui) di pura fantasia e servono solo a descrivere un "pattern" di preferenze che rendono interessante la situazione.

Sembra di essere in una situazione molto simile a quella della battaglia dei sessi: abbiamo due equilibri, tra i quali I preferisce (B, R) e II preferisce (T, L). Se però guardiamo alla forma estesa, notiamo che, nel suo nodo decisionale, la scelta L è strettamente preferita ad R dal giocatore II. Come è possibile che un equilibrio di Nash (mi riferisco all'equilibrio (B, R)), basato sul comportamento *ottimizzante* dei giocatori, preveda allora che II giochi R, che è una scelta "inferiore" per II?

La risposta è semplice: ciò può avvenire perché nell'equilibrio di Nash (B, R) si ha che II non viene chiamato a giocare!

Questa risposta può essere soddisfacente da un punto di vista formale, e certamente ci fa capire una cosa cui forse non avevamo pensato: in un gioco in forma estesa un equilibrio di Nash può prevedere scelte non ottimali da parte dei giocatori, ma questo può avvenire solo in nodi dell'albero che non verranno "visitati" se i giocatori adottano le strategie previste da quell'equilibrio. Sia chiaro che non tutte le scelte dei giocatori sono irrilevanti, in nodi non visitati: basti notare che (B, L) non è equilibrio di Nash: infatti, se la scelta di II è L, allora la scelta di B per I non è più ottimale. Osservo anche che parlare di "scelte non ottimali" non è del tutto chiaro, tranne che per esempi semplici come quello che stiamo esaminando: tale concetto sarà esplicitato proprio grazie all'idea di equilibrio perfetto nei sottogiochi, che ci stiamo per l'appunto avviando ad introdurre.

Ritorniamo al gioco ed alla ricerca di una spiegazione non solo formale del perché (B, R) possa essere un equilibrio di Nash. Possiamo pensare che questo equilibrio corrisponda ad una minaccia[34] da parte di II di giocare R, e che il giocatore I la ritenga credibile, tanto da essere indotto a giocare B. Si tratta però di una motivazione assai debole: non si capisce perché I debba dare credito a questa minaccia. Se I gioca T, la razionalità del giocatore II lo *obbligherà* a giocare L. Si noti, a questo proposito, che:

- il gioco (compresi i payoff) è conoscenza comune tra i giocatori: I sa benissimo che II preferisce l'esito derivante da L a quello che deriva da R;

- i payoff corrispondono alle vere preferenze dei giocatori: potremmo essere tentati di giustificare la scelta di R da parte di II attribuendola ad un intento di rivalsa da parte sua, ma questo "intento" dovrebbe essere incorporato nei payoff. Per esempio, il payoff corrispondente ad R potrebbe essere $(0, 2)$. Come si vede, staremmo considerando un altro gioco, il cui unico equilibrio sarebbe (B, R), come può essere agevolmente verificato:

[34] Fatta quando? Evidentemente in una fase di "pre-play communication", che *non formalizziamo*: ricordo le osservazioni fatte a suo tempo a proposito della interpretazione degli equilibri di Nash come accordi non vincolanti "stabili".

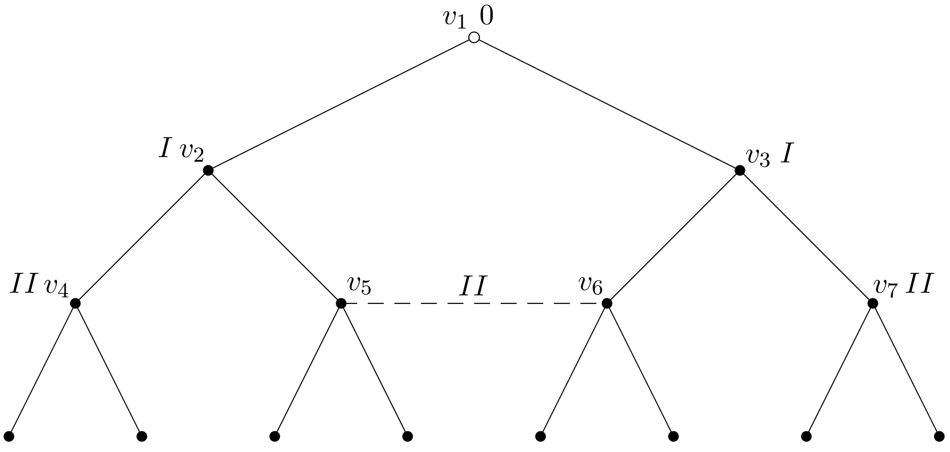
$I \backslash II$	L	R
T	$(2,1)$	$(0,2)$
B	$(1,2)$	$(1,2)$

insomma, il fatto che il payoff di II, conseguente alla scelta di L, sia maggiore di quello che ottiene da R, significa che II preferisce l'esito corrispondente ad L a quello derivante da R, e ciò avendo ben presente la struttura complessiva del gioco

- non ha senso pensare che II giochi R, ottenendo un risultato inferiore, perché spera con questo che I in seguito, in ulteriori *ripetizioni* del gioco, giochi B. Non ha senso perché se fossero previste ripetizioni del gioco le avremmo dovute modellizzare. Non l'abbiamo fatto, quindi vuol dire che abbiamo una situazione di interazione strategica di fronte alla quale I e II si trovano a dover fare scelte una ed una sola volta[35]. D'altro canto, l'osservazione fatta avrebbe invece perfettamente senso se il gioco fosse ripetuto: vedremo più avanti come questo aspetto possa essere rilevante. Ma ciò non riguarda il gioco di cui ci stiamo occupando.

Scartiamo allora l'equilibrio (B, R)? Sembra una scelta sensata, ma vorremmo trovare una regola generale. Una possibile idea è quella di considerare, per così dire, "attendibili" solo gli equilibri di Nash che sono "perfetti nei sottogiochi". Cosa vuol dire? Nel caso di un gioco ad informazione perfetta (vedi pag. 22), vuol dire molto semplicemente che, scelto comunque un nodo dell'albero, la restrizione delle strategie al sottogioco che si ottiene considerando solo la parte di albero che segue il nodo scelto, dà luogo ad un equilibrio in quel sottogioco. Se il gioco non è ad informazione perfetta, la definizione di sottogioco richiede che gli insiemi di informazione cui appartengono nodi del sottoalbero siano tutti contenuti nel sottoalbero. Vediamo come "funziona" questa definizione in un esempio: il nodo v_2 non dà luogo ad un sottogioco, come d'altronde avviene anche per v_3, v_5 e v_6; invece, v_4 e v_7 individuano due sottogiochi propri del gioco dato. Si noti che in figura sono stati omessi per semplicità vari elementi essenziali, tra cui i payoff.

[35] E' anche per ragioni di questo genere che osservavo, nella nota di pagina 69, come gli esempi "concreti" che si fanno non sono da prendere troppo sul serio, in quanto a realismo.



La condizione che abbiamo posto individua quei profili di strategie che vengono detti "equilibri di Nash perfetti nei sottogiochi" (brevemente: SPE) e che costituiscono la proposta di raffinamento di Selten.

INTERLUDIO: induzione a ritroso

E' questo il momento opportuno per una piccola divagazione sui giochi in forma estesa ad informazione perfetta. Infatti, per questi giochi abbiamo a disposizione un metodo risolutivo che ha un certo interesse di per sé, e che inoltre si collega all'idea di equilibrio perfetto nei sottogiochi. Conseguenza di questo è, tra l'altro, che ogni gioco finito in forma estesa ad informazione perfetta ha sempre un SPE.

Dato un gioco ad informazione perfetta, possiamo mettere in atto un interessante algoritmo, detto di *induzione a ritroso*: si comincia con lo individuare, nei "penultimi" vertici del gioco[36], la scelta migliore per il giocatore cui spetta muovere in tali vertici. Si noti che l'idea di "scelta migliore" è priva di ambiguità, in quanto questi nodi non prevedono mosse successive di altri decisori; osservo anche come non vi sia motivo alcuno per cui queste scelte ottimali siano univocamente determinate, ma tutto ciò non crea alcun problema: qualunque sia la prescelta fra le mosse ottimali, l'algoritmo che stiamo descrivendo "funziona". Fatto questo, possiamo "potare" l'albero del gioco, eliminando i rami finali ed associando ai vertici ora diventati finali i payoff che si ottengono qualora venga implementata la scelta migliore che avevamo individuato. Con

[36]Non dò una descrizione formale dell'algoritmo. Ma vorrei precisare che mi sto riferendo a quei nodi che sono seguiti solo ed esclusivamente da nodi finali. Il matematico giustamente ritiene essenziale provare che tali "penultimi" nodi esistono, e che si precisino molte altre cose che verranno descritte in modo informale nel testo.

questa procedura otteniamo un albero "più corto": a questo punto non si tratta di fare altro che iterarla un numero di volte sufficiente per fare "sparire" tutti i rami. Raccogliendo le varie scelte ottimali individuate in ogni vertice nei vari passaggi di questo algoritmo, otteniamo una coppia di strategie, la quale risulta essere non solo un equilibrio di Nash, ma anche un equilibrio perfetto nei sottogiochi. Osservo come questi risultati, che illustrerò con una serie di figure per mostrare il procedimento "in azione", siano plausibili, anche se la loro dimostrazione formale richiede un certo impegno (in particolare per una corretta descrizione delle procedure).

Ribadisco una conseguenza implicita di questo risultato, già anticipata: ogni gioco (finito) ad informazione perfetta ha un equilibrio di Nash *in strategie pure* che, inoltre, è perfetto nei sottogiochi. Sia la procedura che il risultato sono dovuti a Kuhn (1953), anche se, naturalmente, egli non parla di SPE, in un interessante articolo dove egli formula, tra l'altro, la definizione di gioco in forma estesa[37] cui ho fatto riferimento nel capitolo precedente.

Veniamo allora all'esempio che illustra la procedura di induzione a ritroso. Utilizzo la "game form" del gioco dei fiammiferi, introdotto nel capitolo precedente, inserendo però dei payoff "di fantasia" (nel senso che non hanno nulla a che fare con payoff che ci si potrebbe aspettare ragionevolmente nel caso del gioco dei fiammiferi), per poter avere una procedura più interessante.

Nella figura 3.2 sono descritte le varie fasi. Si noti, in particolare, come ad un certo punto il giocatore II abbia due possibili scelte: può scegliere infatti il ramo e oppure il ramo f. Io ho ipotizzato che lui faccia la scelta e; descrivo allora nella figura 3.3 come si sviluppa l'algoritmo, qualora II scegliesse il ramo f.

Che i due profili di strategie individuati con questo algoritmo, $(b\,h\,i\,l, d\,e\,m)$ e $(a\,h\,i\,l, d\,f\,m)$, siano equilibri di Nash del gioco dato può essere agevolmente verificato dalla forma strategica di tabella 3.19.

$I \backslash II$	$c\,e\,m$	$c\,f\,m$	$d\,e\,m$	$d\,f\,m$
$a\,g\,i\,l$	$(2,0)$	$(2,0)$	$(1,5)$	$(1,5)$
$a\,h\,i\,l$	$(3,2)$	$(3,2)$	$(1,5)$	$(1,5)$
$b\,g\,i\,l$	$(2,4)$	$(-1,4)$	$(2,4)$	$(-1,4)$
$b\,h\,i\,l$	$(2,4)$	$(-1,4)$	$(2,4)$	$(-1,4)$

Tabella 3.19: La forma strategica del gioco dei fiammiferi "modificato"

[37] Compiendo un significativo progresso sia sulla via della semplificazione che su quella della generalizzazione, rispetto all'approccio di von Neumann e Morgenstern.

Non solo. Si può anche verificare che le loro restrizioni a sottogiochi continuano ad essere equilibri di Nash. Ad esempio, per il sottogioco individuabile in figura 3.2 dal fatto che contiene i rami $c\,d\,g\,h\,i\,n$, la restrizione delle due coppie di strategie trovate dà luogo per entrambe alla coppia di strategie $(h\,i,\ d\,m)$ che è un equilibrio di Nash per i sottogioco citato, come si può agevolmente verificare dalla tabella 3.20.

$I \backslash II$	$c\,m$	$d\,m$
$g\,i$	$(2,0)$	$(1,5)$
$h\,i$	$(3,2)$	$(1,5)$

Tabella 3.20: La forma strategica di un sottogioco del gioco dei fiammiferi "modificato"

Ritornando al gioco completo, esaminando la forma strategica si vede che ci sono due altri equilibri di Nash: $(b\,g\,i\,l, d\,e\,m)$ e $(a\,g\,i\,l, d\,f\,m)$; entrambi prevedono una scelta *non ottimale*, ovvero g, in un nodo dell'albero che non viene raggiunto se i giocatori utilizzano le strategie che danno luogo all'equilibrio.

Come abbiamo osservato, in questo esempio l'algoritmo di induzione a ritroso ci fornisce *due*[38] coppie di strategie, che sono entrambe equilibri perfetti nei sottogiochi. L'equilibrio $(b\,h\,i\,l, d\,e\,m)$ dà un payoff 2 ad I e 4 a II, mentre l'equilibrio $(a\,h\,i\,l, d\,f\,m)$ dà 1 a I e 5 a II. Questo fatto è significativo, in quanto mostra che ci ritroviamo in una situazione del tutto analoga a quella che avevamo nella battaglia dei sessi. Quindi sembra che l'idea di SPE, interessante di per sé, non sia in grado di risolvere "tutti" i problemi dell'equilibrio di Nash: non, ad esempio, quel tipo di problematiche (mi riferisco, al solito, alla non "rettangolarità", ed al fatto che i giocatori hanno preferenze opposte sui due equilibri).

Seguendo il progredire dell'algoritmo, si potrebbe immaginare che II possa "determinare" l'equilibrio da lui preferito, scegliendo f anziché e: tutto ciò è pura illusione, visto che in realtà il gioco "giocato" procede in avanti e non a ritroso come l'algoritmo che abbiamo introdotto. Né si pensi che II sia "ovviamente" favorito, essendo in suo potere scegliere b alla sua prima mossa anziché a: una volta scelto b, non può certo contare sul fatto che II giochi e. Anzi, visto che per II la scelta fra e ed f è del tutto indifferente, non si comprende per quale motivo II dovrebbe graziosamente scegliere e, visto che I ha in precedenza effettuato una scelta a sfavore di II. Insomma, non sarà

[38] Chissà che non sia stato scelto apposta, per questo motivo...

certo la brillante idea della induzione a ritroso, o quella di equilibrio perfetto nei sottogiochi, a toglierci da tutti i guai[39].

FINE INTERLUDIO

Prima di passare agli "allargamenti" dell'equilibrio di Nash, vorrei mettere in evidenza come l'idea di SPE abbia una conseguenza assolutamente dirompente: dall'analisi svolta, abbiamo tratto la convinzione che la forma strategica del gioco non è sufficiente per l'analisi del gioco! L'idea che un equilibrio di Nash possa non essere attendibile è stata infatti basata sull'analisi del gioco in forma estesa. Ebbene, non è una considerazione di poco rilievo: mette in discussione il presupposto (di von Neumann e Morgenstern) che l'intelligenza dei giocatori potesse permettere di analizzare il gioco costruendo la forma strategica, la quale avrebbe dovuto incorporare tutte le informazioni utili per l'analisi del gioco, e che si potesse "sterilizzare" l'aspetto dinamico dell'interazione: i giocatori possono decidere le loro strategie prima che il gioco abbia inizio (possiamo anche immaginare che lascino ad un esecutore le istruzioni su come giocare in ogni contingenza). Quindi, l'importanza del contributo di Selten sta nella messa in discussione della "sufficienza" della forma strategica. Lungo questa linea ritroviamo anche l'idea di equilibrio sequenziale, mentre Kohlberg e Mertens (1986) hanno tentato un recupero della validità della forma strategica.

Abbiamo visto come ci si possa muovere nella direzione di imporre condizioni aggiuntive all'equilibrio di Nash. Non meno interessante è osservare che possono essere individuate delle condizioni meno restrittive dell'equilibrio di Nash, che corrispondono a idee significative. Mi limiterò a citarne due, che hanno una rilevanza particolare: gli equilibri correlati e i profili di strategie razionalizzabili.

Per gli equilibri correlati, può essere utile riprendere la "battaglia dei sessi". Questo gioco ha due equilibri in strategie miste, che sono apprezzati in modo antitetico dai due giocatori. Perché non si può immaginare che i giocatori si accordino per subordinare la scelta di uno fra i due equilibri all'esito del lancio di una moneta? Se viene testa, I gioca T e II L; se viene croce, I gioca B e II R. Va da sé che questo accordo presuppone una qualche forma di comunicazione tra i giocatori. Ma ciò che può lasciare perplessi è l'avere parlato di un "accordo". Ci stiamo occupando di giochi non cooperativi e quindi non sono ammessi accordi vincolanti: possiamo immaginare che l'accordo sopra descritto possa essere rispettato senza la presenza di una qualche autorità esterna? La risposta è sì, ed è positiva in quanto l'accordo prevede

[39]Per un piccolo assortimento di guai, si possono utilmente considerare i problemi 18, 19, 22

che i giocatori, subordinatamente all'esito del meccanismo aleatorio, comunque "giochino" un equilibrio di Nash. Nell'esempio specifico della battaglia dei sessi, se a esempio esce "testa", non si capisce per quale motivo I non dovrebbe rispettare l'accordo (che in questo caso addirittura gli permette di ottenere il miglior risultato possibile), e di conseguenza neanche II ha convenienza a violarlo. Se nel caso della battaglia dei sessi le argomentazioni a favore della auto-sostenibilità dell'accordo sono molto forti, in un generico gioco il fatto che un meccanismo aleatorio assegni comunque probabilità positiva solo agli equilibri di Nash elimina quanto meno una possibile causa di instabilità, ovvero la convenienza a "deviazioni unilaterali" da parte dei giocatori.

Quindi una distribuzione di probabilità concentrata sugli equilibri di Nash può essere "letta" come un accordo non vincolante che ha delle buone proprietà di stabilità e può pertanto ricevere la qualifica di equilibrio. Questo equilibrio viene detto *correlato* per l'ovvio motivo che le scelte dei giocatori sono, per l'appunto, correlate: si noti che facciamo venire meno l'ipotesi che i giocatori usino due meccanismi aleatori *indipendenti*, che invece avevamo assunto introducendo le strategie miste. Al di là degli aspetti nominalistici, si può osservare come, nella battaglia dei sessi, la possibilità di ricorrere *ad uno stesso meccanismo aleatorio* permetta ai due giocatori di ottenere un risultato *efficiente* ed "equilibrato" (nel senso che il risultato atteso dall'equilibrio correlato si colloca, per entrambi i giocatori, a mezza via fra quello ottenibile nei due equilibri in strategie pure), consentendo quindi un notevole progresso rispetto a quanto era ottenibile mediante le strategie miste. Da un punto di vista matematico, il "guadagno" che si ottiene dall'equilibrio correlato rispetto alle strategie miste sta nel fatto che, grazie alla correlazione, i due giocatori sono in grado di evitare gli esiti "cattivi", contrariamente a quello che avviene se usano le strategie miste.

Questo equilibrio correlato può essere interpretato come se al gioco venisse aggiunto un *meccanismo* di carattere aleatorio il quale fornisce un segnale *pubblicamente* osservabile dai giocatori. Questo punto di vista è interessante, perché ammette una generalizzazione che a prima vista può apparire sorprendente: l'utilizzazione di segnali non pubblici può consentire ai giocatori di ottenere risultati, che continueremo a chiamare equilibri correlati, i quali permettono di ottenere ulteriori progressi in direzione dell'efficienza. Uso il termine "sorprendente" in quanto risulta che può essere preferibile essere meno informati. Consideriamo il seguente esempio dovuto ad Aumann (1974):

$I \backslash II$	L	R
T	$(6,6)$	$(2,7)$
B	$(7,2)$	$(0,0)$

Questo gioco ha due equilibri in strategie pure: (T, R) e (B, L); ha inoltre un equilibrio in strategie miste, che corrisponde a giocare: T con probabilità 2/3 e B con probabilità 1/3; L con probabilità 2/3 ed R con probabilità 1/3. Il payoff atteso dall'equilibrio misto è, per entrambi i giocatori, pari a 14/3. Non male, in questo caso. Anzi, addirittura meglio di quello ottenibile dall'equilibrio correlato ottenuto giocando i due equilibri puri con probabilità 1/2 ciascuno (i payoff sono 9/2 per ciascuno). Si può fare di meglio, però. Vedremo ora come i due giocatori possano ottenere un payoff pari a 15/3, ovvero 5, con un altro equilibrio correlato.

Si consideri un meccanismo aleatorio che scelga una delle tre coppie di strategie (T, L), (T, R), (B, L) con pari probabilità (1/3): basta usare un dado, ed associare (T, L) ai numeri $1, 2$; (T, R) ai numeri 3 e 4 e (B, L) ai numeri 5 e 6.

Ogni giocatore, però, anziché ricevere l'informazione su quale sia stato l'esito della "estrazione a sorte", ottiene solo l'informazione relativa alla *sua* strategia. Ad esempio, se il risultato del meccanismo è (T, R), il giocatore I riceve solo il segnale "T" e il giocatore II solo "R".

Assumiamo anche che l'accordo preveda che ogni giocatore giochi la strategia corrispondente al segnale ricevuto: quindi se I riceve il segnale "T", ciò significa che egli dovrebbe giocare T. Si assume anche che il meccanismo sia conoscenza comune fra i giocatori, ipotesi ragionevole se lo si vede come frutto di un accordo fra i giocatori. Possiamo quindi ritenere che i giocatori abbiano la stessa distribuzione di probabilità sugli esiti del meccanismo (che assegna 1/3 a ognuno dei possibili risultati), e che poi aggiornino la loro valutazione delle probabilità dopo aver ricevuto il segnale. Se viene sorteggiato (T, R), I riceve il segnale "T" e quindi assegnerà probabilità pari a 1/2 ai due esiti (T, L) e (T, R) (può essere certo che l'esito (B, L) non si è verificato); il giocatore II sarà dal canto suo certo del fatto che l'esito è stato (T, R).

Detto questo, possiamo assumere che l'accordo sia rispettato? La risposta è positiva, nel senso che nessuno dei due giocatori ha motivo di "deviare unilateralmente". Nel nostro caso particolare (cioè se il meccanismo aleatorio seleziona (T, R)), ciò è ovvio per II, in quanto la strategia che gli viene prescritta gli permette (come visto) di inferire che a I è detto di giocare T: essendo (T, R) un equilibrio di di Nash del gioco, II non ha ragione di giocare L. Per quanto riguarda I dobbiamo fare qualche conto in più. Egli sa che a II può essere stato indicato di giocare L o R con pari probabilità. Allora se I gioca T ha un'utilità attesa pari a:

$$\frac{1}{2}f(T, L) + \frac{1}{2}f(T, R) = \frac{1}{2} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 4 \tag{3.3}$$

Se gioca B, la sua utilità attesa è:

$$\frac{1}{2}f(B, L) + \frac{1}{2}f(B, R) = \frac{1}{2} \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 3.5 \tag{3.4}$$

Come si vede, I non ha interesse a "deviare" rispetto all'indicazione ricevuta dal meccanismo, sempre assumendo che II rispetti l'accordo (stiamo infatti parlando di mancanza di incentivi per deviazioni unilaterali). Calcoli del tutto analoghi si possono fare qualora il risultato della estrazione sia (T, L) o (B, L).
WEB Per la definizione generale di equilibrio correlato, rinvio al sito web.

La relazione fra equilibri correlati ed equilibri di Nash appare essere molto stretta. In effetti un equilibrio correlato può essere visto come un equilibrio di Nash di un gioco ottenuto aggiungendo al gioco "base" una mossa iniziale della sorte che rispecchi la probabilità prevista dal meccanismo, tenendo inoltre conto della quantità di informazione trasmessa ai giocatori mediante l'uso appropriato di insiemi di informazione. La figura 3.4 illustra esplicitamente questa idea per l'esempio che abbiamo descritto. Si può verificare come la coppia di strategie evidenziate in figura 3.4 mediante frecce sovrapposte agli archi, e che possiamo "leggere" come il fatto che i giocatori seguono l'indicazione ricevute dal mediatore, sia un equilibrio di Nash del gioco rappresentato in figura. Va da sé che il risultato finale sarà che ognuna delle tre coppie (T, L), (B, L), (T, R) sarà giocata con probabilità $\frac{1}{3}$. E quindi che il payoff atteso da parte di ciascuno dei giocatori sarà pari a 5 con un guadagno di efficienza rispetto al payoff $\frac{14}{3}$ ottenibile dall'equilibrio di Nash.

Per chiarezza abbiamo anche riportato la forma strategica del gioco di figura 3.4 (i numeri della tabella 3.21 sono tutti moltiplicati per 3, rispetto alla figura 3.4): abbiamo sottolineato su ogni riga e colonna quali sono le "migliori risposte" per i giocatori e quindi si verifica agevolmente che la coppia di strategie (T_tB_b, R_rL_l) è un equilibrio[40] di Nash (e naturalmente dà un payoff atteso pari a 5 ad entrambi i giocatori).

$I \backslash II$	L_rL_l		L_rR_l		R_rL_l		R_rR_l	
T_tT_b	6+6+6	6+6+6	$\underline{6+2+2}$	6+7+7	2+6+6	7+6+6	$\underline{2+2+2}$	$\underline{7+7+7}$
T_tB_b	6+6+7	6+6+2	6+2+0	6+7+0	$\underline{2+6+7}$	$\underline{7+6+2}$	2+2+0	7+7+0
B_tT_b	7+7+6	$\underline{2+2+6}$	7+0+2	2+0+7	0+7+6	0+2+6	0+0+2	0+0+7
B_tB_b	$\underline{7+7+7}$	$\underline{2+2+2}$	7+0+0	2+0+0	0+7+7	0+2+2	0+0+0	0+0+0

Tabella 3.21: La forma strategica del gioco di figura 3.4

[40]Il gioco ha anche altri due equilibri in strategie pure: (B_tB_b, L_rL_l) e (T_tT_b, R_rR_l), il cui significato è interessante: corrispondono infatti ai due equilibri in strategie pure che aveva il gioco originario, e la cui interpretazione corrisponde al fatto che i due giocatori non tengono in alcun conto il messaggio ricevuto. Sono detti in gergo "babbling equilibria" e possono anche essere immaginati come dovuti al fatto che i giocatori non sono in grado di decodificare il messaggio ricevuto.

Dall'idea di equilibrio correlato si ottiene un interessante risultato: la possibilità di comunicare fra i giocatori può consentire un miglioramento in termini di risultati attesi. Ciò non è certo sorprendente, se si pensa ai giochi di "puro coordinamento" quali quelli delle tabelle 3.11 e 3.12! Tuttavia, è interessante notare come si possa avere un miglioramento anche in presenza di interessi divergenti. Così come è interessante osservare che si riesce ad ottenere un risultato migliore "rinunciando" ad utilizzare tutta l'informazione che sarebbe teoricamente disponibile, a favore di un'abile gestione di suoi "pezzi". Non si tratta di un risultato sconvolgente, quanto piuttosto di un'ennesima tessera che si va ad aggiungere ad un mosaico il cui significato è inequivocabile: in situazioni di interazione strategica, non vale una proprietà di "monotonia" che è banale nel caso delle decisioni con un decisore unico. In TdG non è vero che "più si è informati, meglio è". Può infatti capitare, ad esempio, che un altro possa sfruttare a suo vantaggio il solo fatto che egli sa che noi siamo più informati!

L'altra idea significativa che intendo illustrare brevemente è l'idea di strategia "razionalizzabile". Detto in estrema sintesi, una strategia è "razionalizzabile" se è miglior risposta a una qualche strategia mista dell'altro giocatore. Possiamo immediatamente tradurre questa idea nel linguaggio della teoria delle decisioni in condizioni di rischio: come osservatori esterni, se vediamo che un giocatore (diciamo il giocatore I) sceglie una strategia, possiamo pensare che questa sia la sua scelta ottimale, in corrispondenza dei belief che ha sulle scelte dell'altro giocatore (il giocatore II). Questi belief non sono altro che una distribuzione di probabilità sulle strategie pure a disposizione di II, e quindi formalmente corrispondono all'uso di una strategia mista da parte di II.

Possiamo quindi interpretare la scelta del giocatore I come espressione di una scelta comunque razionale, se riteniamo "insindacabili" i suoi belief. Come abbiamo visto a pagina 42, questo punto di vista è riduttivo, in un contesto di interazione strategica. Va detto, comunque, che quanto meno la condizione di razionalizzabilità è interessante in quanto condizione *necessaria* di razionalità. Si può anche osservare un pregio significativo della condizione di razionalizzabilità: è una condizione sulle strategie di un giocatore, e quindi individua un sottoinsieme dello spazio delle strategie che sono a sua disposizione. Non si presenta, quindi, il problema della "non rettangolarità" che tante difficoltà crea con l'equilibrio di Nash, qualora non si abbia la sua unicità.

In questa sorta di bilanciamento fra pregi e difetti dell'idea di "razionalizzabilità" va anche tenuto presente un ulteriore aspetto: per classi significative di giochi questa condizione è assolutamente priva di mordente, nel senso che tutte le strategie sono "razionalizzabili". Un esempio tipico in questo senso è dato dalla "battaglia dei sessi".

Un aspetto interessante delle strategie "razionalizzabili" è che esse *coin-*

cidono con la classe delle strategie che sopravvivono all'eliminazione iterata di strategie fortemente dominate. Occorre, però, rispetto alla definizione che avevamo visto a pagina 43, fare intervenire le strategie miste. Diremo, cioè, che una strategia $\overline{x} \in X$ è fortemente dominata se esiste un'altra strategia mista $\xi \in \Delta(X)$ tale che[41] $f(\overline{x}, y) < f(\xi, y)$ per ogni $y \in Y$.

Si può dimostrare che un modo equivalente per dire che una strategia è dominata è dire che non è *mai* miglior risposta per nessuna strategia mista a disposizione dell'altro giocatore. L'equivalenza di queste due definizioni, anche se non difficile da dimostrare, non è ovvia (lo dimostra il fatto che essa richiede l'uso del teorema di dualità in programmazione lineare, come si può vedere a esempio in Myerson (1991)).

Termino questo breve cenno all'idea di "razionalizzabilità" dicendo che in questo contesto si presenta una situazione in cui si realizza una essenziale differenza fra il caso in cui i giocatori siano due o più di due. In effetti, l'equivalenza sopra citata vale in generale se si assume che le strategie di un giocatore siano migliore risposta ad una strategia *correlata* da parte dei rimanenti giocatori. Se invece si assume che i "rimanenti giocatori" giochino (in modo indipendente) strategie miste, questa equivalenza viene meno non appena il numero dei giocatori sia maggiore o uguale a tre.

[41] la strategia ξ può naturalmente anche essere una strategia "degenere", ovvero può assegnare probabilità 1 a una strategia pura e quindi essere identificabile a tutti gli effetti con essa.

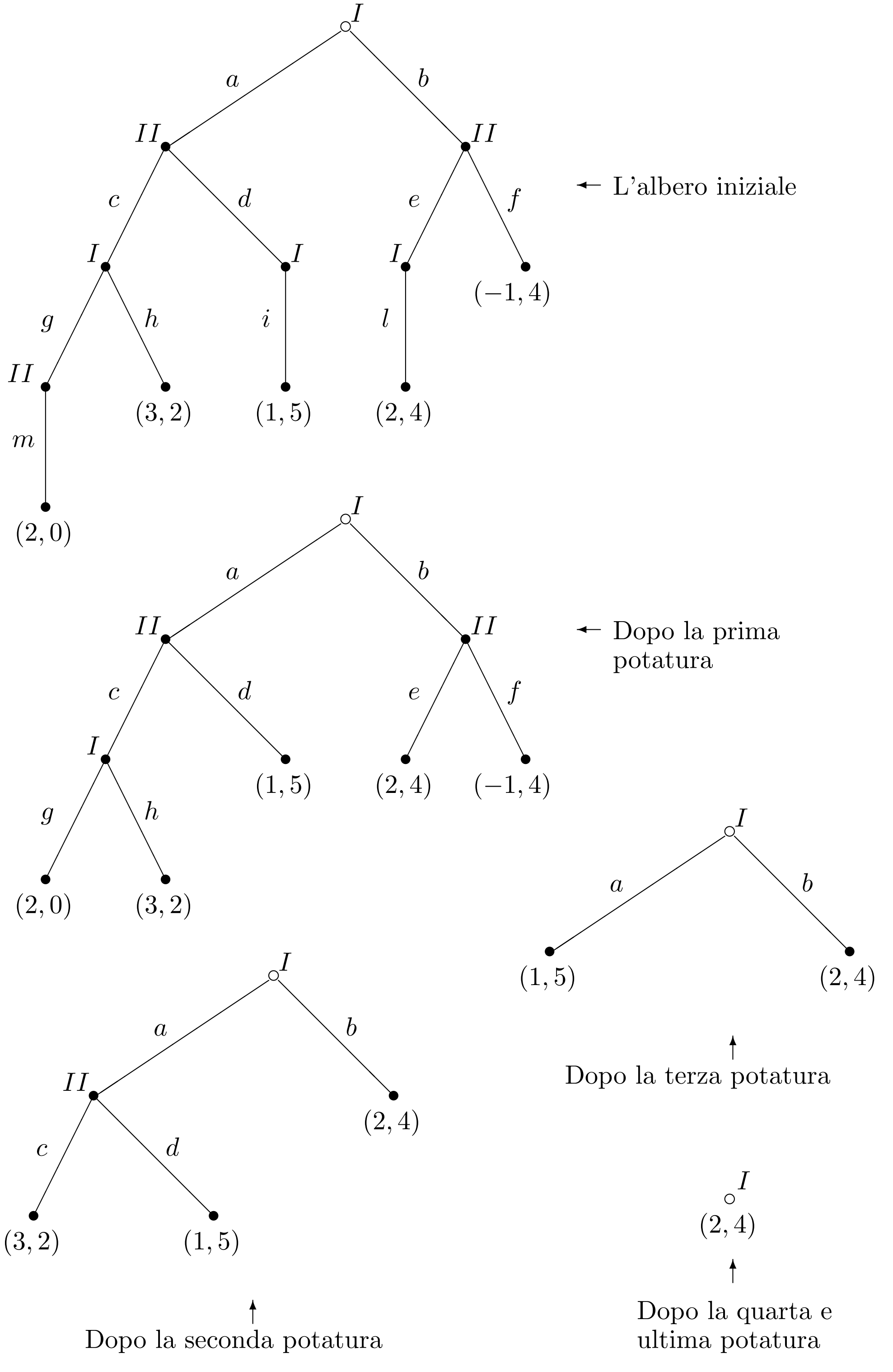


Figura 3.2: Una "potatura" dell'albero del gioco dei fiammiferi

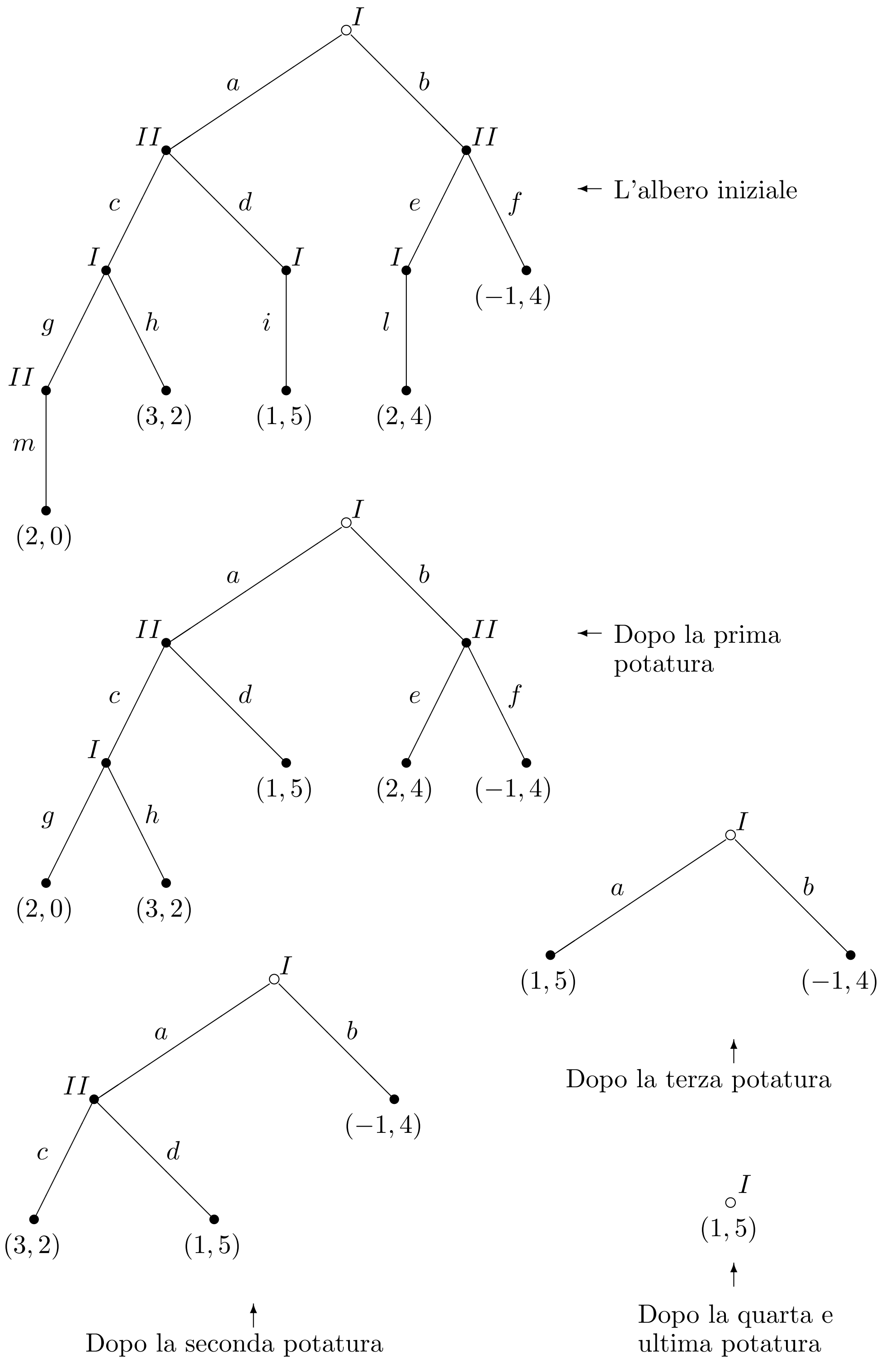


Figura 3.3: Una seconda "potatura" possibile dell'albero del gioco dei fiammiferi

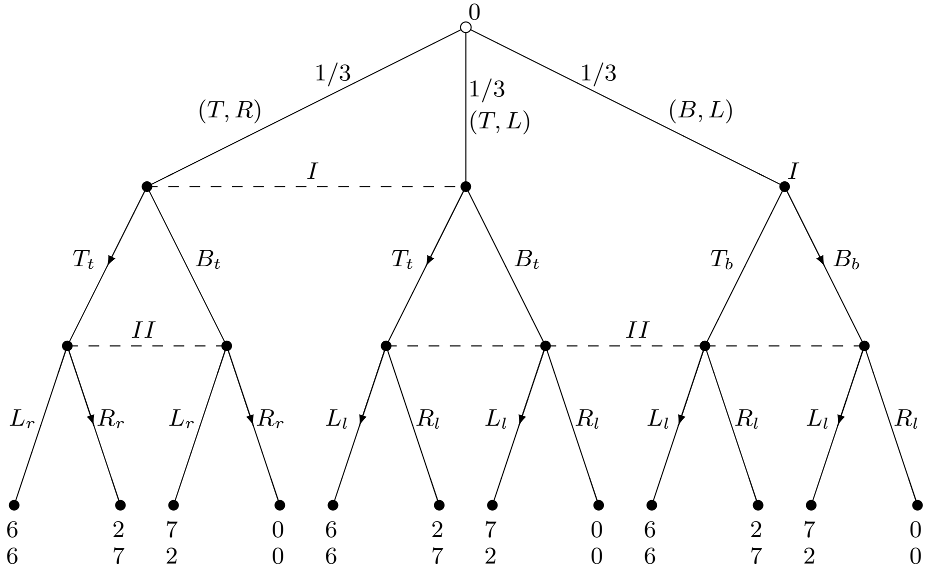


Figura 3.4: La descrizione in forma estesa del meccanismo che porta all'equilibrio correlato

Capitolo 4

Giochi ripetuti

Dopo avere visto i modelli e le problematiche di base della TdG più classica, e prima di passare ad affrontare ulteriori tematiche, dedico questo breve capitolo ad una classe molto particolare di giochi, che possono essere visti come casi specialissimi di giochi in forma estesa. Nonostante ciò, questa classe di giochi merita l'attenzione che ha tradizionalmente ricevuto in TdG, in quanto il suo studio ha l'ambizione di rispondere ad una domanda importante: cosa avviene quando dei giocatori si ritrovano più volte di seguito a giocare "lo stesso gioco"?

E' evidente che esistono casi in cui una situazione di interazione strategica viene ripetuta più volte: un gruppo di impiegati ed il capufficio intrattengono relazioni, alcuni aspetti delle quali si ripropongono ad ogni giornata di lavoro; in molti settori merceologici il negoziante ha di fronte a sé una clientela non molto variabile; nelle relazioni internazionali occorre ricordare che gli Stati di solito non hanno una breve durata; etc.

Le situazioni di interazione difficilmente si ripetono inalterate. Ma, come al solito, è opportuno che l'analisi parta dal caso più semplice: quello in cui un prefissato gruppo di giocatori si ritrova a giocare sempre lo stesso gioco, che usualmente viene detto "gioco costituente". Esattamente questi sono i giochi ripetuti.

Una delle ragioni più importanti che spingono a studiare i giochi ripetuti ha a che fare col sorgere "spontaneo" della cooperazione (e anche di convenzioni) in un contesto che definiamo tecnicamente "non cooperativo", cioè in assenza di istituzioni che possano garantire il rispetto di patti eventualmente sottoscritti fra le parti. Vi è un'intuizione diffusa che taluni comportamenti apparentemente non egoistici appaiano tali solo ad uno sguardo superficiale, mentre possono essere ricondotti al perseguimento del proprio "particulare", semplicemente collocandosi in un'ottica di lungo periodo e di interazioni ripetute. Non credo vi sia bisogno di spendere troppe parole per convincere il lettore della rilevanza, anche filosofica, di questo tipo di problematiche (si pensi alle domande: cos'è la morale? quale è l'origine delle leggi? cosa giustifica le cure parentali?). Il contributo disciplinare della teoria dei giochi a questa problematica consiste nel costruire ed analizzare modelli che permettano di comprendere come la cooperazione possa sorgere e fin dove possa spingersi in un contesto, appunto, non cooperativo. Si può citare a questo proposito, dal punto di vista economico, un fenomeno rilevante, costituito dal formarsi di "cartelli" di imprese in un mercato oligopolistico. La possibilità che questi si possano reggere senza avere bisogno di "patti scritti" rende più difficile, più problematica, l'azione delle autorità anti-trust.

Coerentemente con l'impostazione di questo libro, non mi avventurerò in un'analisi formale e generale dei giochi ripetuti, ma cercherò di illustrare, tramite alcuni esempi sviluppati in un contesto relativamente semplice, alcune delle principali intuizioni che emergono dal loro studio. Osservo esplicitamente che l'analisi sarà svolta interamente all'interno della TdG classica: non sarà quindi dato spazio in questo capitolo a fenomeni ascrivibili alla "razionalità limitata" dei giocatori, od al fatto che essi hanno a disposizione una conoscenza incompleta dei parametri del gioco.

Io mi limiterò ad analizzare il caso in cui il gioco costituente sia finito. Per quanto riguarda, invece, il numero di ripetizioni[1], vedrò i due casi più importanti: il caso in cui queste siano in numero finito e quello in cui siano invece in numero infinito. Quando si parla di gioco finito, occorre precisare se la durata del gioco è prefissata e se ciò è conoscenza comune fra i giocatori[2] . Io assumerò entrambe queste condizioni. Altri casi intermedi sono indubbiamente interessanti: in particolare, quando ad ogni "manche" vi è una probabilità positiva che il gioco termini a quel punto. Anche se vedremo un caso di questo genere, l'analisi sarà comunque concentrata sui due casi polari sopra detti, perché già da questi, e dal loro raffronto, vengono insegnamenti interessanti (ed anche i più noti).

Comincio esaminando il "caso finito": descriverò con un po' di dettaglio quello che avviene nel caso più semplice, quello in cui un gioco sia ripetuto due volte, e mi affiderò all'intuizione del lettore nel caso generale.

Per fissare le idee, considererò la ripetizione di un "gioco costituente" particolare: il dilemma del prigioniero. Mi riferisco al gioco:

[1] Al solito, restrizioni importanti nell'analisi rischiano di passare sotto silenzio. Noto che io considererò solo il caso in cui si abbia ripetizione della interazione a istanti temporali "discreti" e *prefissati*.

[2] Penso sia opportuno non sottovalutare queste precisazioni: d'altronde, non è difficile rendersi conto, anche a livello intuitivo, di quanto possano essere rilevanti.

$I \backslash II$	L	R
T	$(2,2)$	$(0,3)$
B	$(3,0)$	$(1,1)$

Quale possa essere la forma estesa del gioco ripetuto (due volte) non dovrebbe costituire una sorpresa. Essa è rappresentata nella figura 4.1.

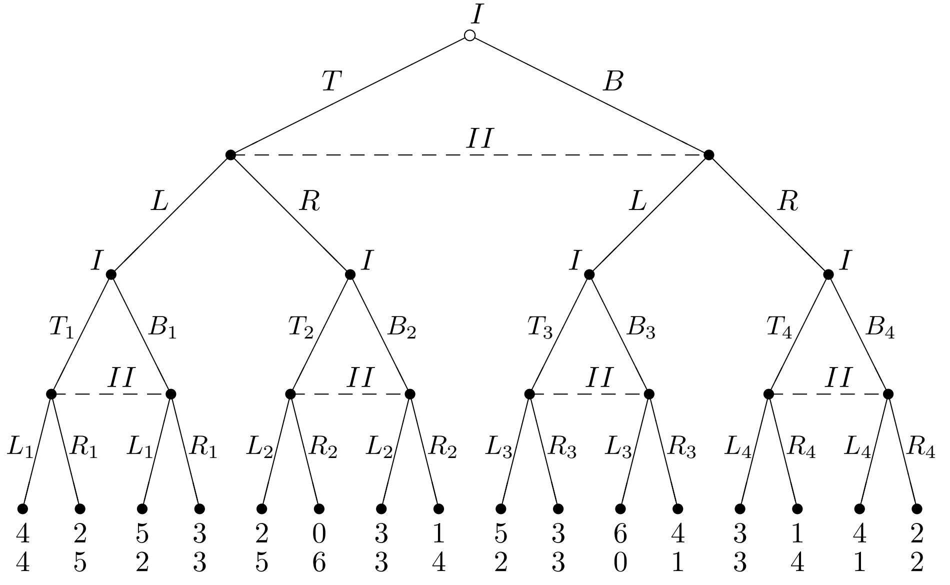


Figura 4.1: Il dilemma del prigioniero ripetuto due volte: forma estesa

Si noti un fatto importante: se si presta attenzione agli insiemi di informazione dei giocatori, si comprende come si sia assunto che ogni giocatore possa *osservare tutte le scelte* effettuate da parte di tutti i giocatori nel turno precedente. Siamo quindi di fronte al caso in cui le possibilità di osservazione sono massime (altro caso potrebbe essere quello in cui i giocatori osservano tutti gli *esiti* avutisi in precedenza, oltre naturalmente a varie possibili misture di questi due casi o di analoghi in cui vi siano possibilità di osservazione parziali).

Altro fatto importante: ho dato per scontato che i payoff finali si ottengano semplicemente sommando i payoff ottenuti nei due stadi. E' una scelta possibile, ma se fra i due stadi intercorre un certo intervallo di tempo, ci potremmo forse aspettare che compaia un "fattore di sconto". Tornerò in seguito su questo tipo di problematiche. Per ora, continuiamo l'analisi assumendo che i payoff siano la somma dei payoff parziali o, se mi farà comodo, che siano i payoff medi: se i payoff rappresentano valori di funzioni di utilità di vNM, non fa nessuna differenza.

WEB Ho anche rappresentato, nella tabella 4.1, la forma strategica[3] di questo gioco per rendere l'idea, anche a livello di immediatezza visiva, di quanto diventi rapidamente grande il numero di strategie a disposizione dei giocatori in un gioco ripetuto. Con soli due stadi, e partendo da un gioco costituente nel quale ogni giocatore ha solo due strategie, abbiamo già $2^5 = 32$ strategie per ciascuno dei giocatori. Con tre stadi il loro numero diventa 2^{21}, cioè circa un milione, con quattro stadi diventano $2 \cdot 2^4 \cdot 2^{16} \cdot 2^{64} = 2^{85}$, etc. Acquisita la consapevolezza di quanto sia grande il numero di strategie a disposizione, oltre che preoccuparsi per la presumibile difficoltà d'analisi, si può osservare che:

- questo numero di strategie così grande permette di codificare strategie anche molto complesse, che prevedono scelte diverse a seconda delle diverse storie pregresse (e quindi acquistano senso termini quali ritorsione, rappacificamento, strategie imitative, etc.)

- d'altra parte, anche se gli spazi di strategie sono grandi, sono comunque molto strutturati e sono costruiti a partire da un ridotto numero di elementi "primitivi"

Avendo a disposizione la forma strategica, visto che con due stadi il gioco è ancora maneggevole, è immediato trovare gli equilibri di Nash in strategie pure. Gli equilibri di Nash (evidenziati con bordature nella tabella 4.1) sono 16, dei quali solo uno è perfetto nei sottogiochi (quello nell'angolo in basso a destra, evidenziato con una doppia bordatura). Si noti che tutti danno lo stesso payoff ai giocatori, e questo payoff è in particolare identico a quello dell'unico equilibrio perfetto nei sottogiochi. Le strategie che individuano quest'ultimo corrispondono al fatto che entrambi i giocatori giochino ogni volta la strategia di equilibrio del gioco costituente.

Abbiamo osservato come il payoff degli equilibri di Nash sia lo stesso di quello dell'equilibrio perfetto nei sottogiochi. Ciò non è affatto casuale, ma deriva dal fatto che le azioni che i giocatori si trovano effettivamente a compiere ad ogni stadio corrispondono a strategie di equilibrio. Si consideri ad esempio l'equilibrio $(BT_1T_2B_3B_4, RL_1R_2L_3R_4)$. Esso prevede che i giocatori scelgano rispettivamente B ed R al primo stadio. Dopodiché, quando devono giocare il secondo stadio si trovano nel nodo più a destra dell'albero ed anche qui è previsto dall'equilibrio che scelgano le strategie di equilibrio del gioco costituente. Le altre azioni previste per il secondo stadio, che in nessun caso danno luogo ad un equilibrio per il gioco costituente, non verranno mai messe effettivamente all'opera. Insomma, un osservatore esterno vedrebbe i giocatori

[3] Per ragioni tipografiche sono state omesse alcune colonne (per l'esattezza, 17). Sulla pagina web si trova la tabella completa

sempre giocare l'equilibrio di Nash del gioco costituente. Questo tipo di osservazione si estende immediatamente al caso in cui il dilemma del prigioniero si ripeta un numero finito K di volte, qualunque sia il numero intero K scelto.

Questo risultato può essere deludente, in quanto mostra che l'iterazione del gioco introduce ben poche novità (addirittura nulle, se ci focalizziamo sui SPE). Ci si può porre la domanda se tutto ciò non sia vero in generale per i giochi finitamente ripetuti. La risposta è che vi è più varietà di quanto non lasci presagire questo esempio così particolare. In effetti, se quanto avviene nel dilemma del prigioniero fosse il caso generale, questo libro non conterrebbe un capitolo dedicato ai giochi ripetuti.

Il fatto è che il dilemma del prigioniero ha una proprietà *molto* particolare: il payoff di equilibrio è uguale al valore di *min max*[4] per ciascuno dei due giocatori. Questo fatto impedisce di "punire" un giocatore che non aderisca ad una strategia "collaborativa". Vediamo di capire il significato di questa affermazione considerando cosa avviene[5] nel caso in cui vi sia un unico equilibrio di Nash il cui profilo di payoff dia a ciascun giocatore un risultato strettamente migliore del valore di *min max*. Se questa condizione è soddisfatta, si può mostrare che per ogni coppia (x, y) di azioni del gioco costituente, e comunque si scelga una soglia di tolleranza $\varepsilon > 0$, purché il numero K di ripetizioni sia sufficientemente grande, c'è un equilibrio del gioco ripetuto il cui payoff, per ogni giocatore, differisce per meno di ε dal payoff che otterrebbe se venisse sempre giocata la coppia di strategie (x, y). In realtà quanto appena affermato non è corretto: va precisata ancora una condizione. Non si può scegliere una coppia qualsiasi di azioni, ma solo una coppia che dia a ciascun giocatore un payoff maggiore del *min max*. E' una condizione che avevamo già anticipato: aggiungo che non è di alcun fastidio per il tipo di risultati che più ci interessano: mostrare che si possono ottenere, in equilibrio, payoff che sono efficienti[6] (per lo meno approssimativamente).

Non introduco i dettagli di una dimostrazione formale di questo fatto: il lettore interessato può consultare per esempio su questo punto Osborne

[4]Si noti: *min max*, ovverossia $\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$, quindi *non* il *max min* che abbiamo utilizzato altrove, in particolare nel contesto dei giochi a somma zero (pagina 65) e che menzioneremo ancora in seguito per i giochi cooperativi.

[5]Osservo che l'analisi sarà limitata alle sole strategie pure. E' una scelta giustificabile, vista l'intenzione di evitare i tecnicismi, essendo già l'analisi delle strategie pure in grado di offrire spunti molto interessanti. Non posso però evitare di ricordare che le strategie miste pongono un problema molto "intrigante": quello della loro "osservabilità"; d'altronde, anche a livello di strategie pure non è facile capire quale strategia sia usata da un giocatore: si ricordi quanto detto a pagina 88. In fondo, nel gioco "a due stadi" una stessa "giocata" può derivare da ben 8 diverse strategie di I ed altrettante di II.

[6]Può essere comunque interessante osservare che in equilibrio si possono ottenere payoff intermedi e anche molto bassi: si può utilmente consultare ad esempio Myerson (1991), pag 329, in tal senso.

e Rubinstein (1994), Proposizione 156.1 (approfitto dell'occasione per dire che Osborne e Rubinstein è un ottimo riferimento per i giochi ripetuti, come d'altronde il già citato Myerson (1991)).

Ciò che intendo fare è una descrizione informale di come si possa "'costruire" un equilibrio del gioco ripetuto con le caratteristiche richieste, su un esempio specifico. E' consigliabile adottare il punto di vista che una strategia di un giocatore sia un piano d'azione deliberato *prima* che il gioco abbia effettivamente inizio.

Consideriamo il gioco "costituente"[7]:

$I \backslash II$	L	R	Z
T	$(2,2)$	$(0,5)$	$(0,0)$
B	$(5,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$
W	$(0,0)$	$(0,0)$	$(-1,-1)$

Qui il valore di *min max* è 0 per entrambi i giocatori, quindi minore del payoff di equilibrio che è 1. Sfrutteremo questo fatto per "costruire" un equilibrio di Nash che dà ad entrambi i giocatori un payoff vicino a 2.

Per descrivere questo equilibrio ci metteremo dal punto di vista del giocatore I (ovviamente il caso di II è speculare) e ci servirà:

- la coppia di strategie (T, L) (che ci interessa perché dà luogo al payoff desiderato: 2 sia per I che per II)
- la coppia di strategie (B, R) (che corrisponde all'equilibrio di Nash)
- la strategia W di I, cioè la strategia di *min max* che serve ad I per poter "punire" il giocatore II (infatti, se I gioca W, il payoff che II può ottenere è al massimo 0, qualunque cosa lui faccia; si noti che è inferiore al payoff di equilibrio)

Il giocatore I inizia giocando T (ovvero, la sua componente della coppia di strategie che dà il risultato desiderato), e continua così fino allo stadio $K - H$ (il numero H vedremo in seguito come sceglierlo), a meno che il giocatore II non giochi qualcosa di diverso da L. Se questo avviene, allora I passa a giocare W dallo stadio successivo fino alla fine del gioco. Giunti allo stadio $K - H$, se non vi è stata prima alcuna "deviazione" di II (dalla strategia L), il giocatore I passa a giocare B fino alla fine del gioco.

[7]Si tratta essenzialmente del dilemma del prigioniero (a parte l'uso del payoff 5 anziché 3, che è solo comodo per i calcoli che faremo) cui è stata aggiunta una riga e una colonna che un osservatore poco avveduto potrebbe considerare irrilevanti, visto che corrispondono a strategie fortemente dominate. Ancora un altro risultato paradossale in TdG...

Dobbiamo verificare che la strategia per I sopra descritta, assieme a quella "gemella" per II, dia effettivamente luogo ad un equilibrio di Nash: cioè vedremo se I abbia convenienza a "deviare" dalla strategia sopra descritta (assumendo che II non devii). Ovviamente, questa convenienza non ci può essere negli ultimi H stadi del gioco, visto che I "sta già giocando un equilibrio" in questi stadi finali (ricordo che stiamo assumendo che II non devii, per cui II gioca R negli stadi finali).

Negli stadi precedenti, avendo assunto che il giocatore II non devii, il giocatore I non si troverà mai a giocare W, ma solo T. Gli conviene "deviare"? Se lo fa, il giocatore II parte con la "punizione", da cui segue:
- I guadagna $f(B, L) - f(T, L) = 5 - 2 = 3$ per un solo stadio (quello in cui ha "deviato")
- I perde *almeno* $f(B, R) - 0 = 1$ per *almeno* H stadi

Infatti, se I non avesse deviato avrebbe ottenuto almeno il payoff di equilibrio negli ultimi stadi, mentre deviando viene "punito" (cioè II gioca Z) e ne consegue che per bene che gli vada ottiene 0.

Quindi, è sufficiente che sia:

$$H \geq \frac{f(B, L) - f(T, L)}{f(B, R) - 0} = 3$$

Ora che abbiamo visto come la strategia descritta ci dia effettivamente un equilibrio di Nash, basterà verificare che i payoff ottenuti sono vicini quanto abbiamo richiesto al payoff "desiderato".

Se, ad esempio, si vuole ottenere un risultato che sia pari almeno a $2 - \varepsilon$ (dove ε è un numero reale "piccolo" che usiamo per dire quale tolleranza accettiamo), il numero di stadi K dovrà essere tanto grande da garantire che:

$$\left| \frac{(K - H) f(T, L) + H f(B, R)}{K} - f(T, L) \right| < \varepsilon$$

Ovvero, che:

$$\frac{H}{K} \left| f(B, R) - f(T, L) \right| < \varepsilon$$

il che è chiaramente possibile purché K sia sufficientemente grande da soddisfare:

$$K > \frac{H}{\varepsilon} \left| f(B, R) - f(T, L) \right|$$

Ora che abbiamo visto, sia pure solo nel caso di un esempio, come si possa ottenere il risultato voluto, vediamo alcuni insegnamenti che ne possiamo trarre (naturalmente sotto le condizioni che abbiamo posto):

1. il dilemma del prigioniero, così "rigido", non è affatto rappresentativo della generalità dei casi

2. i giocatori riescono ad ottenere un payoff che può essere significativamente migliore di quello che verrebbe dalla pura e semplice ripetizione dell'equilibrio di Nash nel gioco costituente

3. per ottenere questo risultato, senza accordi vincolanti, serve che vi sia la possibilità di ritorsioni e che il numero di stadi sia abbastanza grande da poter permettere che la ritorsione sia in grado di controbilanciare il potenziale guadagno di chi viola l'accordo

4. naturalmente rimane aperto il problema della *credibilità* delle minacce insite nelle strategie di punizione. Non abbiamo dimostrato che il profilo di strategie descritto sia un equilibrio perfetto nei sottogiochi, anzi, in realtà non lo è, come vedremo ben presto

5. noi non lo abbiamo visto, perché non ne avevamo bisogno, ma si può usare furbescamente la definizione di equilibrio di Nash (che riguarda la stabilità rispetto a deviazioni *unilaterali*) per definire in modo veloce le strategie di equilibrio per il gioco ripetuto nel caso in cui vi siano più di due giocatori

6. sono tanti gli equilibri che troviamo! Questo significa che, se da un lato ci può fare piacere constatare che i giocatori sono in grado di ottenere risultati "buoni", dall'altro canto il potere predittivo dell'equilibrio di Nash si mostra essere molto povero, in un contesto quale quello dei giochi ripetuti

Riprendiamo il punto 4. Ho osservato che gli equilibri trovati non sono perfetti nei sottogiochi. In effetti, non solo loro non lo sono, ma non c'è proprio speranza: in un gioco con un solo equilibrio, l'unico equilibrio perfetto nei sottogiochi che si ha in una sua ripetizione finita consiste nell'impiego, da parte di ogni giocatore, *ad ogni nodo decisionale* della strategia di equilibrio per il gioco costituente.

Tuttavia, così come abbiamo visto che in talune circostanze si possono ottenere equilibri di Nash ben diversi dalla ripetizione "pedissequa" della strategia di equilibrio del gioco costituente, ci si può attendere che sotto opportune ipotesi vi possano essere delle novità anche a livello di equilibri perfetti nei sottogiochi. Così è, ma abbiamo bisogno che vi siano almeno *due* equilibri di Nash per il gioco costituente. Oltre a questo ingrediente essenziale, occorrono altre ipotesi. Non volendo addentrarmi nei tecnicismi del risultato formale, potrei dire in due parole ciò che è importante: avere la possibilità di punire il giocatore che devii dalla "buona strategia" mediante uno dei due equilibri di Nash (per poterlo fare, può essere utile che uno dei due equilibri domini l'altro).

Come dicono giustamente Osborne e Rubinstein (1994), sono molto interessanti i tipi di strategie usate, perché possiamo immaginare (sperare?) che trovino corrispondenza in norme sociali che si instaurano in situazioni reali di interazione strategica ripetuta.

E' evidente come, nel caso visto in dettaglio, l'equilibrio trovato corrisponde all'uso di strategie che mostrano una "buona disposizione d'animo" da parte dei giocatori, ma al contempo una vigile attenzione che li porta a reagire (e "per sempre") quando l'altro vuole approfittarne. Osservo come non sia essenziale che la reazione alla deviazione sia "imperitura": ciò che occorre, naturalmente, è che la punizione duri abbastanza da non rendere profittevole la "deviazione". D'altro canto, invece, è immediato verificare come, nell'esempio visto, una coppia di strategie che preveda semplicemente di giocare sempre e solo (T, L) non è un equilibrio di Nash (ad esempio, il giocatore I avrebbe vantaggio a "deviare", cioè a giocare B, all'ultimo stadio).

Ora che abbiamo visto "da vicino" uno dei più classici risultati relativi ai giochi *finitamente* ripetuti, illustrerò brevemente il caso dei giochi infinitamente ripetuti (con le loro difficoltà tecniche aggiuntive).

Prima vorrei però presentare un gioco che (come già accennato a pagina 86), dopo ogni stadio ha probabilità positiva di finire. Ho incontrato per la prima volta questo esempio sul libro di Myerson (1991) e mi aveva colpito la sua semplicità, frutto di una accurata scelta dei parametri, che permette così di farsi una idea di cosa possa avvenire se abbiamo un gioco dalla durata temporale incerta.

Consideriamo il dilemma del prigioniero:

$I \backslash II$	L	R
T	$(2, 2)$	$(0, 3)$
B	$(3, 0)$	$(1, 1)$

Modellizziamo in questo modo la presenza di incertezza sulla durata dell'interazione: supponiamo che dopo ogni stadio, a partire dal primo, la probabilità di continuare sia del 99% (e quindi vi sia un 1% di probabilità che il gioco termini).

Consideriamo la strategia che consiste nel giocare T al primo stadio e che prevede di continuare a giocare T finché l'altro gioca L, e passare a B e giocare per sempre B, qualora l'altro giocasse R.

Questa strategia, accoppiata a quella speculare di II, dà luogo ad un equilibrio di Nash. Il payoff atteso è, assumendo che entrambi i giocatori giochino la strategia descritta[8]:

$$2 + 0.99 \cdot 2 + (0.99)^2 \cdot 2 + \ldots = 2 \cdot \big(1 + 0.99 + (0.99)^2 + ...\big) = 2\,\frac{1}{1 - 0.99} = 200,$$

mentre, se I devia, o il payoff non cambia (perché eventuali deviazioni, combinate con la strategia fissata di II, non coinvolgono il percorso realizzato in equilibrio e quindi di fatto non portano a giocare B), oppure diventa (qualora I giochi effettivamente B al *primo stadio* del gioco) al massimo:

$$3 + 0.99 \cdot 1 + (0.99)^2 \cdot 1 + \ldots = 3 + 0.99 \cdot \big(1 + 0.99 + (0.99)^2 + ...\big) =$$

$$= 3 + 0.99\,\frac{1}{1 - 0.99} = 102,$$

ed essendo $102 < 200$, una deviazione non è profittevole per I. Se la deviazione avviene a uno stadio successivo, il payoff atteso, *condizionato al fatto che già si è arrivati a giocare quello stadio*, resta 102 e quindi è di nuovo inferiore al payoff atteso senza deviazione (anche questo, condizionatamente al fatto che si è arrivati fino a quello stadio).

Abbiamo ottenuto un risultato molto interessante, rispetto a quello che avveniva nel caso dei giochi finitamente ripetuti. E' possibile, per i giocatori, avere un equilibrio di Nash che dia loro un payoff migliore di quello previsto dall'*unico* equilibrio del gioco costituente. Cosa che, col dilemma del prigioniero, come abbiamo visto, non può verificarsi in un gioco finitamente ripetuto (in quanto il gioco costituente ha in equilibrio payoff uguali ai valori di *min max*).

Come mai? Una ragione chiave è data dal fatto che non esiste "l'ultima mossa". Ovverossia, ogni stadio potrebbe anche essere l'ultimo, ma è anche altrettanto vero che il gioco potrebbe continuare. Se c'è un ultimo stadio, ineluttabilmente in quello stadio per I è conveniente adottare la strategia B. Il "guaio" sta nel fatto che razionalità ed intelligenza dei giocatori sono conoscenza comune, e quindi II non ha problemi a prevedere questa scelta da parte di I, scegliendo quindi di deviare *allo stadio precedente*, visto che non ha comunque nessuna speranza di indurre un atteggiamento di reciprocità da parte di I adottando una strategia benevolente al penultimo stadio, e così via...

Avendo visto come sia possibile ottenere un risultato efficiente nel caso del dilemma del prigioniero a durata "aleatoria", non dovrebbe sorprendere che si possa ottenere un risultato similare quando il gioco sia ripetuto infinite volte. E' anche abbastanza prevedibile che strategie come quelle che abbiamo

[8]Utilizzo il fatto che la somma di una progressione geometrica di "ragione" d con $n+1$ termini, cioè $1+d+d^2+...+d^n$, vale $\frac{1-d^{n+1}}{1-d}$; da qui segue che la somma della serie geometrica, cioè la somma di tutti gli infiniti termini: $1 + d + d^2 + ...$, è uguale a $\frac{1}{1-d}$, se $0 < d < 1$

visto ci permetteranno di ottenere un equilibrio. Occorre prestare attenzione a un aspetto: se il gioco ha una durata infinita ci troviamo a dover sommare infiniti numeri (i payoff che si ottengono a ogni stadio). Il modo più semplice per ovviare a questo "inconveniente" è quello di introdurre un "fattore di sconto" (che ha una naturale interpretazione come misura della "impazienza" dei giocatori). In questo modo, ci si ritrova di fronte lo stesso tipo di calcoli che abbiamo visto nel caso di una durata "aleatoria". In effetti, basta sostituire al fattore $0,99$ il fattore di sconto (che come da tradizione indicherò con δ) e otteniamo risultati del tutto analoghi. La strategia che consiste nel giocare T al primo stadio e a ogni stadio successivo, perché non vi siano deviazioni da parte dell'altro giocatore (nel qual caso si passa a giocare B per sempre), permette a I di ottenere il payoff:

$$2 + \delta \cdot 2 + \delta^2 \cdot 2 + ... + \delta^n \cdot 2 + ...$$

Deviando a un certo stadio k, invece, il payoff suo sarebbe non superiore a:

$$2 + \delta \cdot 2 + ... + \delta^{k-1} \cdot 2 + \delta^k \cdot 3 + \delta^{k+1} \cdot 1 + ... + \delta^n \cdot 1 + ...$$

Quindi la differenza fra i payoff è pari almeno a:

$$\delta^k \Bigg[\bigg(2 + \delta \cdot 2 + \delta^2 \cdot 2 + ... + \delta^n \cdot 2 + ...\bigg) -$$

$$\bigg(3 + \delta \cdot 1 + \delta^2 \cdot 1 + ... + \delta^n \cdot 1 + ...\bigg)\Bigg] =$$

$$\delta^k \Bigg[\delta\bigg(1 + \delta + \delta^2 + ... + \delta^n + ...\bigg) - \bigg(2 - 3\bigg)\Bigg] = \delta^k \Big[\frac{\delta}{1-\delta} - 1\Big]$$

Ed è non negativa quando $\frac{\delta}{1-\delta} \geq 1$, cioè $\delta \geq \frac{1}{2}$. Pertanto, a meno che il fattore di sconto non sia "troppo piccolo", non c'è convenienza a deviare. Il fatto che il risultato dipenda dal "fattore di sconto" non deve stupire: se i payoff ottenuti nel futuro non sono considerati importanti dal giocatore, verrà meno l'effetto di deterrenza incorporato nelle strategie che stiamo considerando: la punizione che certamente verrà non sarà così grave da controbilanciare il guadagno ottenuto "qui e ora" deviando. Non occorre molta fantasia per immaginare situazioni della vita in cui ci si può trovare ad aver a che fare con un "fattore di sconto molto piccolo". Si noti l'interessante connessione fra fattore di sconto e "probabilità di continuare" che emerge dal confronto con l'esempio di Myerson, una connessione che non è tipica della TdG, ma riguarda in generale problemi di decisione.

Questo semplice esempio chiude il capitolo. Si tratta di un caso particolare di tutta una serie di risultati riguardanti i giochi infinitamente ripetuti che vanno sotto il nome complessivo di "folk theorem": il "messaggio" convogliato da questi risultati è che in un gioco infinitamente ripetuto si può ottenere come payoff di equilibrio una qualsivoglia coppia di payoff del gioco costituente purché non siano peggiori dei payoff di *max min*, in particolare coppie di payoff efficienti soddisfacenti questa condizione. Il lettore interessato ad approfondire l'affascinante tematica dei giochi ripetuti può utilmente consultare i libri di Osborne e Rubinstein (1994) e di Myerson (1991); avremo comunque occasione di ritornare su alcune questioni connesse in alcuni dei capitoli successivi.

Osservo, anche per stimolare la curiosità del lettore, che ho ignorato i giochi stocastici (detto in breve: ad ogni stadio viene "sorteggiato" il gioco componente che i giocatori saranno chiamati a giocare nello stadio successivo); i giochi nei quali vi è un giocatore che vive "eternamente" ed affronta giocatori i quali, invece, cambiano ad ogni stadio; i giochi in cui le mosse (o gli esiti) non sono perfettamente osservabili. Noto anche che, pur se non ho del tutto ignorato l'interpretazione delle strategie d'equilibrio nei giochi ripetuti, vi sarebbe ben più da dire: su questo, molto è stato fatto in un contesto di apprendimento e di "evoluzione" (temi che verranno introdotti nel capitolo 6); il lettore interessato può consultare Binmore (1994 e 1998) e Young (1998).

I \ II	L L_1 L_2 L_3 L_4	L L_1 L_2 L_3 R_4	L L_1 L_2 R_3 L_4	...	R L_1 R_2 L_3 L_4	R L_1 R_2 L_3 R_4	R L_1 R_2 R_3 L_4	R L_1 R_2 R_3 R_4	R R_1 L_2 L_3 L_4	R R_1 L_2 L_3 R_4	R R_1 L_2 R_3 L_4	R R_1 L_2 R_3 R_4	R R_1 R_2 L_3 L_4	R R_1 R_2 L_3 R_4	R R_1 R_2 R_3 L_4	R R_1 R_2 R_3 R_4
$TT_1T_2T_3T_4$	(4, 4)	(4, 4)	(4, 4)	...	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(2, 5)	(2, 5)	(2, 5)	(2, 5)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)
$TT_1T_2T_3B_4$	(4, 4)	(4, 4)	(4, 4)	...	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(2, 5)	(2, 5)	(2, 5)	(2, 5)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)
$TT_1T_2B_3T_4$	(4, 4)	(4, 4)	(4, 4)	...	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(2, 5)	(2, 5)	(2, 5)	(2, 5)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)
$TT_1T_2B_3B_4$	(4, 4)	(4, 4)	(4, 4)	...	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(2, 5)	(2, 5)	(2, 5)	(2, 5)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)
$TT_1B_2T_3T_4$	(4, 4)	(4, 4)	(4, 4)	...	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)
$TT_1B_2T_3B_4$	(4, 4)	(4, 4)	(4, 4)	...	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)
$TT_1B_2B_3T_4$	(4, 4)	(4, 4)	(4, 4)	...	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)
$TT_1B_2B_3B_4$	(4, 4)	(4, 4)	(4, 4)	...	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)
$TB_1T_2T_3T_4$	(5, 2)	(5, 2)	(5, 2)	...	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(2, 5)	(2, 5)	(2, 5)	(2, 5)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)
$TB_1T_2T_3B_4$	(5, 2)	(5, 2)	(5, 2)	...	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(2, 5)	(2, 5)	(2, 5)	(2, 5)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)
$TB_1T_2B_3T_4$	(5, 2)	(5, 2)	(5, 2)	...	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(2, 5)	(2, 5)	(2, 5)	(2, 5)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)
$TB_1T_2B_3B_4$	(5, 2)	(5, 2)	(5, 2)	...	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(2, 5)	(2, 5)	(2, 5)	(2, 5)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)	(0, 6)
$TB_1B_2T_3T_4$	(5, 2)	(5, 2)	(5, 2)	...	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)
$TB_1B_2T_3B_4$	(5, 2)	(5, 2)	(5, 2)	...	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)
$TB_1B_2B_3T_4$	(5, 2)	(5, 2)	(5, 2)	...	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)
$TB_1B_2B_3B_4$	(5, 2)	(5, 2)	(5, 2)	...	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(3, 3)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)	(1, 4)
$BT_1T_2T_3T_4$	(5, 2)	(5, 2)	(3, 3)	...	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)
$BT_1T_2T_3B_4$	(5, 2)	(5, 2)	(3, 3)	...	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)
$BT_1T_2B_3T_4$	(6, 0)	(6, 0)	(4, 1)	...	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)
$BT_1T_2B_3B_4$	(6, 0)	(6, 0)	(4, 1)	...	(4, 1)	$\boxed{(2, 2)}$	(4, 1)	$\boxed{(2, 2)}$	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	$\boxed{(2, 2)}$	(4, 1)	$\boxed{(2, 2)}$
$BT_1B_2T_3T_4$	(5, 2)	(5, 2)	(3, 3)	...	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)
$BT_1B_2T_3B_4$	(5, 2)	(5, 2)	(3, 3)	...	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)
$BT_1B_2B_3T_4$	(6, 0)	(6, 0)	(4, 1)	...	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)
$BT_1B_2B_3B_4$	(6, 0)	(6, 0)	(4, 1)	...	(4, 1)	$\boxed{(2, 2)}$	(4, 1)	$\boxed{(2, 2)}$	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	$\boxed{(2, 2)}$	(4, 1)	$\boxed{(2, 2)}$
$BB_1T_2T_3T_4$	(5, 2)	(5, 2)	(3, 3)	...	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)
$BB_1T_2T_3B_4$	(5, 2)	(5, 2)	(3, 3)	...	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)
$BB_1T_2B_3T_4$	(6, 0)	(6, 0)	(4, 1)	...	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)
$BB_1T_2B_3B_4$	(6, 0)	(6, 0)	(4, 1)	...	(4, 1)	$\boxed{(2, 2)}$	(4, 1)	$\boxed{(2, 2)}$	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	$\boxed{(2, 2)}$	(4, 1)	$\boxed{(2, 2)}$
$BB_1B_2T_3T_4$	(5, 2)	(5, 2)	(3, 3)	...	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)
$BB_1B_2T_3B_4$	(5, 2)	(5, 2)	(3, 3)	...	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)
$BB_1B_2B_3T_4$	(6, 0)	(6, 0)	(4, 1)	...	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)	(3, 3)	(1, 4)
$BB_1B_2B_3B_4$	(6, 0)	(6, 0)	(4, 1)	...	(4, 1)	$\boxed{(2, 2)}$	(4, 1)	$\boxed{(2, 2)}$	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	(2, 2)	(4, 1)	$\boxed{(2, 2)}$	(4, 1)	$\boxed{\boxed{(2, 2)}}$

Tabella 4.1: Il dilemma del prigioniero ripetuto due volte: forma strategica

Capitolo 5

Giochi a informazione incompleta

E' giunta l'ora di uscire fuori dalla "gabbia" delle assunzioni classiche della TdG.

Questo capitolo ed il seguente saranno dedicati appunto ad analizzare come si possano attenuare i forti requisiti di informazione, intelligenza e razionalità che abbiamo presupposto nei capitoli sviluppati finora.

In questo capitolo cominceremo con l'attenuare l'ipotesi relativa all'informazione a disposizione dei giocatori. In termini della categorizzazione standard della disciplina, vedremo i cosiddetti "giochi a informazione incompleta". Già Luce e Raiffa (1957) avevano sottolineato come le assunzioni (classiche) sulla conoscenza dei parametri del gioco fossero estremamente onerose, rispetto a quanto normalmente un decisore può effettivamente conoscere. Il guaio è che, per modellizzare questa situazione, non si può seguire la strada tradizionale delle decisioni in condizioni di incertezza. Cerco di spiegarmi. Se uno dei due giocatori (ad esempio, I) ha dei dubbi su certe caratteristiche rilevanti dell'altro giocatore, si potrebbe pensare di rappresentare questa situazione mediante l'assegnazione, da parte di I, di probabilità a diversi possibili caratteristiche di II. Solo che la storia non finisce qui, perché per scegliere cosa fare può essere importante per II conoscere queste probabilità. Possiamo riapplicare l'idea appena usata: II assegna probabilità alle probabilità assegnate da I. Ma non occorre particolare acutezza per capire che si sono aperte le porte ad un regresso infinito, e non è affatto evidente come possa essere modellizzata questa gerarchia di probabilità (né se lo si possa fare, e non è detto che tutto ciò sia comunque sensato, alla fin fine).

E' stato merito di Harsanyi aver dato una risposta a questi problemi in una famosa terna di articoli, apparsi su *Management Science* nel 1967-68, il cui titolo era appunto (tradotto in italiano) *Giochi ad informazione incompleta,* *giocati da giocatori bayesiani.* Si noti la precisazione fatta a proposito dei giocatori bayesiani, che è molto importante, come vedremo.

Volendo presentare un esempio di gioco a informazione incompleta che sia il più semplice possibile, ricorrerò ad un classico, visto e rivisto sui manuali di TdG. Giustamente, poiché si tratta di un esempio che tenta di ridurre al minimo le complicazioni della situazione ed i requisiti tecnici per la sua analisi.

Abbiamo due giocatori, ciascuno dai quali ha a disposizione due strategie: T e B per I ed L, R per II, che devono giocare un gioco a mosse contemporanee. Siamo quindi di fronte ad una "game form" assolutamente standard (vedi tabella 5.1).

$I \backslash II$	L	R
T	a	b
B	c	d

Tabella 5.1: La "game form"

La novità emerge quando si passa dalla "game form" al gioco: uno dei giocatori (il giocatore I), non conosce esattamente tutte le caratteristiche dell'altro giocatore. Per ridurre drasticamente la complessità, assumiamo più precisamente che egli sappia che l'altro giocatore, il giocatore II, può essere di due tipi diversi, che si distinguono l'uno dall'altro per il fatto (e solo per questo!) di avere preferenze diverse rispetto agli esiti possibili. Descriverò la situazione facendo ricorso ad un paio di tabelle, nelle quali rappresento, come al solito, le preferenze dei giocatori indicandone i payoff.

I\II.1	L.1		R.1	
T	1	2	0	1
B	0	4	1	3

I\II.2	L.2		R.2	
T	1	3	0	4
B	0	1	1	2

Tabella 5.2: Esempio di gioco a informazione incompleta

Come si vede, le due tabelle si differenziano per i payoff del giocatore II. Sembra plausibile che queste due tabelle complessivamente descrivano questa situazione (che è, si badi bene, *conoscenza comune* fra i giocatori): il giocatore II può essere di due tipi diversi, distinti fra loro esclusivamente per il fatto che hanno preferenze diverse sugli esiti possibili; il giocatore I, consapevole di questa situazione, non ha a sua disposizione l'informazione necessaria per discriminare fra i due tipi. Al contrario, il giocatore II sa (ovviamente?) di che "tipo" sia egli stesso.

Prima di passare ad analizzare questo gioco, vorrei brevemente descrivere una delle "storielle" che possono essere raccontate per motivare lo studio di un gioco come questo (intendo dire, con queste strategie e questa struttura di payoff). Nel manuale di Fudenberg e Tirole (1991), si fa riferimento ad un settore industriale (potrebbe riguardare la produzione di qualche tipo speciale di processori) e a due aziende. Una di queste aziende (il giocatore I) deve decidere se entrare in questo settore oppure no; l'altra azienda (il giocatore II) è invece già operante e deve invece decidere se costruire oppure no una nuova fabbrica. La novità, la sorgente della "informazione incompleta", è che l'azienda I non sa quali possano essere i costi di costruzione per l'azienda II. Più specificatamente, il costo di costruzione può essere "alto" (tipo 1) oppure "basso" (tipo 2). Se interpretiamo l'azione R come "costruire la fabbrica" e l'azione T come "entrare in quel settore produttivo", otteniamo la tabella 5.3.

I \ II.1	non costruire.1		costruire.1	
entrare	1	2	-1	0
non entrare	0	3	0	2

costi alti

I \ II.2	non costruire.2		costruire.2	
entrare	1	2	-1	3
non entrare	0	3	0	5

costi bassi

Tabella 5.3: Esempio di gioco a informazione incompleta

Come si vede, il gioco ottenuto non è identico a quello che ho presentato sopra, ma l'analisi che farò in seguito si adatta altrettanto bene a questo gioco. Anzi, il lettore è invitato a verificare questa affermazione. Osservo come la rappresentazione che questo gioco dà della situazione descritta è basata sulla omissione di una enorme quantità di dettagli. E' per questo che ho parlato di "storiella"; d'altro canto, non va sminuita l'efficacia di modelli molto semplificati nel cogliere aspetti significativi di un problema, aspetti che molto spesso permangono anche di fronte ad una maggiore ricchezza di dettagli.

Ritornando al nostro gioco della tabella 5.2, come si può adeguatamente affrontare una situazione di questo genere? Quali dovrebbero essere le scelte operate da due giocatori razionali ed intelligenti? Per rispondere a queste domande formuleremo una ipotesi, restrittiva certamente, ma ben lungi dall'essere particolarmente esotica: questa ipotesi ci darà modo di ricondurci quasi automaticamente alla situazione classica. L'ipotesi è che vi sia una "popolazione" di individui, con una data e ben nota composizione di tipi 1 e 2, che possono impersonare il ruolo del giocatore II: chi sia colui che effettivamente impersonerà il ruolo del giocatore II è il risultato di una estrazione a sorte di un individuo dalla popolazione data.

Non penso che sia necessario spendere parole per convincere il lettore che l'assunzione fatta si adatta con buona approssimazione (e con le eventuali generalizzazioni, in primis quella di non restringersi al caso di soli due tipi o a quello di incertezza solo sui tipi di un giocatore) a molte circostanze. Piuttosto, è meglio rimarcare che, per essere poi utilizzabile, l'ipotesi fatta include anche l'assunzione che il meccanismo di estrazione fra i due tipi del giocatore II e le relative probabilità di estrazione (ovvero la composizione della popolazione), siano *conoscenza comune* fra i due giocatori.

Se siamo disposti ad accettare questa descrizione nel suo complesso, allora la situazione data è immediatamente riconducibile nell'alveo della TdG più classica. Possiamo infatti considerare il gioco in forma estesa di figura 5.2.

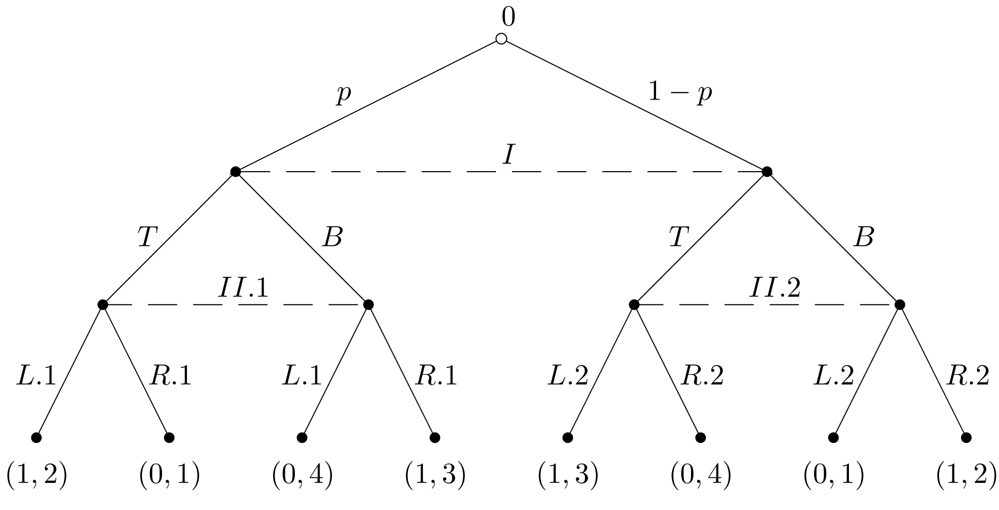


Figura 5.1: Descrizione in forma estesa del gioco a informazione incompleta di tabella 5.2

Abbiamo una mossa iniziale del caso, la quale seleziona quale sia il "tipo" del giocatore II, con le probabilità derivanti dalla distribuzione dei due tipi nella popolazione di "giocatori II" (p è la probabilità che II sia di tipo 1). Dopo di che, tocca scegliere al giocatore I, il quale deve fare la sua scelta fra T e B senza sapere quale dei due tipi abbia di fronte (in figura[1], senza sapere se si trova nel nodo di sinistra o in quello di destra, cosa resa manifesta tecnicamente grazie al fatto che i due nodi sono congiunti da una linea tratteggiata, a significare che appartengono ad uno stesso insieme di informazione per il giocatore I).

[1]Può essere utile fare un confronto tra la struttura degli insiemi di informazione di questo gioco e quelli dei tre giochi descritti alla fine del capitolo 2. In particolare, gli esempi delle figure 2.9 e 2.10 possono essere visti come rappresentazione di situazioni ad informazione incompleta.

Dopo[2] che I ha fatto la sua scelta, tocca agire a II. Egli non è in grado di sapere se I abbia scelto T oppure B, però sa se è del tipo 1 o del tipo 2: tutto ciò è reso dal fatto che ha due insiemi di informazione i quali gli permettono di discriminare fra l'essere nella parte sinistra o destra dell'albero, ma non di conoscere le scelte fatte da I.

Tutto qui. E' TdG classica. Possiamo per esempio trovare agevolmente gli equilibri di Nash di questo gioco, così come quelli perfetti nei sottogiochi, e così via.

In realtà, c'è da dire che la mossa del caso introdotta all'inizio del gioco può richiedere una interpretazione audace: si pensi al caso in cui il tipo di un giocatore corrisponda al sesso del giocatore (cosa necessaria se questo "parametro" non fosse noto all'altro giocatore). Sembra per lo meno curioso immaginare un giocatore analizzare il gioco prima di sapere quale sia il suo sesso. In effetti, potrebbe essere più ragionevole identificare i vari tipi di un giocatore con giocatori diversi: nel nostro caso, si tratterebbe di analizzare il gioco come se si fosse di fronte a tre giocatori invece che a due. Comunque, come detto, l'esempio è stato scelto in modo oculato per poterlo analizzare nel più semplice modo possibile, per cui la risposta all'implicita domanda appena formulata risulta essere irrilevante.

Cerchiamo allora di giungere rapidamente alla "soluzione" per il nostro gioco. La sua analisi è resa facile dal fatto che per $II.1$ la strategia $L.1$ è dominante, mentre per $II.2$ lo è $R.2$. Quindi, I può dedurre subito che il suo payoff sarà:

- 1 oppure 0 a seconda che abbia di fronte $II.1$ oppure $II.2$, se lui gioca T

- 0 oppure 1 a seconda che abbia di fronte $II.1$ oppure $II.2$, se lui gioca B

Ma abbiamo a disposizione la probabilità che II sia di tipo 1 oppure 2, e quindi I può calcolare agevolmente il payoff atteso che otterrà dalla strategia che utilizza:

- se sceglie T avrà un payoff pari a 1 con probabilità p e pari a 0 con probabilità $1-p$ e pertanto il suo payoff atteso sarà: $p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$

- se sceglie B avrà un payoff pari a 0 con probabilità p e pari a 1 con probabilità $1-p$ e pertanto il suo payoff atteso sarà: $p \cdot 0 + (1-p) \cdot 1 = 1-p$

[2]Sottolineo quanto già detto a tempo debito: il fatto che tocchi "prima" muovere a I e "poi" a II è *non ha rilevanza alcuna*. Ciò che conta è l'informazione a disposizione del giocatore quando deve fare la sua scelta.

Quindi, per I si tratta semplicemente di vedere quale sia il più grande fra i due numeri p e $1-p$, e quindi sceglierà T o B di conseguenza. Le scelte di II, qualunque sia il suo tipo, sono ovvie, visto che ciascuno dei suoi due tipi ha un'unica strategia dominante. Possiamo concludere che, se $p > 1-p$ (cioè, se $p > 1/2$), I sceglierà T e quindi il suo payoff atteso sarà pari a p. Il payoff sarà pari a 2 per il tipo 1 di II, mentre sarà 4 per il tipo 2 di II (sempre se $p > 1/2$: ricordo che il valore di p è conoscenza comune fra i giocatori). Lascio al lettore, se vuole, trarre le conclusioni nel caso $p = 1/2$ e in quello in cui $p > 1/2$.

Abbiamo quindi analizzato completamente il gioco dato, senza dover ricorrere ad alcun strumento di tipo nuovo, trovandone l'equilibrio di Nash. Tutto ciò grazie alla ipotesi semplificatrice che abbiamo fatto.

Prima di procedere oltre nell'analisi teorica dei giochi ad informazione incompleta, approfitto della semplicità di questo esempio per fare una considerazione di un certo interesse. Supponiamo che sia fattibile per II comunicare con I: in termini tecnici, che possa inviare a I un segnale (naturalmente, l'unica cosa che valga la pena segnalare è quale sia il suo tipo, o una informazione parziale a proposito). Per rendere il discorso ancora più preciso, supponiamo che mandare un segnale non comporti alcun costo per ognuno dei due tipi possibili di giocatore II. Gli conviene mandare un segnale quale: "il mio tipo è ..."? E, soprattutto, quale potrebbe essere la reazione del giocatore I a quel segnale?

Ebbene, si vede immediatamente che ognuno dei due tipi di II ha interesse a mandare un segnale *non veridico* ad I e quindi quest'ultimo non ha alcun motivo per prestare fede al segnale ricevuto. Supponiamo che il giocatore II sia del tipo 1: se egli dice ad I il suo vero tipo, quest'ultimo giocherà T, sapendo che $L.1$ domina $R.1$ per $II.1$ e pertanto $II.1$ otterrà un payoff pari a 0. Invece, se dice ad I di essere del tipo 2 (e se I gli crede!), allora specularmente I giocherà B e quindi $II.1$ otterrà un payoff pari a 1. L'analisi è del tutto analoga per il tipo 2.

Ora, i nostri giocatori (in particolare, il giocatore I) sono intelligenti e quindi in grado di replicare senza alcun problema queste nostre considerazioni: il risultato è che un segnale mandato da II che indichi quale ne sia il tipo non sarà credibile per I, e quindi è irrilevante per II mandarlo.

Naturalmente il risultato che abbiamo appena descritto dipende dai payoff dei giocatori. Basta considerare la situazione rappresentata nella tabella 5.4.

L'analisi di questo gioco a informazione incompleta è del tutto analoga al precedente, e ne consegue un payoff atteso per I pari a p se gioca T e pari a $1-p$ se gioca B. Quindi, se supponiamo che sia $p > 1/2$, otteniamo che I giocherà T, con un payoff atteso per I pari a p ed un payoff pari a 2 per $II.1$ e pari a 0 per $II.2$. E' chiaro che il tipo 2 di II ha un incentivo a far sapere a I che lui è, appunto, di tipo 2. Quindi ci si può aspettare che, qualora sia

I\II.1	L.1		R.1	
T	1	2	0	0
B	0	1	1	0

I\II.2	L.2		R.2	
T	1	0	0	1
B	0	0	1	2

Tabella 5.4: Altro esempio di gioco a informazione incompleta

possibile, il tipo 2 di II mandi a I un segnale che appunto specifichi che lui è di tipo 2. Per capire se I presterà fede a questo messaggio, occorre vedere se e quale segnale abbia interesse a mandare il tipo 1. Di fatto, per 1 "va bene così": lui non ha alcuna necessità di mandare alcun messaggio. E certo non ha nessuna ragione di mandare un messaggio il quale dica ad I di essere del tipo 2. Morale: se I riceve un messaggio da II che gli dice di essere del tipo 2, ha tutte le ragioni per credergli.

Per procedere nell'analisi teorica dei giochi ad informazione incompleta, ritorniamo al nostro semplice modellino, per notare che l'idea usata in quel contesto può essere immediatamente generalizzata (come sempre in questo libro, mi limiterò al caso con due giocatori, ma le stesse idee possono essere estese senza novità al caso di un numero finito qualsiasi di giocatori).

Possiamo immaginare che vi sia una popolazione costituita da *coppie* di giocatori $(I.i, II.j)$, e che sia di pubblico dominio la probabilità p_{ij} che tale coppia venga estratta. Con le dovute modifiche, questo caso può essere trattato esattamente con le stesse idee del caso più semplice. Possiamo darne una rappresentazione in forma estesa: mi limito ad un "accenno" di forma estesa, senza inserire tutti i dettagli (vedi figura 5.2). Come si vede nella figura, "giocando" con gli insiemi di informazione si rende l'idea che ognuno dei giocatori sappia quale è il suo tipo.

Vediamo di rappresentare in forma tabellare la situazione data (faccio il caso, analogo a quello usato per la forma estesa, di due tipi per I e di tre per II). Non rappresento però né la game form né il gioco, bensì uso la tabella 5.5 per rappresentare i valori della distribuzione di probabilità.

$I \backslash II$	II.1	II.2	II.3
I.1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
I.2	p_{21}	p_{22}	p_{23}

Tabella 5.5: Le probabilità per le coppie di tipi

Si noti, innanzitutto, che un dato tipo di un giocatore (ad esempio, il tipo

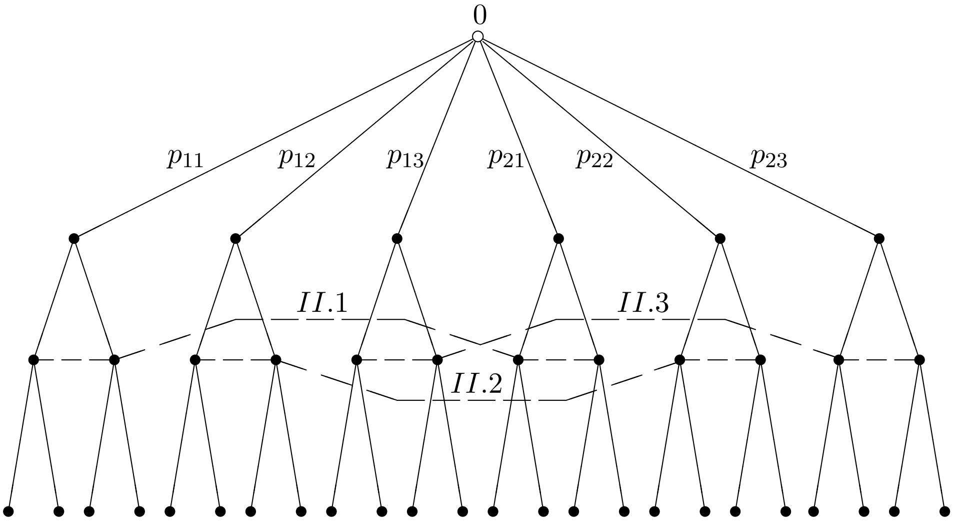


Figura 5.2: Gioco a informazione incompleta descritto in forma estesa

1 del giocatore I), può ricavare quale sia la probabilità che ha di trovarsi di fronte ai vari tipi di II: ad esempio, $\frac{p_{13}}{p_{11}+p_{12}+p_{13}}$ è la probabilità che abbia di fronte il tipo 3 del giocatore II. Il calcolo fatto non è altro che la valutazione della probabilità che II sia di tipo 3, *condizionata* al fatto che I sia di tipo 1. Indicherò questa probabilità col simbolo $p^{I.1}_{II.3}$: un po' pesante, ma utile. Questi conti sono importanti, in quanto permettono a ciascuno dei tipi dei due giocatori di calcolare il payoff atteso, assumendo che siano utilizzate date strategie.

Uno si potrebbe chiedere come mai si sia assunto di avere una popolazione di *coppie* di giocatori, e non che vi siano due distinte popolazioni (una per il giocatore I ed una per il giocatore II), dalle quali viene estratto, in modo indipendente, rispettivamente il tipo del giocatore I e quello di II. Il caso di avere due distinte popolazioni di giocatori I e giocatori II è più che ragionevole: si può pensare che I sia un acquirente e II un venditore di una casa, oppure che I sia maschio e II sia femmina. Se la assunzione di estrazione a sorte in modo *indipendente* dalle due popolazioni è applicabile, avremo semplicemente che $p_{ij} = \hat{p}_i\hat{\hat{p}}_j$, dove $\hat{p}_i$ è la probabilità di estrarre un giocatore di tipo i dalla popolazione di giocatori I e $\hat{\hat{p}}_j$ è la probabilità di estrarre un giocatore di tipo j dalla popolazione di giocatori II. Abbiamo così una tabella come la 5.6.

E' chiaro che questa volta i vari tipi dei giocatori non possono ottenere informazione addizionale sulla distribuzione dei tipi che si trovano ad affrontare, sfruttando la conoscenza di quale tipo loro siano: l'indipendenza delle

$I \backslash II$	II.1	II.2	II.3
I.1	$\hat{p}_1 \cdot \hat{\hat{p}}_1$	$\hat{p}_1 \cdot \hat{\hat{p}}_2$	$\hat{p}_1 \cdot \hat{\hat{p}}_3$
I.2	$\hat{p}_2 \cdot \hat{\hat{p}}_1$	$\hat{p}_2 \cdot \hat{\hat{p}}_2$	$\hat{p}_2 \cdot \hat{\hat{p}}_3$

Tabella 5.6: Il caso di due popolazioni di tipi "indipendenti"

probabilità non permette, ad esempio, ad $I.1$ di inferire alcunché di nuovo o di più sul tipo del giocatore II, dal fatto di essere lui di tipo 1.

Quindi, per riassumere, il caso descritto dalla estrazione a sorte della coppia da una popolazione di coppie, semplicemente rappresenta un caso più generale rispetto a quella di estrazione indipendente da due popolazioni di giocatori I e II rispettivamente. Ci permette di considerare situazioni in cui ci sia una correlazione fra i vari tipi di giocatori I e II.

E' giunta l'ora di descrivere in dettaglio il modello formale che va comunemente sotto il nome di gioco bayesiano (in forma strategica). Come detto, mi limiterò al caso di due giocatori e, come fatto altrove, al caso "finito".

Abbiamo due giocatori I e II; il giocatore I può essere di H tipi diversi: $I.1, \ldots, I.h, \ldots, I.H$, mentre per II sono K: $II.1, \ldots, II.k, \ldots, II.K$.

E' data una distribuzione di probabilità sulle coppie possibili di tipi: p_{hk} indica la probabilità (congiunta) che I sia di tipo h e II sia di tipo k. Data questa distribuzione di probabilità, possiamo costruire come visto prima le probabilità condizionate[3]:

$$p_{II.k}^{I.h} = \frac{p_{hk}}{\sum_{k=1}^{K} p_{hk}}$$

$$p_{I.h}^{II.k} = \frac{p_{hk}}{\sum_{h=1}^{H} p_{hk}}$$

Ogni tipo del giocatore I può scegliere una azione in $X = \{x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m\}$, mentre per II la scelta è in $Y = \{y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_n\}$.

Per ogni coppia di tipi $(I.h, II.k)$ avremo una tabella dei payoff come la 5.7 (i payoff sono disposti in tabella in modo diverso dal solito solo per ragioni di spazio orizzontale sulla pagina!).

Questi sopra elencati sono i dettagli necessari e sufficienti per calcolare i payoff attesi per ogni tipo di ciascuno dei due giocatori, essendo date le scelte delle azioni da parte di ognuno dei tipi. Ad esempio, se il tipo $I.h$ usa l'azione

[3]Se le somme a denominatore sono positive. Se fossero uguali a zero, la probabilità condizionata non è determinata, ma d'altro canto in questo caso è inutile conoscerla!

$I.h \backslash II.k$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_n
x_1	$f_{hk}(x_1, y_1)$ $g_{hk}(x_1, y_1)$	$\dots$	$f_{hk}(x_1, y_j)$ $g_{hk}(x_1, y_j)$	$\dots$	$f_{hk}(x_1, y_n)$ $g_{hk}(x_1, y_n)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	$f_{hk}(x_i, y_1)$ $g_{hk}(x_i, y_1)$	$\dots$	$f_{hk}(x_i, y_j)$ $g_{hk}(x_i, y_j)$	$\dots$	$f_{hk}(x_i, y_n)$ $g_{hk}(x_i, y_n)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	$f_{hk}(x_m, y_1)$ $g_{hk}(x_m, y_1)$	$\dots$	$f_{hk}(x_m, y_j)$ $g_{hk}(x_m, y_j)$	$\dots$	$f_{hk}(x_m, y_n)$ $g_{hk}(x_m, y_n)$

Tabella 5.7: La tabella dei payoff per una generica coppia di tipi

$\bar{x}_r$ ed il generico tipo $II.k$ usa l'azione $\bar{y}_{s(k)}$, allora il payoff atteso per $I.h$ è:

$$\sum_{k=1}^{K} p_{II.k}^{I.h} f_{hk}(\bar{x}_r, \bar{y}_{s(k)})$$

Quindi ognuno dei due tipi è in grado di calcolare il payoff atteso, derivante dall'uso di una azione sua tra quelle che ha a disposizione e dall'uso di varie azioni da parte dei vari tipi dell'altro giocatore.

Siamo quindi in grado di definire e trovare (se ci sono) gli equilibri di Nash del gioco così ottenuto. Si noti che tutto ciò è stato fatto usando solo le strategie pure. Nulla vieta di considerare anche le strategie miste, con le conseguenti formule, ma non vedremo questo aspetto. Di solito, l'equilibrio di Nash per i giochi ad informazione incompleta viene detto equilibrio Nash-bayesiano (o anche solo "bayesiano") del gioco ad informazione incompleta. L'uso dell'appellativo "bayesiano" è giustificato[4] dal fatto che il valore dei payoff attesi da parte dei giocatori è anche determinato da quelli che sono i suoi "belief" sulle caratteristiche del gioco che gli sono ignote.

Le formule precedenti possono apparire complicate, ma non rappresentano altro che la generalizzazione di quanto abbiamo fatto nei casi particolari analizzati prima. Vorrei osservare che non è possibile semplificare queste formule in modo significativo, in quanto i *dati* di un gioco bayesiano sono parecchi e in generale il risultato che un giocatore ottiene può dipendere da tutti questi dati. Se uno riflette per un momento sul fatto che stiamo assumendo che tutti questi dati siano conoscenza comune fra tutti i giocatori, potrà notare come

[4]In particolare, nella formulazione più generale che vedremo tra poco, a pagina 109.

per descrivere una situazione di "informazione incompleta", ovverossia una in cui almeno un giocatore possa non essere a conoscenza di alcuni parametri fondamentali del gioco, ci ritroviamo ad assumere che sia conoscenza comune fra i giocatori un modello che è caratterizzato da una notevole quantità di dati. Quanto appena osservato può giustamente sollevare alcuni dubbi sulla ragionevolezza dell'approccio usato. Mi trovo costretto a lasciare il lettore in compagnia di questi dubbi, non essendo disponibili modelli più "furbi" per trattare le situazioni di informazione incompleta.

A questo punto, è il caso di dire finalmente se i vari tipi sono da considerare come giocatori diversi, oppure se pensiamo ad una qualche forma di "parentela" fra i vari tipi di un dato giocatore. La mia risposta è che in generale è più naturale interpretarli come giocatori diversi. Per essere chiaro, quando ho H tipi per il giocatore I e K tipi per il giocatore II, ottengo un gioco con $H \cdot K$ giocatori. Va però notato che abbiamo non un generico gioco con $H \cdot K$ giocatori, ma un suo caso particolare. Le prima caratteristica speciale è che le azioni disponibili per ciascuno dei tipi del giocatore I *sono le stesse* (e ovviamente lo stesso fatto vale per II): in un generico gioco, i due diversi giocatori $I.h'$ e $I.h''$ potrebbero benissimo avere a disposizione due diversi insiemi di strategie[5]. Un'altra particolarità è che, per calcolare il payoff di un tipo del giocatore I, non ci interessa sapere quello che fanno i rimanenti tipi dello stesso giocatore, mentre in un generico gioco con $H \cdot K$ giocatori non è affatto detto che avvenga una cosa simile. Quindi, abbiamo sì un gioco con $H \cdot K$ giocatori, ma con alcune caratteristiche particolari che giustificano il perdurare di una notazione specifica[6], ben adattata per tenere conto di queste caratteristiche.

La formalizzazione che abbiamo visto può essere sembrata di scarso interesse o, per meglio dire, di interesse esclusivamente tecnico-disciplinare. Potrei sottoscrivere questa impressione, se il discorso si fermasse qui. Invece, l'analisi fatta ci offre gli strumenti per poter fare un importante passo in avanti, che ci conduce finalmente alla formulazione "generale" di Harsanyi e che darà ragione del termine "bayesiano" da lui utilizzato[7].

[5]Volendo, possiamo non rendere così vincolante questa caratteristica, usando uno dei "trucchi" suggeriti da Harsanyi. In effetti, egli si è posto l'obiettivo di rappresentare anche altre sorgenti di informazione incompleta: noi vediamo qui solo l'aspetto che riguarda i payoff, ma si può avere incompletezza di informazione ad esempio rispetto a quante e quali siano le strategie a disposizione dei giocatori. Harsanyi ha mostrato come ridurre questi altri casi a quello che abbiamo trattato, per appunto con opportuni "trucchi". Su questo rinvio a testi specializzati: l'idea è comunque quella di associare un payoff molto basso ai profili di strategie che contemplano l'uso di strategie non disponibili

[6]In effetti, nelle tabelle 5.2, 5.3 e 5.4 e nella figura 5.2, ho utilizzato solo due payoff, mentre avrebbero dovuto essere tre se si accetta l'idea che tipi diversi sono giocatori diversi. Rinvio al problema 34 per ulteriori commenti.

[7]Anche se già nella utilizzazione delle probabilità condizionate possiamo vedere all'opera

Se leggiamo con la dovuta attenzione quanto è stato fatto nel caso della "popolazione", ci accorgiamo che l'input fondamentale per poter calcolare i payoff (attesi) e quindi ricercare equilibri di Nash, nonché poter usare la "tecnologia" che abbiamo visto nei precedenti capitoli, è costituita proprio dall'avere a disposizione le $p_{II.k}^{I.h}$ (e ovviamente anche le $p_{I.h}^{II.k}$). Noi le abbiamo ricavate come probabilità condizionate in un processo che parte dalle probabilità p_{ij} date, "oggettive" e conoscenza comune fra i giocatori. Bene, se tutto questo non è disponibile, possiamo immaginare che il generico tipo h del giocatore I possa comunque formarsi delle aspettative rispetto ai possibili tipi del giocatore II che ha di fronte. In particolare, se I è un decisore bayesiano, egli ha un impulso irrefrenabile ad affibbiare probabilità a tutto quello che non sa[8] e che è rilevante per il suo problema di decisione. Pertanto, è naturale immaginare che ognuno dei tipi del giocatore I abbia una distribuzione di probabilità (soggettiva) su stati di natura così rilevanti per lui, ovverossia sui vari tipi possibili per il giocatore II. Insomma, il tipo h di I, in quanto decisore bayesiano, "deve" avere una distribuzione di probabilità sui possibili tipi del giocatore II, e quindi possiamo parlare della probabilità $p_{II.k}^{I.h}$ che h (ovvero, $I.h$) assegna al fatto che il giocatore II sia di tipo k.

Insomma, seguendo strade diverse siamo arrivati esattamente allo stesso punto cui eravamo arrivati con l'ipotesi di una popolazione la cui distribuzione e modalità di estrazione fossero un dato oggettivo di conoscenza comune. Possiamo quindi calcolare i payoff attesi per ognuno dei vari tipi (date le strategie) e quindi verificare se un profilo di strategie è un equilibrio oppure no.

Nulla di nuovo, quindi? Non proprio. Il fatto è che, adottando il punto di vista bayesiano, emerge una novità: la coerenza o meno dei belief. Anche se abbiamo dei decisori bayesiani che utilizzano tutte le informazioni a loro disposizione e tutta la loro capacità di inferenza per formarsi i belief, può benissimo capitare che questi decisori, essendo stati esposti a esperienza passate *diverse*[9], abbiano dei belief tra loro non coerenti.

Non c'è alcun bisogno di pensare alla TdG per avere un esempio di questa possibile incoerenza. Si immagini di avere due decisori, che posti di fronte ad un'urna contenente palle di colore bianco o nero, abbiano potuto formare i loro belief attraverso l'osservazione di passate estrazioni. Se i decisori non hanno osservato le stesse estrazioni, e soprattutto se queste estrazioni hanno dato

---

una dei tool caratteristici del decisore bayesiano, o per meglio dire del processo bayesiano di apprendimento.

[8]Sto dando una visione caricaturale di cosa sia un decisore bayesiano, come dovrebbe essere ovvio, solo per giungere rapidamente alla conclusione.

[9]Anche se accettiamo la cosiddetta "common prior assumption", ovvero che i due decisori partano con una "prior", cioè la distribuzione di probabilità a priori, identica. Nella letteratura di TdG si fa spesso riferimento a questo tipo di assunzioni come alla "dottrina di Harsanyi".

luogo a risultati diversi, è del tutto naturale (ed è *giusto* che sia così) che i due decisori abbiano dei belief diversi. Può essere che la probabilità attribuita dal primo decisore alle palle nere sia maggiore di quello che viene attribuito dal secondo giocatore, per la buona ragione che nelle estrazioni osservate dal primo la percentuale di palle nere estratte è stata maggiore di quella osservata dal secondo.

Questo tipo di esempio è facilmente "esportabile" al caso che ci interessa, nel senso che si possono avere, da parte dei due giocatori, dei sistemi di belief non coerenti. Quando parlo di "coerenza", intendo riferirmi al caso in cui i belief dei vari tipi sono deducibili nel modo che abbiamo visto (vedasi come sono stati definiti, a pagina 107 i $p_{II.k}^{I.h}$ ed i $p_{I.h}^{II.k}$) da una comune distribuzione di probabilità sull'insieme delle coppie di vari tipi possibili.

Come esempio di sistema di belief non coerente, possiamo pensare a un caso di due tipi per ogni giocatore, ed ai seguenti belief (si noti che si potrebbe fare un esempio meno "drastico" di incoerenza dei belief; ho scelto questo sia perché i calcoli sono semplici, sia perché "a vista" è intuitivamente plausibile che ci si trovi di fronte ad un caso di incoerenza):

- il tipo $I.1$ pensa che II sia di tipo $II.2$ (cioè, assegna probabilità 1 al fatto che II sia del tipo $II.2$
- il tipo $I.2$ pensa che II sia di tipo $II.1$
- il tipo $II.1$ pensa che I sia di tipo $I.1$
- il tipo $II.2$ pensa che I sia di tipo $I.2$

belief di I	II.1	II.2
I.1	0	1
I.2	1	0

belief di II	I.1	I.2
II.1	1	0
II.2	0	1

Tabella 5.8: Un esempio di belief incoerenti

La verifica di questa incoerenza è immediata. Abbiamo:

$$\begin{cases} p_{II.1}^{I.1} &= 0 \qquad p_{II.2}^{I.1} &= 1 \\ p_{II.1}^{I.2} &= 1 \qquad p_{II.2}^{I.2} &= 0 \\ p_{II.1}^{II.1} &= 1 \qquad p_{II.2}^{II.1} &= 0 \\ p_{II.1}^{II.2} &= 0 \qquad p_{II.2}^{II.2} &= 1 \end{cases}$$

Se i belief fossero coerenti, sarebbe possibile trovare una distribuzione di probabilità $(p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22})$ dalla quale li potremmo dedurre come probabilità condizionate. Cioè (se supponiamo che tutti i denominatori siano diversi da zero), dovrebbe essere risolubile il seguente sistema:

$$\begin{cases} 0 &= \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{12}} \qquad 1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{21}} \\ 1 &= \frac{p_{12}}{p_{11}+p_{12}} \qquad 0 = \frac{p_{21}}{p_{11}+p_{21}} \\ 1 &= \frac{p_{21}}{p_{21}+p_{22}} \qquad 0 = \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{22}} \\ 0 &= \frac{p_{22}}{p_{21}+p_{22}} \qquad 1 = \frac{p_{22}}{p_{12}+p_{22}} \end{cases}$$

Le condizioni da soddisfare diventano:

$$\begin{cases} 0 &= p_{11} \qquad p_{11}+p_{21} = p_{11} \\ p_{11}+p_{12} &= p_{12} \qquad 0 = p_{21} \\ p_{21}+p_{22} &= p_{21} \qquad 0 = p_{12} \\ 0 &= p_{22} \qquad p_{12}+p_{22} = p_{22} \end{cases}$$

Le quali sono soddisfatte solo da $p_{11} = p_{12} = p_{21} = p_{22} = 0$, che però non è una distribuzione di probabilità, in quanto la somma dei vari p_{ij} essere uguale a 1.

Se invece uno dei denominatori è uguale a zero, dobbiamo procedere in modo diverso. Supponiamo che sia $p_{11}+p_{12} = 0$ e che solo questo denominatore si annulli. Questo fatto ci dice subito che $p_{11} = p_{12} = 0$, ma anche che le probabilità condizionate $p_1^{I.1}$ e $p_2^{I.1}$ non devono sottostare ad alcun vincolo.

Otteniamo allora il sistema:

$$\begin{cases} p_{11} &= 0 \qquad 1 = \frac{p_{11}}{p_{11}+p_{21}} \\ p_{12} &= 0 \qquad 0 = \frac{p_{21}}{p_{11}+p_{21}} \\ 1 &= \frac{p_{21}}{p_{21}+p_{22}} \qquad 0 = \frac{p_{12}}{p_{12}+p_{22}} \\ 0 &= \frac{p_{22}}{p_{21}+p_{22}} \qquad 1 = \frac{p_{22}}{p_{12}+p_{22}} \end{cases}$$

Dal quale ricaviamo:

$$\begin{cases} p_{11} &= 0 \qquad p_{11}+p_{21} = p_{11} \\ p_{12} &= 0 \qquad 0 = p_{21} \\ p_{21}+p_{22} &= p_{21} \qquad 0 = p_{12} \\ 0 &= p_{22} \qquad p_{12}+p_{22} = p_{22} \end{cases}$$

Dal quale otteniamo di nuovo $p_{11} = p_{12} = p_{21} = p_{22} = 0$. E' evidente come si possa completare (magari in modo un poco noioso...) questa analisi. Il risultato è che il sistema di belief descritto *non è coerente* nel senso della definizione data precedentemente.

Riepilogando, abbiamo visto come si possa rappresentare, mediante un cosiddetto gioco bayesiano, una situazione in cui vi sia "incompletezza informativa". Vale a dire, una situazione in cui alcuni dei parametri rilevanti del gioco non siano conoscenza comune fra i giocatori. Quando si parla di "parametri rilevanti" ci si può riferire a vari elementi: possono essere le preferenze dei giocatori (è il caso che abbiamo sviluppato in dettaglio finora), ma possono anche essere le strategie a disposizione dei giocatori, oppure può trattarsi del numero di giocatori presenti, etc. Ognuno di questi casi può essere trattato col "marchingegno" ideato da Harsanyi: egli stesso si dilunga a sufficienza nel descrivere come fare rientrare di fatto questi casi di incompletezza informativa in quello primario riguardante le preferenze e quindi rinvio alla fonte originaria od a manuali standard di TdG chi volesse vedere questi dettagli.

Il caso col quale abbiamo iniziato, cioè quello di una popolazione di giocatori e tipi che sia conoscenza comune fra i giocatori, di fatto rientra a pieno titolo nell'alveo dei giochi classici. Il gioco in forma estesa che abbiamo usato per rappresentare questa situazione rientra pienamente nella definizione di gioco in forma estesa data da Kuhn fin dal '53, e possiamo tranquillamente pensare che i dati siano conoscenza comune fra i giocatori (anche se abbiamo visto che può emergere qualche problema interpretativo).

Nel caso dei belief non coerenti, possiamo comunque pensare che il modello (inclusi questi belief!) sia conoscenza comune fra i giocatori? La risposta è molto chiara: no. Si tratta di un risultato, dovuto ad Aumann (1976), provato in un famoso articolo dal titolo "Agreeing to disagree". Non si tratta di un risultato tecnicamente difficile e potrebbe anche essere presentato con tutti i dettagli necessari. Ma, al di là della sua dimostrazione formale, è abbastanza facile intuire come mai non possa essere conoscenza comune il fatto che i belief di due giocatori possano essere diversi: se abbiamo due decisori che hanno (giustamente!) dei belief divergenti in quanto attribuiscono probabilità diverse al verificarsi di uno stesso evento, dal semplice fatto di conoscere ciascuno i belief dell'altro, saranno indotti a rivederli. Va tenuto conto del fatto che i belief provengono da una diversa informazione a disposizione dei diversi giocatori, e quindi mettere in comune i belief rende consapevole ciascuno del fatto che ha avuto una esperienza parziale, diversa da quella dell'altro tipo, e quindi sarà opportuno, per ciascuno di loro, utilizzare l'informazione parziale fornita dai belief dell'altro, per effettuare una revisione dei propri. Se opportunamente modellizzato e sotto appropriate condizioni (peraltro ragionevoli), questo processo di revisione dei belief conduce alla fine ad avere gli stessi belief. Tra le condizioni che garantiscono la validità di questo risultato la più rilevante è la ipotesi di "common prior", menzionata nella nota di pagina 110. E' da dire che il cosiddetto caso dei belief coerenti ha avuto il maggior numero di applicazioni finora, il che non è molto sorprendente: si tratta del caso che più facilmente si presta ad un'analisi scientifica. Se la presenza di belief non coerenti non è assolutamente da scartare, non è d'altronde molto agevole da analizzare: se ci si mette nei panni di un decisore, il problema non è tanto costituito dai suoi belief, ma quanto su come egli possa fare delle congetture su quali siano i belief degli altri decisori coinvolti.

Anche se il teorema di Aumann non verrà qui provato (neanche enunciato...), vorrei almeno presentare un semplicissimo esempio, che spero possa illustrarne un poco il significato, che è particolarmente interessante.

Vi viene offerto di scommettere sul risultato del lancio di una coppia di dadi (non truccati!), uno rosso ed uno blu. Vincerete V euro se la somma dei due dadi è 8, altrimenti dovrete pagare P euro.

Per modellizzare questa situazione (è un problema di decisione in condizione di rischio, non si tratta di un gioco), possiamo rappresentare l'insieme degli stati di natura come $\Omega = \{1, \ldots, 6\} \times \{1, \ldots, 6\}$, e naturalmente avrò $p(i, j) = 1/36$ per ogni $(i, j) \in \Omega$.

Lo spazio degli stati di natura è rappresentato nella figura 5.3: i vari possibili stati di natura sono indicati con dei cerchietti scuri e gli stati di natura a voi "favorevoli", ovvero quelli per cui la somma dei dadi è pari ad 8, sono indicati con cerchi scuri più grandi.

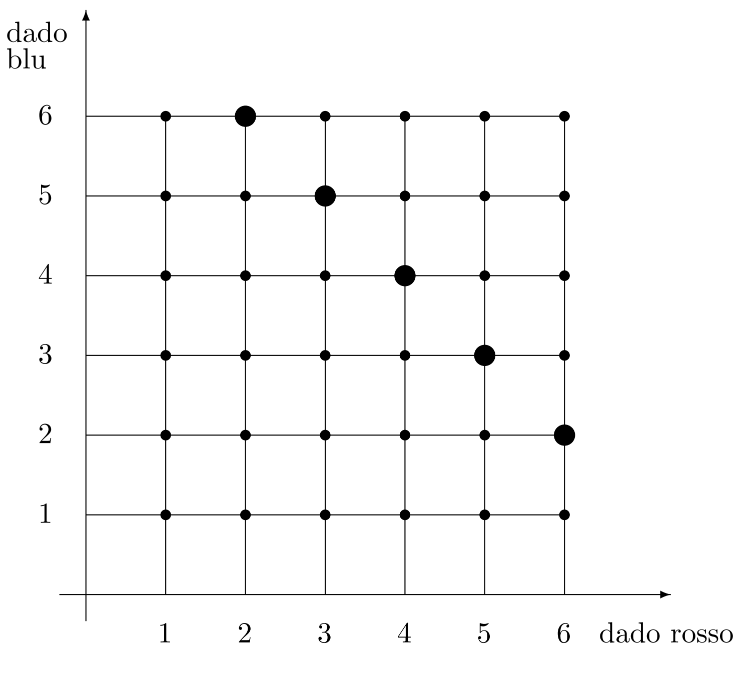


Figura 5.3: Scommettere ai dadi...

Supponiamo, per semplicità, che il vostro obiettivo sia di massimizzare il guadagno atteso, cioè che siate indifferenti al rischio. Se le somme V e P coinvolte sono piccole, è un'ipotesi plausibile.

Ovviamente voi avete due scelte a disposizione: scommettere oppure non scommettere. I guadagni attesi che derivano da queste due scelte sono i seguenti:

- scommettere: $\frac{5}{36}V - \frac{31}{36}P$
- non scommettere: 0

Allora, voi scommetterete se $\frac{5}{36}V - \frac{31}{36}P > 0$. Cioè, se $V > \frac{31}{5}P$.

Come è ovvio, non potete effettuare una scelta che dipenda dallo "stato di natura": è chiaro che voi dovete scommettere "prima" del lancio dei dadi. A dire il vero, questa descritta è semplicemente la situazione "standard": nulla vieta che voi possiate scommettere dopo che i dadi sono stati lanciati; in tal caso, semplicemente, non vi sarà data la possibilità di osservare il risultato del lancio. Questo spostamento della tempistica fra la decisione e la realizzazione dello stato di natura ci permette di considerare la possibilità di scommettere avendo a disposizione una informazione *parziale* sullo stato di natura. Ad esempio, potrebbe esservi concesso di osservare il risultato del lancio del dado *rosso*. In questo caso, le situazioni da esaminare sono due, a seconda del numero che avete osservato dal dado rosso:

- è uscito 1: allora la probabilità che la somma faccia 8 è 0 e quindi il vostro guadagno atteso (condizionato alla informazione aggiuntiva che avete a disposizione) è:

  scommettere: $-P$

  non scommettere: 0

- è uscito un altro numero: allora la probabilità che la somma faccia 8 è $\frac{1}{6}$ e quindi il vostro guadagno atteso (condizionato...) è:

  scommettere: $\frac{1}{6}V - \frac{5}{6}P$

  non scommettere: 0

Quindi, se osservate 1 non scommettete, mentre se osservate un altro numero scommettete se $V > \frac{5}{6}P$.

Si tratta ora di fare il passo decisivo per capire cosa voglia dire il risultato di Aumann. Supponiamo che vi sia un *altro* decisore (anche egli usa come criterio di decisione il guadagno atteso) e che egli possa osservare il dado *blu*. Supponiamo che dal dado rosso sia uscito 1: il secondo decisore non lo può sapere. Ma se questo secondo decisore potesse conoscere la *probabilità* che voi assegnate all'evento favorevole (cioè che la somma faccia 8), sarebbe immediato per lui dedurre che l'evento è impossibile[10]. Naturalmente, per WEB poter effettuare questa deduzione, è essenziale per il secondo decisore sapere che voi avete potuto osservare il lancio del dado rosso: ma se questa condizione è soddisfatta, il secondo decisore non deve fare altro che replicare il vostro ragionamento (ricordo che stiamo parlando di decisori intelligenti...).

Ebbene, questo qui non è altro che un caso particolare del risultato di Aumann: per due decisori le cui valutazioni probabilistiche siano ottenute a partire dalla stessa informazione a priori, non può essere *conoscenza comune* il fatto che abbiano delle probabilità posteriori diverse. Si noti che però questa affermazione è basata su una assunzione importante: le partizioni informative usate dai due decisori per costruire le loro "posterior" dalla "prior" comune, devono essere *conoscenza comune*. Nel nostro esempio, non era sufficiente che il secondo decisore conoscesse la probabilità che voi assegnate ad un dato evento. Abbiamo dovuto anche assumere che egli conoscesse la vostra partizione informativa (in soldoni, abbiamo ammesso che fosse conoscenza comune il fatto che voi potevate osservare il dado rosso).

Il risultato di Aumann porta a varie interessanti conseguenze. Anzi, ha dato origine ad una piccola "letteratura", sia finalizzata allo studio dei fondamenti della TdG, che mirante a provvedere risultati modellistici di un certo interesse. Di questo secondo filone mi piace citare almeno il "no speculation theorem" di Milgrom e Stokey (1982). Non è certo casuale che si abbia un simile risultato in questo contesto: ricordo che una transazione di mercato viene detta speculativa se è fondata su aspettative diverse sul futuro (nei nostri termini, da diverse valutazioni di probabilità riguardo agli stati di natura rilevanti per la transazione). Non mi avventuro nella descrizione del risultato di Milgrom e Stokey, ma ne traggo invece una morale semplice semplice: se volete comperare un'auto usata e questa vi viene proposta ad un prezzo che vi sembra particolarmente buono, chiedetevi che cosa il venditore sappia più di voi su quella macchina[11]...

Dopo aver dedicato spazio alla modellizzazione generale dei giochi a informazione incompleta, vorrei presentare alcuni esempi specifici di giochi a informazione incompleta. Più precisamente, introdurrò molto velocemente i cosiddetti "giochi di segnalazione", per poi passare a un piccolo modellino di

[10]Uno potrebbe giustamente pensare che ho scelto apposta un caso molto particolare. Ma se fosse uscito un altro numero la situazione non cambierebbe. Supponiamo esca 3 dal dado rosso. Allora io so che la probabilità di vincere è 1/6: se anche l'altro decisore sa questo, egli ovviamente *non è in grado di inferire* che sia uscito 3, ma solo che è uscito un numero fra 2 e 6: il che porta anche lui ad attribuire probabilità 1/6 alla possibilità di vincere. Altri esempi sono disponibili sulla pagina web.

[11]L'idea è che il prezzo richiesto sia un segnale riguardante la probabilità che l'auto sia di buona qualità. Naturalmente, il venditore potrebbe mascherare la sua informazione chiedendovi appositamente un prezzo più alto di quello che è la sua valutazione "sincera". Tutto ciò rende il mercato delle auto usate un mercato "difficile", come testimoniato dal famoso articolo di Akerlof (1970) sul mercato dei "lemons" (trad. it.: "bidoni").

gioco ripetuto per mostrare il ruolo che può avere l'incompletezza d'informazione; chiuderò infine con un cenno alle aste. Lo scopo di questi tre "esercizi", selezionati fra i tanti possibili, è di mostrare come possano essere utilizzate le tecniche dei giochi ad informazione incompleta per affrontare problemi di un certo interesse.

Per "gioco di segnalazione", nella forma più essenziale si intende un gioco in cui un solo giocatore (il giocatore I) può essere di più tipi, mentre vi è un solo tipo di giocatore II. Si suppone inoltre che le mosse avvengano in sequenza, nel senso che prima tocca a I e poi a II. Detto questo, è naturale interpretare le mosse a disposizione di I come *messaggi* che invia a II. Messaggi per segnalare cosa? E' ovvio: per segnalare (o per nascondere!) il suo vero tipo.

Un esempio molto semplice di gioco di segnalazione è fornito nella figura 5.4.

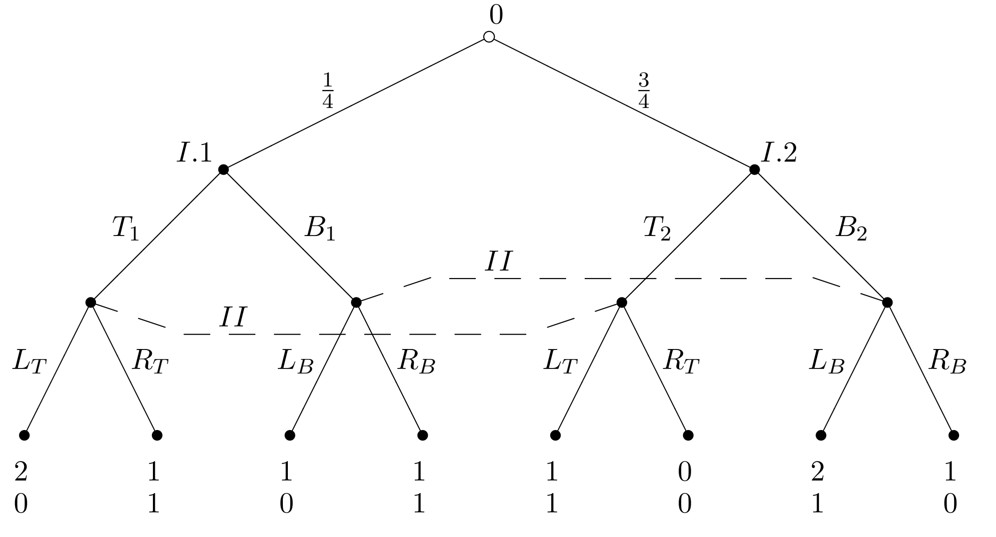


Figura 5.4: Un semplice gioco di segnalazione

Nella figura, i payoff di II sono tali per cui gli converrebbe giocare R_T se sapesse che ha di fronte $I.1$ e invece L_T se sapesse che ha di fronte $I.2$.

Se guardiamo i payoff di I, vediamo che per il giocatore $I.1$ è dominante giocare T_1, mentre per $I.2$ è dominante giocare B_2. Pertanto, se II osserva la mossa T, può inferire da questo che si trova di fronte al giocatore $I.1$. Come si vede la scelta di $I.1$ è di fatto interpretabile in modo naturale come un messaggio che manda a II su chi sia egli effettivamente.

A proposito dei giochi di segnalazione, mi limito a ricordare che esiste un (classico) modello dovuto a Spence (1973), in cui il giocatore I è un individuo in cerca di lavoro e il messaggio che manda a II per segnalare la sua abilità (che II non è in grado di osservare direttamente) è il suo livello (o qualità) di scolarizzazione. Naturalmente II è un altro individuo che è interessato all'acquisto di forza lavoro "pregiata". Rimando a manuali standard di teoria dei giochi (Gibbons (1992), Osborne e Rubinstein (1994)) chi fosse interessato ai dettagli di questo modello. Osservo come il concetto di equilibrio di Nash non sia in genere sufficientemente "selettivo", per cui in giochi bayesiani "dinamici" (come sono tipicamente i giochi di segnalazione) se ne utilizzano dei "raffinamenti", ovvero concetti di soluzione quali l'equilibrio bayesiano perfetto[12] oppure l'equilibrio sequenziale introdotto da Kreps e Wilson (1982).

In effetti, proprio dall'analisi dei giochi bayesiani "dinamici" è venuta una spinta importante in direzione della ricerca di "raffinamenti" dell'equilibrio di Nash.

Come secondo gioco ad informazione incompleta considero il dilemma del prigioniero ripetuto un numero finito di volte. Più precisamente, illustrerò con un esempio particolarmente semplice un famoso risultato di Kreps *et al.* (1982). L'approccio che seguo si ispira direttamente alla presentazione che ne fa Gibbons (1992). L'idea di Kreps *et al.* è quella di fornire un modello capace di mostrare come si possa avere cooperazione nel dilemma del prigioniero finitamente ripetuto, immaginando che ci possa essere un poco di incertezza sulla razionalità assoluta dei giocatori. Nel piccolo esempio che presento, vi è un giocatore classicamente razionale (il giocatore II), mentre l'altro può essere di due tipi: mentre il tipo 2 è anch'esso classicamente razionale, il tipo 1 lo è molto di meno... Cioè, questo tipo è semplicemente una macchinetta programmata per giocare "TIT FOR TAT" (supporremo che la probabilità che I sia di tipo 1 sia pari a p). Col nome "TIT FOR TAT" ("pan per focaccia"?) si identifica una semplice strategia che consiste nel rispondere alle scelte effettuate dell'avversario giocando, allo stadio successivo, "cooperativamente" se così ha fatto l'altro, ed invece "non-cooperativamente" nel caso contrario. Cosa significhi precisamente "cooperativamente" o non, varia a secondo del contesto: nel nostro esempio, vuol dire che I (ad esempio) gioca T se II ha giocato L, e gioca invece B se II ha giocato R. Aggiungo che la strategia classica del "TIT FOR TAT" presuppone che la prima mossa (cioè quella fatta in assenza di "stadi precedenti") sia "cooperativa": nel nostro caso, che I giochi T al primo stadio. La strategia "TIT FOR TAT" è stata resa famosa dal fatto che essa, proposta da Rapoport, è risultata vincente due volte in altrettanti "tornei" organizzati da Axelrod, tornei che vedevano nell'arena strategie diverse per giocare il dilemma del prigioniero ripetuto. Dettagli si trovano, appunto,

[12] Il cui difetto principale è che ogni autore se lo definisce nel modo più conveniente per il suo discorso, il che non rende particolarmente facile districarsi tra queste "varianti".

in Axelrod (1984).

Alcune considerazioni meritano di essere fatte prima di passare all'analisi del modello. Innanzitutto ritroviamo ancora una volta una modellizzazione iper-semplificata. Ripeto quanto detto in altre circostanze: modelli di questo genere non hanno ambizioni di "realismo", ma hanno lo scopo di poter indicare come *potrebbero* verificarsi taluni fenomeni. Qui, ad esempio, vedremo come giocatori razionali e intelligenti (il giocatore II e anche, si noti, il tipo razionale del giocatore I) possano usare strategie "cooperative" nel dilemma del prigioniero finitamente ripetuto, grazie alla presenza di incertezza sulla razionalità del giocatore I. Il significato di questo risultato risiede nel confronto con quanto avviene in presenza di "common knowledge" della razionalità e intelligenza dei giocatori: nella ripetizione finita del dilemma del prigioniero non c'e' spazio per l'uso di strategie "cooperative".

Un altro aspetto che rende interessante questo modellino è che mostra un caso in cui l'incertezza non riguarda i payoff, ma la razionalità dei giocatori, che in questo esempio risulta equivalente a sapere quali (e quante) siano le strategie a disposizione dei giocatori. Se volessimo rimanere ancorati alla lettera al punto di vista di Harsanyi (1967-68) già ricordato (vedi pagina 109), dovremmo lasciare al tipo "poco razionale" del giocatore I la possibilità di usare tutte le strategie (come per l'altro tipo), avendo però l'accortezza di assegnargli dei payoff "molto brutti" in corrispondenza di strategie diverse dal "TIT FOR TAT" (tanto brutti da impedire che queste strategie possano essere prese in considerazione nella ricerca di equilibri). Non seguirò la strada suggerita da Harsanyi, perché in questo esempio così semplice si riesce a provare ciò che interessa (e cioè che vi possa essere un equilibrio che prevede l'uso di mosse cooperative da parte dei giocatori) senza bisogno di usare tutto l'apparato formale dei giochi a informazione incompleta.

Ultima considerazione: io mi limiterò a occuparmi di equilibri di Nash, ma la trattazione di questo esempio punta a provare che si ha un equilibrio che soddisfa condizioni più stringenti che non quella del semplice equilibrio di Nash (si parla di equilibrio Bayesiano perfetto, o di equilibrio sequenziale).

Passiamo finalmente all'esempio. Il gioco costituente è il solito dilemma del prigioniero (aggiungo solo 1 a tutti i payoff, per comodità).

$I \backslash II$	L	R
T	3 3	1 4
B	4 1	2 3

E' possibile provare che vi è un equilibrio di Nash di questo gioco (ripetuto tre volte), che prevede l'uso delle seguenti strategie:

II gioca L nei due primi stadi e R nel terzo stadio.

$I.1$ gioca T in tutti e tre gli stadi (lui gioca T al primo stadio perché così prevede "TIT FOR TAT" e, sempre per via di come è fatta questa strategia, giocherà T nel secondo e terzo stadio perché II negli stadi precedenti gioca L).

$I.2$ gioca T al primo stadio e B negli altri due.

Chiaramente, l'aspetto significativo sta nell'uso delle strategie L da parte di II e T da parte di $I.2$, ovverossia la presenza di scelte "cooperative" in un equilibrio di Nash per questa ripetizione finita del dilemma del prigioniero.

Di minore rilevanza è notare come io non abbia dato una descrizione *completa* della strategia di equilibrio dei giocatori. Ricordo che nel dilemma del prigioniero "puro e semplice" ripetuto tre volte, non solo i giocatori hanno molte strategie a disposizione (circa un milione ciascuno), ma la loro descrizione è molto più complessa di quanto non abbiamo fatto qui (come dovrebbe essere evidente sulla base della tabella del capitolo 4, relativa al caso a due stadi). Come mai questa semplificazione? E' legittima? Si, nel senso che i "dettagli" che abbiamo trascurato e quelli che trascureremo riguardano scelte dei giocatori in nodi che non verranno mai "raggiunti" nel gioco (se i giocatori adottano le strategie di cui via via parleremo) e quindi non hanno alcun effetto sui payoff, risultando quindi irrilevanti per poter affermare che le strategie indicate "in breve" costituiscono un equilibrio di Nash.

WEB I dettagli dell'analisi si trovano sulla pagine web. Ma si può anche consultare la "fonte di ispirazione", ovvero Gibbons (1992).

Analizzando il gioco, si può affermare che, se $p \geq \frac{1}{2}$, la strategia poco prima descritta individua un equilibrio di Nash. Risultato interessante in quanto si manifestano, in equilibrio, strategie cooperative sia da parte di II che da parte di $I.2$ (si noti che $I.2$ non si trova, per così dire, direttamente in condizione di informazione incompleta, ma subisce gli effetti dell'incompletezza dell'informazione che ha II). Naturalmente si può essere insoddisfatti che tutto ciò avvenga per valori "troppo alti" di p (ovvero, $p \geq \frac{1}{2}$). Sono d'accordo. Ma questo è solo un esempio molto semplice per illustrare la possibilità di un certo fenomeno. Se aumentassimo il numero degli stadi del gioco, non vi sarebbe bisogno di valori così elevati per p!

Il terzo e ultimo esempio riguarda le aste. Se si riflette un poco sul perché venga utilizzato questo strumento, un elemento risulta evidente: il proprietario di un bene che intende alienare[13] non sa a quale prezzo i potenziali acquirenti siano disposti ad acquistarlo. Quindi, ci troviamo in una situazione tipica di informazione incompleta o, più precisamente, di asimmetria informativa tra il proprietario e i potenziali acquirenti.

Si può osservare come anche i potenziali acquirenti, realisticamente, si trovino di fronte ad aspetti di incompletezza informativa. Possono, ad esempio, non conoscere perfettamente le caratteristiche dell'oggetto posto in vendita, oppure non conoscere le valutazioni degli altri potenziali acquirenti.

Un interessante risultato sulle aste è il cosiddetto "revenue equivalence theorem", originariamente dovuto a Vickrey (1961), il quale afferma che i più diffusi modelli d'asta prospettano al banditore lo stesso guadagno atteso (naturalmente questo teorema è valido se sono verificate delle ipotesi, alcune delle quali sono piuttosto restrittive: ad esempio, occorre supporre che i potenziali acquirenti siano indifferenti al rischio).

In effetti, l'analisi che farò delle aste si concentrerà sul tentativo di illustrare la plausibilità di questo risultato a proposito di due aste: una è la solita "asta in busta chiusa", l'altra è l'asta in busta chiusa "al secondo prezzo" (detta anche "di Vickrey"). In entrambi i casi l'oggetto viene aggiudicato a chi ha fatto l'offerta più alta (in caso di parità si sorteggia). La differenza è che nella tradizionale asta in busta chiusa chi vince paga il prezzo che ha offerto, mentre nell'asta al secondo prezzo egli paga il prezzo corrispondente alla *seconda* miglior offerta. Chi non si sia mai imbattuto nello studio delle aste immagino trovi piuttosto curiosa questa regola, e paradossale il fatto che il guadagno atteso sia lo stesso nei due casi. Ci vuole poco a capire dove stia la chiave di questo risultato: nell'asta al secondo prezzo per gli acquirenti è una strategia debolmente dominante fare un'offerta identica alla loro valutazione dell'oggetto; per l'asta normale gli acquirenti in equilibrio fanno delle offerte inferiori alla loro valutazione.

Per mostrare, come detto, la plausibilità del "revenue equivalence theorem", utilizzarò un modellino, preso "a prestito" dalla pagina web di Costa:
`http://www-dse.ec.unipi.it/htdocs/pagina costa.htm`

Cominciamo col supporre che per l'oggetto in vendita ci siano due soli potenziali acquirenti, ognuno dei quali può fare un'offerta che può assumere un qualsiasi valore (intero) da 30 a 40. Facciamo una (classica) assunzione di simmetria e indipendenza per quanto riguarda le valutazioni dell'oggetto da parte dei due acquirenti. Più specificatamente, assumerò che si possano dare 4 casi equiprobabili:

1. I valuta l'oggetto 30 e II lo valuta 30
2. I valuta l'oggetto 30 e II lo valuta 40

[13]Qui mi sto riferendo al tipo d'asta più nota. Ma i modelli sono molti, inclusa la vasta categoria degli appalti.

3. I valuta l'oggetto 40 e II lo valuta 30

4. I valuta l'oggetto 40 e II lo valuta 40

Visto che le regole di aggiudicazione saranno al primo o al secondo prezzo, nessuno dei due giocatori può essere danneggiato dal fare un'offerta pari a 30, e quindi assumo che i giocatori debbano fare comunque un'offerta (insomma: partecipano entrambi all'asta).

Naturalmente assumo che tutto ciò che abbiamo detto finora sia conoscenza comune fra i due partecipanti all'asta. Ma vi è poi un elemento di informazione incompleta, nel senso che I sa se lui stesso valuta l'oggetto 30 o 40, mentre non conosce la valutazione di II (naturalmente sa che le valutazioni 30 o 40 sono equiprobabili). Idem dicasi per II.

Per quanto riguarda l'asta al secondo prezzo, è facile rendersi conto che per ogni giocatore, qualunque possa essere il suo "tipo", è strategia debolmente dominante fare un'offerta "veritiera", nel senso che è identica alla sua valutazione effettiva. Questo è ovvio se la valutazione del giocatore è 30: se offre 30 ha certamente un payoff pari a 0 (sia che si aggiudichi l'oggetto, sia che non se lo aggiudichi), mentre se offre di più di 30 il suo payoff non può essere altro che nullo o negativo. Se la valutazione del giocatore è 40, rappresentiamo in una tabella i suoi possibili guadagni in funzione delle offerte dell'altro giocatore:

	30	31	32	33	...	37	38	39	40
30	5	0	0	0		0	0	0	0
31	10	4.5	0	0		0	0	0	0
31	10	9	4	0		0	0	0	0
...									
37	10	9	8	7		1.5	0	0	0
38	10	9	8	7		3	1	0	0
39	10	9	8	7		3	2	0.5	0
40	10	9	8	7		3	2	1	0

i numeri che compaiono sulla diagonale descrivono il guadagno atteso, che è "equamente diviso" fra i due offerenti, visto che in caso di parità il vincitore viene estratto a sorte. Sopra la diagonale abbiamo 0 perché sarà l'altro ad aggiudicarsi l'oggetto, mentre sotto la diagonale abbiamo i guadagni del nostro giocatore, che si aggiudica l'asta. Come si vede, l'ultima riga offre le migliori prospettive fra tutte le altre. Il che conferma quanto detto, e cioè che la strategia di offrire 40 è debolmente[14] dominante per il "tipo" che valuta 40 la casa.

Una volta appurato che fare un'offerta identica alla propria valutazione è strategia debolmente dominante per i due potenziali acquirenti, è immediato calcolare quale sia il guadagno atteso da parte del banditore: in tre casi su quattro l'oggetto sarà aggiudicato a 30, e solo nel quarto caso (quando entrambi lo valutano 40), il prezzo di aggiudicazione sarà uguale a 40.

Quindi, il guadagno atteso è:

$$\frac{3}{4} \cdot 30 + \frac{1}{4} \cdot 40 = \frac{130}{4} = 32.5$$

Vediamo ora il caso della classica asta (in busta chiusa) al "primo prezzo". Se la valutazione di un giocatore è 30, è evidente che offrire il minimo possibile, e cioè 30, è debolmente dominante (un'offerta superiore comporta il rischio di aggiudicarsi l'asta a un prezzo superiore alla propria valutazione). Anche qui, allora, soffermeremo la nostra attenzione sul caso in cui la valutazione di un giocatore sia 40. Costruiremo una tabella a prima vista simile a quella già vista, ma non identica nel suo significato. Le righe, analogamente a prima, rappresentano le possibili strategie a disposizione del nostro giocatore (che valuta 40 l'oggetto). Le intestazioni delle colonne rappresentano le possibili scelte dell'altro giocatore, quando la sua valutazione dell'oggetto sia 40. Facciamo questo perché vogliamo trovare un equilibrio (anche se non ci riusciremo, ma per poco...) e quindi possiamo assumere che chi abbia una valutazione dell'oggetto pari a 30 offra appunto 30 in quanto strategia debolmente dominante.

Nelle caselle della matrice (vedi la tabella 5.9) metteremo i guadagni di I. Dentro ciascuna casella della matrice metteremo: a sinistra, i guadagni attesi[15] dal giocatore I che sa di essere di "tipo" 40 ma non sa quale fra i due tipi (equiprobabili) di giocatore II abbia davanti; analogamente a destra, ma a ruoli rovesciati.

Nella tabella abbiamo sottolineato, come di consueto, i payoff corrispondenti alle migliori risposte di ciascun giocatore. Come si vede non c'è nessuna casella che abbia entrambi i payoff contrassegnati. Quindi non abbiamo equilibri di Nash!

Perché? Come mai? Semplicemente perché ho preferito fare un caso troppo semplice, per evitare l'uso di strumenti matematici più sofisticati[16]. In

[14] Anzi, strettamente, in questo caso.

[15] Moltiplicati per 4 per facilitare la "leggibilità" della tabella.

[16] Con ciò non voglio assolutamente indurre l'idea che un "buon modello" debba portare necessariamente ad un gioco che abbia un equilibrio! Però va detto che, per le aste, modelli ragionevoli garantiscono l'esistenza di equilibri, pur se richiedono tool formali più sofisticati, in quanto utilizzano modelli di tipo continuo. Ora, il fatto che la letteratura sulle aste usi

	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
30	20 20	10 $\underline{36}$	10 32	10 28	10 24	10 20	10 16	10 12	10 8	10 4	10 0
31	$\underline{36}$ 10	27 27	18 $\underline{32}$	18 28	$\overline{18}$ 24	$\underline{18}$ 20	$\underline{18}$ 16	$\underline{18}$ 12	$\underline{18}$ 8	$\underline{18}$ 4	$\underline{18}$ 0
32	32 10	$\underline{32}$ 18	24 24	16 $\underline{28}$	16 24	$\overline{16}$ 20	$\overline{16}$ 16	$\overline{16}$ 12	$\overline{16}$ 8	$\overline{16}$ 4	$\overline{16}$ 0
33	28 10	28 18	$\underline{28}$ 16	21 21	14 $\underline{24}$	14 20	14 16	14 12	14 8	14 4	14 0
34	24 10	24 $\overline{18}$	24 16	$\underline{24}$ 14	$\overline{18}$ $\overline{18}$	12 $\underline{20}$	12 16	12 12	12 8	12 4	12 0
35	20 10	20 $\underline{18}$	20 $\overline{16}$	20 14	$\underline{20}$ 12	15 15	10 $\overline{16}$	10 12	10 8	10 4	10 0
36	16 10	16 $\underline{18}$	16 $\overline{16}$	16 14	16 12	$\overline{16}$ 10	12 12	8 12	8 8	8 4	8 0
37	12 10	12 $\underline{18}$	12 $\overline{16}$	12 14	12 12	12 10	12 8	9 9	6 8	6 4	6 0
38	8 10	8 $\underline{18}$	8 $\overline{16}$	8 14	8 12	8 10	8 8	8 6	6 6	4 4	4 0
39	4 10	4 $\underline{18}$	4 $\overline{16}$	4 14	4 12	4 10	4 8	4 6	4 4	3 3	2 0
40	0 10	0 $\underline{18}$	0 $\overline{16}$	0 14	0 12	0 10	0 8	0 6	0 4	0 2	0 0

Tabella 5.9: Tabella parziale dei payoff (moltiplicati per 4) per l'asta al primo prezzo

effetti la difficoltà in cui ci siamo imbattuti sparirebbe se immaginassimo che le valutazioni dei giocatori, anziché poter assumere solo i valori 30 o 40, potessero assumere (con probabilità uniformemente distribuita) un qualsiasi valore nell'intervallo [30,40].

In effetti, la situazione che abbiamo ottenuto ci permette di fare alcune considerazioni interessanti. Una prima considerazione è che abbiamo comunque un equilibrio approssimato. Se ammettiamo una tolleranza pari a 0.5 (corrispondente a 2 nella tabella) nella ricerca della miglior risposta, allora possiamo evidenziare altri payoff (in tabella sono indicati con una soprasegnatura), ma soprattutto otteniamo che c'è una casella (corrispondente alla scelta di 34 da parte di entrambi i giocatori) i cui payoff sono entrambi soprasegnati.

Cosa rappresenta ciò che abbiamo ottenuto? Appunto, un equilibrio approssimato! Certo, l'approssimazione è grossolana, ma migliorerebbe se per esempio permettessimo ai giocatori di usare anche le cifre decimali...

Abbiamo quindi che la strategia di equilibrio (approssimato) prevede che il giocatore che valuta 40 l'oggetto faccia un'offerta pari a 34. Allora, pur con le dovute cautele, può essere plausibile che il guadagno atteso per il banditore

tipicamente modelli di tipo continuo, indica un significativo "bias" da parte dei ricercatori, che prediligono avere a che fare con situazioni in cui un equilibrio c'è. Chi fosse interessato ad approfondire gli aspetti tecnici può utilizzare la recente monografia di Krishna (2002).

sia pari a:

$$\frac{1}{4} \cdot 30 + \frac{3}{4} \cdot 34 = \frac{132}{4} = 33$$

Non è il payoff 32,5 che abbiamo trovato nel caso dell'asta al secondo prezzo, ma non è molto lontano.

Insomma: anche se il vincolo ad evitare l'uso di una matematica non elementare ci impedisce di ottenere un risultato nitido, mi pare che vi siano sufficienti indizi tali da rendere plausibile l'idea che (sotto opportune ipotesi e con il giusto modello matematico) possa ottenersi appunto il teorema di equivalenza di Vickrey, attraverso la modellizzazione del problema come gioco ad informazione incompleta. Segnalo, a chi fosse interessato ad approfondire l'argomento "aste", il recente libro di Klemperer (2004) che offre (tra l'altro) uno sguardo d'esperto su alcune aste che si sono tenute nel mondo, in particolare nel settore delle telecomunicazioni.

Capitolo 6

Allentamento del paradigma di razionalità

Abbiamo visto nel capitolo precedente come si possa abbandonare uno dei requisiti della TdG classica: l'ipotesi di conoscenza comune dei parametri del gioco. Come anticipato, vedremo in questo capitolo come sia possibile derogare ai forti requisiti di razionalità ed intelligenza che abbiamo imposto ai giocatori, e soprattutto quale effetto abbia tutto questo. Osservo che l'analisi di taluni dei modelli che sono stati sviluppati in questo contesto richiede un apparato tecnico-formale piuttosto corposo: cercherò, con tutti i miei limiti, di mettere in evidenza alcune delle idee più significative, riducendo al minimo le "technicalities".

Come si possono indebolire i requisiti di razionalità e intelligenza dei giocatori? Per quanto riguarda la razionalità, una prima idea ragionevolmente semplice è che i giocatori non siano in grado di ottimizzare perfettamente, ma che si "accontentino" di raggiungere obiettivi "abbastanza vicini" al valore massimo teorico della loro funziona di utilità. Ci siamo già imbattuti in questo aspetto poche pagine fa, quando abbiamo parlato delle aste "al primo prezzo".

E' chiaro che questa semplice idea ha a che fare con caratteristiche dei decisori che sono indipendenti dal fatto che essi siano inseriti o meno in un contesto di decisione interattiva. Detto questo, non possiamo escludere che, in presenza di più decisori si abbiano fenomeni nuovi, sia rispetto alla TdG classica, sia rispetto alla teoria delle decisioni individuali.

In effetti così è. Uno dei "messaggi" interessanti che la TdG dà è che, in presenza di questo tipo di razionalità limitata, possono emergere novità importanti, ad esempio nel contesto dei giochi finitamente ripetuti.

Tuttavia, prima di passare a descrivere questa "novità", vorrei mettere in evidenza come sia difficile ascrivere questa idea esclusivamente al versante della razionalità. Possiamo pensare che abbia a che fare con una limitazione della intelligenza del decisore, non tanto magari nelle sue capacità di analisi e di deduzione logica, quanto per esempio nella sua capacità di calcolo, per cui oltre ad un certo livello di precisione non riesce ad andare, oppure nella sua capacità di memorizzare (cosa che può avere anche influenza sulle sue capacità deduttive). La difficoltà a separare nettamente le limitazioni alla razionalità e le limitazioni all'intelligenza, fa sì che parlerò in modo generico di "razionalità limitata" (bounded rationality). Noto anche che non sempre viene fatta[1] la distinzione che io ho fatto fra razionalità ed intelligenza, il che contribuisce alla diffusione del termine "razionalità limitata".

Il primo risultato che vorrei ricordare a questo proposito è dovuto a Radner (1980). Radner considera un modello di gioco di oligopolio, molto semplice, e suppone che questo gioco venga ripetuto un numero finito di volte. Assume inoltre che i giocatori, anziché massimizzare i loro payoff, si accontentino di avvicinarsi a meno di una quantità piccola (il classico "epsilon") al massimo. L'effetto di questa ipotesi è che questo gioco finitamente ripetuto ha delle strategie *di equilibrio approssimato*[2], che danno ai giocatori, cioè agli oligopolisti, un risultato vicino all'efficienza. Queste strategie inoltre ammettono una naturale interpretazione come comportamenti collusivi tra gli oligopolisti, e tutto ciò in un contesto di un gioco finitamente ripetuto.

Si tratta di un risultato che, oltre ad avere interesse metodologico (come quello sul dilemma del prigioniero che vedremo dopo), ha anche valenze interpretative notevoli da un punto di vista "pratico": mi sto riferendo alla regolazione dei mercati oligopolistici. Questo risultato ci dice che non è necessario che le aziende sottoscrivano un accordo di cartello (che nella terminologia della TdG corrisponde all'idea di accordo vincolante) perché esse possano appropriarsi di extra-profitti rispetto al regime di concorrenza. Possono esservi degli accordi taciti[3] fra le imprese (nel settore assicurativo, o in quello energetico, per fare un paio di esempi molto significativi) e questi accordi si "autosostengono", ovvero sono in equilibrio, anche nel caso di un orizzonte finito e predeterminato, purché non si modellizzino queste imprese come decisori perfettamente razionali ed intelligenti.

Come già notato in altri casi, non si può pensare di trarre da questo modello di Radner insegnamenti da comunicare direttamente ed immediatamente

[1] Anche perché talvolta è difficile tracciare la frontiera.

[2] Più precisamente, si parla di epsilon equilibri. Per chi fosse interessato, dato un numero reale $\varepsilon > 0$, una coppia $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ è un ε-equilibrio se:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) - \varepsilon \qquad \text{per ogni } x \in X \tag{6.1}$$

$$g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) - \varepsilon \qquad \text{per ogni } y \in Y \tag{6.2}$$

[3] Come già sostenuto, pur in assenza di un modello formalizzato, da Chamberlin (1929).

alle autorità antitrust (anche perché lo conoscono già...). Ma va detto che non c'è solo lo specifico modello di Radner a dare questo tipo di risultati: sono tanti i casi in cui, allentando in vario modo i parametri di razionalità ed intelligenza, oltre a quelli già visti e da non dimenticare relativi alla completezza di informazione, si ottengono risultati analoghi a quello di Radner. E' dal complesso di questi risultati che si crea l'intuizione che vari livelli di "imperfezione" che saranno certo presenti nella situazione reale, possono dare luogo a questi comportamenti collusivi fra oligopolisti, senza che essi debbano ricorrere ad accordi vincolanti. A questo punto può allora davvero valere la pena che le autorità anti-trust tengano presente questo messaggio che giunge dalla TdG, per adattare meglio i loro interventi a quello che è il comportamento effettivo delle imprese. Si intende, con le dovute cautele e tenendo conto dell'aspetto eminentemente qualitativo di questo tipo di risultati: i parametri in oggetto non sono agevolmente quantificabili, anche oltre le consuete difficoltà tipiche di misurazione dei parametri di carattere economico; per fare una battuta, non è facile stimare quanto valga l'epsilon che interviene nel modello di Radner.

Un altro gioco ripetuto che è stato, come prevedibile, ampiamente analizzato è il dilemma del prigioniero ripetuto un numero finito di volte (e il numero di ripetizioni è dato, ed è conoscenza comune fra i giocatori). Abbiamo infatti visto che nella situazione classica l'equilibrio (SPE) che ci ritroviamo non è altro che la ripetizione pedissequa, ad ogni stadio, delle strategie (fortemente dominanti) di equilibrio da parte di ciascun giocatore. Non c'è speranza, per questo gioco, di ottenere risultati quali il "folk theorem", se non si assume che il numero di ripetizioni della interazione sia infinito[4].

Che le cose possano cambiare, al di fuori del caso classico, ce lo suggerisce l'esempio visto nel capitolo precedente (vedi pagina 118). L'incompletezza dell'informazione porta all'uso di strategie più articolate. Ma già nel capitolo dedicato ai giochi ripetuti si è visto come l'incertezza sul numero di stadi da giocare abbia un effetto analogo. Tutto lascia quindi supporre che, grattata via la crosta della razionalità classica, possano emergere novità.

In effetti, esistono risultati ormai classici in questa direzione. Mi riferisco alla descrizione della "bounded rationality" dei giocatori tramite la loro modellizzazione quali *automi a stati finiti*. Questa assunzione fa sì che un giocatore, nel determinare la propria "miglior risposta" alla strategia utilizzata dall'altro, sia vincolato a poter utilizzare una strategia che può avere una complessità limitata (per via della limitazione nel numero di stati) e quindi non necessariamente essa coincide con quella che sarebbe stata la scelta senza questa limitazione.

Il risultato è che si possono avere delle strategie che prevedono la "coope-

[4] Oppure si può abbandonare la condizione precedentemente indicata, e cioè che il numero di stadi sia prefissato e conoscenza comune fra i giocatori.

razione" (per lo meno, per molti stadi del gioco), anziché la "defezione" ad ogni stadio, come avviene nel contesto classico. Non vedremo una descrizione di questi risultati. Mi limito ad indicare che, in materia, i riferimenti classici sono Neyman (1985) e Rubinstein[5] (1986).

Prima di procedere oltre, analizzando altre modalità di allentamento della razionalità, è opportuno fare una pausa di riflessione, perché è emersa una idea che ha un rilievo straordinario per la TdG (e sto parlando dei suoi presupposti fondazionali, epistemici).

Per evidenziare la portata di questa novità, vorrei partire un po' da lontano, discutendo prima il caso del decisore singolo (in isolamento: il già menzionato signor Robinson Crusoe).

E' chiaro che il decisore concreto, "in carne ed ossa", si scontrerà tipicamente col problema di avere una informazione non esaustiva sui parametri rilevanti per il suo problema di decisione. Così come avrà certamente delle limitazioni nelle sue capacità di calcolo, di deduzione. Il risultato di tutto ciò è che egli non sarà in grado di ottenere il massimo teorico del suo problema di ottimizzazione, cioè non sarà in grado di scegliere l'alternativa per lui migliore fra quelle a sua disposizione[6]. Tuttavia ci aspettiamo che egli possa "avvicinarsi" alla soluzione ideale quanto più si sforza di acquisire informazione, di analizzare il problema, di "perdere tempo" nei calcoli, etc. Il buon senso ci dice che il decisore in qualche modo eviterà di spingersi troppo in avanti nel raffinare questi suoi strumenti per via dei costi che una ricerca esaustiva di informazione, le raffinatezze nei calcoli e così via, si portano appresso come caratteristiche ineliminabili. Possiamo sintetizzare il tutto dicendo che c'e' una *tensione*, da parte del decisore, ad avvicinarsi quanto più possibile alle caratteristiche ideali del decisore come descritto dalla teoria classica.

Tutto ciò può rendere conto del perché si facciano le assunzioni di razionalità ed intelligenza "estreme" nel modello standard di teoria delle decisioni: rappresentano una sorta di "tipo ideale" cui il decisore concreto dovrebbe tendere, nel suo stesso interesse. O, da un altro punto di vista, la descrizione del decisore come infinitamente razionale ed intelligente non è altro che un modello semplificato, in grado di fornirci buoni risultati, senza doversi perdere nell'analisi di troppi dettagli.

Quando si passa alla TdG, il quadro cambia radicalmente e drammaticamente. Dove diavolo trovano gli incentivi per conformarsi all'idealtipo classico di decisore i giocatori che sono coinvolti in un gioco quale il dilemma del prigioniero finitamente ripetuto? Per quale motivo mai il nostro giocatore dovrebbe

[5] Rubinstein mostra un interessante effetto di "correlazione forzata" che si verifica fra le strategie dei due giocatori, se questi vengono rappresentati come automi a stati finiti.

[6] Si può andare ben oltre! Egli non è magari neanche capace di immaginare quali siano le alternative a sua disposizione. Non va dimenticato neppure che è un soggetto non immoto, immerso in un contesto mutevole. E così via, senza porre limiti alla fantasia.

sforzarsi di raggiungere quelle caratteristiche di assoluta razionalità, visto che il risultato che gli si prospetta, a differenza di quanto avveniva per la teoria delle decisioni, non gli garantisce affatto di migliorare la sua situazione, anzi, rispetto alla attuale?

Questa è una novità straordinaria, rispetto alla teoria delle decisioni. Invito caldamente il lettore a fermarsi ed a riflettere sul suo senso profondo.

Penso che il lettore convenga con me sul significato dirompente che questo tipo di risultati hanno per la TdG (ma anche per la teoria delle decisioni!). Certo valgono anche qui i caveat già sottolineati più volte, da ultimo nel cogliere le conseguenze del risultato di Radner. Non bastano solo alcuni risultati come quelli descritti per poter dire che siamo di fronte ad una rivoluzione à la Kuhn. Se però teniamo presente che questi esempi visti non sono altro che alcuni dei casi più semplici in cui questo fenomeno si manifesta, fenomeno la cui presenza è pervasiva, allora occorre a questo punto prendere davvero atto del fatto che si è di fronte a una novità in grado di scardinare i presupposti della TdG classica. Anzi, queste considerazioni possono essere rilevanti per l'adeguatezza del modello classico anche nella teoria delle decisioni (cioè, intendo, quando vi è un singolo decisore). Il nostro decisore "in carne ed ossa", per accumulo di esperienze passate di interazioni strategiche, non avrà sviluppato quella forte tendenza verso l'ottimizzazione più sofisticata che poteva sembrare essere così scontata. Certo, possiamo immaginare che, di fronte a decisioni di particolare rilievo, il nostro decisore cercherà di usare le sue risorse intellettuali. Ma, di fronte a delle decisioni "di tutti i giorni", è dubbio che abbia interiorizzato una tendenza così limpidamente ottimizzante, visto che dalle esperienze accumulate può ricevere un messaggio contrastante con questo anelito: insomma, si può avere ragione a dubitare della presenza di una spinta evolutiva (in senso lato) in quella direzione.

C'è da avere pazienza, ma si può immaginare che prima o poi (ma non penso a secoli) verrà abbandonato il nucleo classico della TdG, per fare posto a nuovi paradigmi, capaci di fornire dei tool analitici più adeguati.

Detto questo (e certo non sono considerazioni irrilevanti), vorrei comunque ritornare al tema di questo capitolo, e quindi vedere qualche altro esempio di razionalità limitata, anche perché potrebbero venire da qui alcune delle idee essenziali per una "rifondazione" della TdG. Una categoria di approcci può essere introdotta a partire da idee già presenti in Cournot. Quando abbiamo descritto il duopolio, nel capitolo 2, non abbiamo prestato alcuna attenzione all'orizzonte temporale sul quale si articola l'interazione. Possiamo giustificare questo fatto assumendo che i ricavi e i costi che abbiamo indicato non fossero altro che i valori attualizzati dei vari costi e ricavi futuri. Possiamo però anche chiederci cosa succeda se quei dati descrivono, invece, quanto avviene ogni anno. Se così è, è chiaro che ci troviamo davanti a una situazione di "gioco ripetuto", che abbiamo visto come affrontare nel capitolo 4. In particolare, un decisore razionale e intelligente effettuerà la sue scelte "oggi" tenendo presente quanto può avvenire in futuro: il che ci offre immediatamente un nuovo modo per introdurre aspetti di razionalità limitata, semplicemente limitando l'ampiezza dell'orizzonte temporale "scandagliabile" o comunque tenuto in conto dai nostri giocatori.

Un modo molto drastico per tenere conto di questa indicazione è quello di "azzerare" l'orizzonte temporale, considerando giocatori estremamente "miopi", che tengono conto solo di quanto è appena avvenuto (quindi la loro miopia vale anche per il passato, non solo per il futuro!) e cercano di trovare un adattamento "ottimale". Una strategia di questo genere potrebbe consistere nell'adottare la scelta produttiva che costituisca la "miglior risposta" alla scelta effettuata dall'altro nell'anno precedente. Possiamo immaginare[7] che tutto abbia inizio in un certo "anno zero" in cui le aziende producono delle quantità di merce scelte in modo arbitrario, e che di anno in anno ciascuna reagisca in modo ottimale alla scelta che l'altra impresa ha fatto nell'anno precedente. In questo modo otteniamo un esempio di "sistema dinamico a tempi discreti" (è la "best reply dynamics"), che ci fornisce una successione (x_n, y_n) di scelte produttive, una per ogni anno n. Non è particolarmente WEB difficile dimostrare che questa successione di punti converge[8] all'equilibrio di Nash del nostro modellino di oligopolio.

Come interpretare questo risultato?

Potremmo accoglierlo con un certo sollievo, in quanto potrebbe aprire una prospettiva interessante: quella di poter fornire un processo dinamico che conduce ad un equilibrio di Nash, aspetto del quale ci eravamo finora completamente disinteressati. D'altra parte, tuttavia, vi sono ragioni per accogliere con sospetto questo risultato. Intanto, esso vale per un modello particolarmente semplice che ha una caratteristica importante: vi è un unico equilibrio di Nash. Mentre una delle più rilevanti criticità di cui soffre questo concetto di soluzione è dovuta alla presenza di più equilibri e ai problemi che ne derivano. Di certo ci dobbiamo aspettare che in caso di molteplicità di equilibri le cose si complichino: nell'ipotesi più fortunata avremmo quanto meno diversi "bacini d'attrazione" dei vari equilibri: ovvero, quale sia l'equilibrio di Nash verso cui la dinamica converge dipende dalle "condizioni iniziali". Fatto che possiamo considerare nel complesso in modo ambivalente: l'aspetto positivo è che la scelta di un equilibrio di Nash anziché un altro potrebbe essere legato al particolare "punto di partenza", il che potrebbe dare un ancoraggio "oggettivo" a questa scelta; l'aspetto negativo è che ci richiede di conoscere un

[7] Certo di immaginazione se ne richiede: da dove spuntano queste aziende? Dal nulla? Come possiamo pensare che un'azienda non possa essere un po' meno "miope"? Etc. Giusto per non dimenticare quanto sia etereo il mondo nel quale ci siamo immersi.

[8] Chi fosse interessato ai dettagli, può consultare la pagina web.

ulteriore parametro della situazione (mi riferisco, naturalmente, al "punto di partenza"), per poter fare le nostre predizioni.

Si potrebbe discutere ancora delle croci e delizie di questo approccio[9], ma il punto significativo è un altro: per quale motivo dovremmo prestare così tanto interesse alla semplice dinamica che abbiamo visto? Abbiamo già osservato in una nota che forse stiamo postulando una miopia eccessiva dei nostri "giocatori", ma la domanda difficile è: *quanta miopia* è giusto, sensato, assumere?

Detto con uno slogan, una volta che si passa da un'intelligenza di livello infinito a una più "umana" intelligenza di livello finito, ci si pone il problema di capire quale sia il giusto livello. Esattamente come, nel caso degli ε-equilibri, ci chiedevamo quale fosse il valore di ε da usare. Ammesso che abbia senso porsi questo problema[10]!

Cercherò di spiegarmi con un esempio. Se faccio rotolare una biglia su un pavimento molto liscio (e molto ampio!), posso modellizzare questo fenomeno mediante un moto rettilineo uniforme. Da un certo punto di vista questa idealizzazione "estrema" è molto utile. Se, però, diventasse importante riuscire a stimare dove la biglia si andrà a fermare, dovrò allora avere una descrizione sufficientemente accurata della forze d'attrito che agiscono sulla biglia. Posso anche, data la relativa semplicità del problema, dosare l'accuratezza nel descrivere le forze in gioco in funzione del livello di precisione che intendo ottenere.

Ebbene, nulla di tutto questo è immaginabile nella teoria delle decisioni interattive, al presente stato della ricerca scientifica. Le idee che abbiamo visto (ε-equilibri, automi a stati finiti e dinamica della miglior risposta) sono solo alcuni dei possibili approcci al problema della "bounded rationality", ma hanno tra di loro in comune, e in comune con altri approcci, una fastidiosa caratteristica di *arbitrarietà*. Questo è evidente anche se consideriamo l'idea di modellizzare i decisori come *automi a stati finiti*: di fronte a un caso concreto non è affatto chiaro quale sia il tipo di automa da usare come modello, né quanto grande sia il numero di stati che è ragionevole "concedergli" (oltre al fatto che questo modello coglie un solo aspetto della razionalità limitata).

Non vorrei essere frainteso: personalmente apprezzo moltissimo l'ormai ampia letteratura disponibile in tema di razionalità limitata, la quale ha il pregio di evidenziare fenomeni interessanti, di mostrare cosa avvenga "se ... e

[9] Per esempio osservando come la situazione diventa molto più complessa da analizzare quando si passa a modelli di oligopolio meno semplicistici di quello di cui ci siamo occupati. C'è persino spazio per chi si occupa di dinamiche caotiche! Vedi Bischi *et al.* (2004)

[10] Questa annotazione non è per nulla oziosa. Ad esempio, parlare di ε-equilibri senso non ne ha per nulla se i payoff dei giocatori sono in qualche modo derivati da funzioni di utilità di vNM. Più radicalmente, come provato in Norde *et al.* (2000), per le funzioni di utilità di vNM non è disponibile nessun concetto generale di massimizzazione approssimata.

se ...". Il problema è che la nostra comprensione della mente umana è ancora troppo parziale per avere una buona teoria da sostituire all'eroica ipotesi del decisore razionale e intelligente (illimitatamente). E' sul "dosaggio" del limite alla razionalità la difficoltà vera (sempre ammesso che sia opportuno continuare a rimanere entro questo paradigma, pur se "allargato"[11]).

Non c'è da stupirsi quindi se alcuni dei risultati più interessanti, collocabili in un contesto di razionalità limitata, si sono ottenuti, per così dire, all'estremo opposto, ovvero chiedendo requisiti di razionalità assolutamente minimali[12]. Mi sto riferendo ai cosiddetti "giochi evolutivi". In questo contesto, le assunzioni sulla razionalità ed intelligenza dei giocatori sono a livello zero, nel senso che i giocatori non sono altro che delle macchine geneticamente programmate per attuare una e una sola strategia. Riprenderemo il discorso generale sulla razionalità limitata dopo aver visto almeno un esempio specifico, il classico gioco del "falco e colomba", in modo da avere un modello a disposizione.

Prima, tuttavia, vorrei citare un altro approccio dinamico, il cosiddetto "fictitious play" che utilizza la stessa identica idea della "best reply dynamics": a ogni "istante" la scelta della strategie da parte di un giocatore è fatta in modo da essere la "miglior risposta" a qualcosa. In questo caso il giocatore presume che l'altro adotti una strategia mista, data molto semplicemente dalla "statistica" della strategie osservate: cioè, il giocatore assume come presunta strategia dell'altro (contro la quale determinerà la sua "miglior risposta") la strategia mista che, ad ogni strategia pura, assegna come probabilità di essere giocata la frequenza relativa con cui essa è stata giocata nel passato. Può essere interessante sapere che questa dinamica converge a un punto di equilibrio nel caso di un gioco finito a due giocatori *a somma zero*, ma in generale non è garantito neppure che converga (c'è un famoso esempio di Shapley che è illustrato nella tabella 6.1 e nel quale la dinamica generale "oscilla" fra i punti (M, R), (T, R), (T, C), (B, C), (B, L) ed (M, L); i dettagli sono disponibili
WEB sul sito web). Ciò che mi interessa mettere in evidenza è che questa dinamica sottende sempre un basso grado di razionalità da parte dei giocatori, ma si differenzia dalla semplice dinamica "best reply", per la richiesta diversa (e più pesante) che fa in termini di *memoria*. Il giocatore deve infatti ricordarsi tutte le strategie effettivamente usate dall'altro giocatore. A dire il vero non deve avere una memoria così "grande". Gli è sufficiente ricordarsi il numero di "turni" giocati e, per ogni strategia a disposizione dell'avversario, quante volte questa è stata usata[13]. Questa osservazione è meno ovvia di quanto potrebbe

[11] Siamo alla "cintura protettiva" del nucleo metafisico non falsificabile.

[12] Tanto minimali da rendere discutibile se questi modelli appartengano ancora alla sfera del "decisore razionale". Di fatto, viene meno uno dei requisiti essenziali, come vedremo: la possibilità di scelta fra azioni diverse da parte del decisore. Ritornerò comunque su questo aspetto al termine del capitolo.

[13] Volendo, si può pensare anche a varianti che pongano limiti alla quantità di memoria

sembrare a prima vista: se descrive i contenuti informativi essenziali di cui il giocatore deve tenere "memoria" nel "fictitious play", rende anche evidente come in questo modello il giocatore non tenga minimamente conto di eventuali "pattern dinamici" usati dall'altro giocatore[14]. Per esempio, che l'altro alterni "testa" o "croce" in modo rigido, o che giochi mediamente un numero pari di volte sia "testa" che "croce", non è certo informazione praticamente irrilevante (come sa chiunque abbia giocato a "pari o dispari"). A tutto ciò si aggiunge un aspetto non irrilevante: col "fictitious play" (o approcci similari), il giocatore cerca di imparare come giocare "bene" nel gioco costituente. Ma, naturalmente, egli sta invece giocando un gioco ripetuto e quindi la sua attenzione dovrebbe essere rivolta a questo, e non al gioco costituente. Chiudo qui questa brevissima divagazione sul "fictitious play", in quanto lo scopo di questa citazione era principalmente funzionale rispetto al discorso appena fatto sulla difficoltà a fissare livelli sensati di "limitatezza" per la razionalità.

$I \backslash II$	L	C	R
T	$0,0$	$0,1$	$1,0$
M	$1,0$	$0,0$	$0,1$
B	$0,1$	$1,0$	$0,0$

Tabella 6.1: L'esempio di Shapley di *non* convergenza del "fictitious play"

Termina qui anche, momentaneamente, la piccola parentesi "dinamica". Torneremo ad un altro modello dinamico (la "dinamica del replicatore") alla fine del capitolo, dopo aver visto il più importante concetto di "soluzione" per i giochi evolutitvi:l'idea di Strategia Evolutivamente Stabile ("Evolutionary Stable Strategy", ESS), anche per le connessioni significative che esistono fra questi due approcci.

Le ESS nascono nel contesto della biologia evoluzionistica, tentando di rispondere a domande quali: "perché in una data specie il rapporto fra il numero di maschi e quello delle femmine ha un dato valore?", oppure "perché certi comportamenti sopravvivono, all'interno di una specie?". La giustificazione delle ESS si può trovare in una serie di assunzioni (tipiche dei giochi evolutivi), le cui principali sono:

- la presenza di una popolazione "numerosa" di individui
- l'assunzione che ogni membro della popolazione utilizzi una ed una sola strategia, "geneticamente" predeterminata

disponibile per i giocatori, eventualmente "accontentandosi" di ottenere, al limite, degli equilibri approssimati.

[14]O dagli altri. Ogni tanto è il caso di ricordarci che ci occupiamo di due soli giocatori solo per ragioni di semplicità.

- i membri della popolazione si incontrano in modo “casuale” ed “indipendente”

- ciascuno dei due individui ottiene da un incontro un “payoff” che dipende dalla strategia usata da entrambi

- i “payoff” rappresentano delle grandezze che è “conveniente” massimizzare

La situazione “concreta” in cui questo tipo di considerazioni possono essere soddisfatte corrisponde ad una popolazione di organismi (per esempio, animali) ad un “basso” livello della scala evolutiva. Il patrimonio genetico di ciascun individuo determina quale “strategia” egli adotterà. I payoff risultanti sono delle misure di “fitness”: esprimono il vantaggio, in termini di successo riproduttivo, che attiene al genotipo esprimente la “strategia” che lo caratterizza. Quindi saranno privilegiate le “strategie” che permettono di ottenere valori dei payoff più elevati.

In questo modello, sulla base delle considerazioni interpretative fornite, emerge una idea di “equilibrio”, corrispondente a quelle che vengono chiamate ESS. Si tratta della condizione introdotta da Maynard Smith e Price (1973), condizione che cerca di esprimere l’idea di una strategia che sia stabile rispetto alla invasione di “mutanti” (vedasi anche Maynard Smith (1982)).

Descriverò l’idea di ESS con un esempio. O, per meglio dire, con l’esempio più classico: quello di “falco e colomba”. Immagineremo quindi che nella nostra popolazione gli individui abbiano solo due strategie possibili, che chiameremo appunto F, cioè “falco”, e C, cioè “colomba”. Questi due epiteti descrivono due diversi atteggiamenti che un animale assume di fronte alla competizione per lo sfruttamento di una risorsa, quale il cibo oppure un buon posto dove nidificare, etc. Il “falco” adotta un comportamento aggressivo, per cui è disposto a combattere per accaparrarsi la risorsa, mentre la “colomba” rifugge dalla lotta. Più precisamente, si vuole dire che se si incontrano F e C, sarà F ad accaparrarsi interamente la risorsa; se si incontrano due C essi se la spartiranno a metà; se si incontrano due F, anche in questo caso ognuno otterrà metà della risorsa (mediamente, s’intende), ma avrà anche delle perdite derivanti dalla lotta. Sintetizzo il tutto in una matrice: vedi tabella 6.2, in cui si assume che v e c siano numeri positivi[15].

[15]Osservo che il numero $\frac{v}{2} - c$ può essere negativo. Cosa che può sembrare strana, se ad esempio interpretiamo i numeri in tabella come “numero medio di figli”. Per riconciliare la tabella con questa interpretazione, è sufficiente effettuare un’operazione che è del tutto irrilevante per la nostra analisi: aggiungere una stessa costante a tutti i numeri della tabella. Proprio perché aggiungere o togliere una costante non ha alcun effetto su ciò di cui ci occuperemo in tutto questo capitolo, assumeremo che la tabella sia quella data, che è più essenziale e quindi più comoda da utilizzare.

I \ II	F	C
F	$v/2 - c, v/2 - c$	$v, 0$
C	$0, v$	$v/2, v/2$

Tabella 6.2: Il gioco "falco-colomba"

Alcune importanti puntualizzazioni vanno fatte. Intanto i nomi scelti ("falco" e "colomba") non devono indurre in errore: non abbiamo due specie diverse ma una sola specie: i nomi identificano due comportamenti che possono manifestare gli individui di questa specie. Questi comportamenti, come detto, sono geneticamente predeterminati e un singolo individuo quindi si comporterà sempre da falco o sempre da colomba a seconda di quello che è il suo personale corredo genetico.

I numeri in matrice sono, come detto, delle misure di "fitness", sono quindi dei valori che è "conveniente" massimizzare, esattamente come succede per le funzioni di utilità. Dobbiamo tuttavia affrontare ancora un altro passaggio cruciale, indirettamente suggerito dalla frase precedente: perché ci interessa aver trovato qualcosa da massimizzare, visto che l'individuo singolo non ha alcuna potestà di scelta? Il punto è che noi siamo interessati a descrivere la tendenza ad affermarsi di una strategia (oppure alla convivenza di una loro pluralità) in una *popolazione* di individui attraverso successive situazioni di interazione che possiamo immaginare derivare da "incontri" fra coppie di individui "estratti a caso" dalla popolazione. Più precisamente, assumiamo che la probabilità che venga "estratto" un individuo ad esempio di tipo F sia data dalla frazione di individui di tipo F rispetto alla popolazione complessiva. Assumiamo inoltre che l'estrazione dell'individuo I e dell'individuo II siano tra loro indipendenti: è un'ipotesi ragionevole, in molti casi (anche se certamente[16] non va bene "per tutte le stagioni"). Queste considerazioni ci portano naturalmente all'idea di un payoff atteso (in termini probabilistici) da parte di un individuo, che costituisce l'informazione essenziale per valutare il maggiore o minore successo di una strategia.

Questa idea è alla base della giustificazione delle ESS. Vediamo i dettagli formali. Come prima cosa, abbiamo un gioco *simmetrico*[17]: (X, Y, f, g), con $X = Y$ e con $f(x, y) = g(y, x)$ (cosa soddisfatta nel gioco "falco/colomba": $X = Y = \{F, C\}$ e la condizione di "simmetria" per i payoff è soddisfatta,

[16] Ad esempio, se consideriamo individui scarsamente mobili (coralli, fiorellini di prato, cozze...), si capisce che abbiamo trascurato il fatto che le interazioni possono avere un carattere locale, magari così forte da rendere inadeguato il modello che abbiamo introdotto.

[17] Questa è un'assunzione standard, dato il contesto, ma non è "obbligatoria" quando si studiano gli ESS: Maynard Smith (1982) contiene tre capitoli dedicati a situazioni asimmetriche.

come si può agevolmente verificare[18]). Una strategia x^* è un ESS se è una strategia che soddisfa una opportuna condizione di "stabilità", che vorrebbe tradurre l'idea che è una strategia resistente rispetto ad altre strategie che "compaiano" fra quelle usate dagli individui nella popolazione, giocate da una piccola frazione di individui nella popolazione (strategie "mutanti"). Il payoff atteso da un "mutante", presente nella popolazione in una (piccola) frazione pari a ε, e che giochi la strategia x è espresso dalla formula:

$$(1-\varepsilon)f(x,x^*) + \varepsilon f(x,x)$$

e la ragione è ovvia, visto che si assume che il mutante incontri un altro mutante con probabilità ε e invece un non mutante con probabilità $1-\varepsilon$. Invece, per una ragione perfettamente analoga, un non mutante ha un payoff pari a:

$$(1-\varepsilon)f(x^*,x^*) + \varepsilon f(x^*,x)$$

Quindi, (x^*, x^*) viene detto ESS se, per ogni $x \in X$ diverso da x^*, si ha, per ε abbastanza[19] piccolo:

$$(1-\varepsilon)f(x,x^*) + \varepsilon f(x,x) < (1-\varepsilon)f(x^*,x^*) + \varepsilon f(x^*,x) \tag{6.3}$$

WEB La condizione di essere un ESS può essere riscritta in modo più facilmente leggibile. Infatti, si prova (per la dimostrazione, vedasi la pagina web) che $x^* \in X$ è un ESS se e solo se, per ogni $x \in X, x \neq x^*$, si ha:

$$f(x^*,x^*) > f(x,x^*) \tag{6.4}$$

oppure

$$f(x^*,x^*) = f(x,x^*), \text{ nel qual caso deve essere } f(x^*,x) > f(x,x) \tag{6.5}$$

Si osservi che la condizione 6.4 ci dice che la coppia di strategie (x^*, x^*) è un equilibrio di Nash del gioco dato (naturalmente usiamo la simmetria del gioco per poter fare questa affermazione, visto che essa riguarda anche g). Tuttavia, non basta che (x^*, x^*) sia un equilibrio di Nash per poter dire che x^* è una ESS, in quanto deve essere soddisfatta anche la condizione 6.5. Un caso particolare in cui x^* è un ESS è quello in cui x^* è un cosiddetto equilibrio di Nash *stretto*, cioè quando valga:

$$f(x^*,x^*) > f(x,x^*) \quad \text{per ogni} \quad x \neq x^*$$

[18]Si noti che molti dei giochi più noti sono giochi simmetrici (pur di ridenominare, se necessario, le strategie): lo è il dilemma del prigioniero, la battaglia dei sessi, il "pari o dispari", il gioco di puro coordinamento e quello che abbiamo usato per introdurre gli equilibri correlati...

[19]Precisamente, si richiede che esista $\bar{\varepsilon} > 0$ tale che la relazione (6.3) valga per ogni $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$

Proviamo a vedere cosa succede nell'esempio "falchi-colombe". C'è da distinguere fra tre casi, a seconda che sia $c < v/2$, $c = v/2$ e $c > v/2$.

Se $c < v/2$ (cioè, il costo della lotta è minore del valore della preda), si vede immediatamente che il gioco ha un unico equilibrio di Nash, che è (F, F), il quale è anche un equilibrio di Nash stretto. Quindi F è l'unico ESS di questo "gioco". E' immediato osservare che il risultato è inefficiente, come ci si può aspettare visto che il gioco non è altro che un "dilemma del prigioniero" (ciò vale per il caso che stiamo studiando, cioè per $c < v/2$). Se, nel caso della TdG classica, ritenevamo che la scelta delle strategie corrispondenti a C fosse da escludere per giocatori razionali ed intelligenti, qui abbiamo lo stesso risultato ma per ragioni diverse, pur se collegate: la strategia C non "resiste" all'invasione di un gruppo, per quanto piccolo, di individui che giochino F.

Se $c = v/2$, il gioco ha tre equilibri di Nash: (F, F), (F, C) e (C, F). Gli ultimi due non possono essere associati ad un ESS, in quanto non sono simmetrici. Quindi solo F è un "candidato" per essere un ESS. Non essendo (F, F) un equilibrio di Nash stretto (è $f(C, F) = f(F, F)$), occorre verificare che sia soddisfatta anche la condizione 6.5, che nel nostro caso si riduce a verificare se $f(F, C) > f(C, C)$. Il che è vero, essendo $f(F, C) = v > v/2 = f(C, C)$. Pertanto possiamo asserire che F è un ESS.

Se $c > v/2$, il gioco dato ha due soli equilibri: (F, C) e (C, F) che però non sono simmetrici e quindi non danno luogo ad alcun ESS.

Si può notare come il gioco abbia una struttura simile alla battaglia dei sessi, però con una differenza[20]: i payoff ottenuti a seconda che i giocatori giochino (F, F) oppure (C, C) sono diversi, mentre nella battaglia dei sessi tali payoff sono uguali.

Anche se la struttura assomiglia alla battaglia dei sessi (e anche qui abbiamo due equilibri di Nash), visto che non ci interessavano equilibri di Nash non simmetrici, ci ritroviamo con un gioco che non ha ESS, come capitava col "pari o dispari" rispetto all'equilibrio di Nash. Possiamo forse anche qui superare la difficoltà utilizzando *strategie miste*? Sì, possiamo. Ad esempio, possiamo immaginare che ogni individuo sia caratterizzato da un certo "grado di aggressività": ovvero, un grado di aggressività pari a p significa "sempli-

[20]Per ironia della sorte, a questo tipo di gioco viene dato, nel gergo della TdG, il nome di "gioco dei polli" (chicken). Ad esempio, se $v = c = 2$ (un caso che considereremo in dettaglio per la "dinamica del replicatore"), abbiamo il gioco:

$I \backslash II$	F	C
F	$-1, -1$	$2, 0$
C	$0, 2$	$1, 1$

cemente” che questo individuo si comporta da “falco” con probabilità p (se vogliamo adottare una interpretazione frequentista, possiamo immaginare che mediamente si comporti da falco in una frazione p degli “incontri” cui partecipa). Vi è anche un’altra interpretazione delle strategie miste, quali descrittrici di una popolazione *polimorfa*. Cioè, la strategia mista p corrisponde a una popolazione in cui vi sono solo Falchi o Colombe, e la frazione di Falchi sul totale è per l’appunto p. Mentre prima l’idea era che un ESS corrispondesse a una popolazione composta di individui “uguali”, ciascuno dei quali adotta la strategia Falco una frazione p dei casi totali, la seconda interpretazione immagina una popolazione in cui siano presenti Falchi e Colombe “puri”, però in una ben specificata proporzione. Non è certo il caso di dirlo: l’analisi matematico-formale non fa alcuna distinzione tra i due casi.

Cosa avviene se consideriamo queste “estensioni miste” del gioco? Vi sarà qualche p^* che è ESS? Nei primi due casi esaminati ($c < v/2$ e $c = v/2$), si può verificare che la considerazione di “strategie miste” non introduce alcuna nuova ESS. Se invece $c > v/2$, troviamo un equilibrio di Nash (oltre ai due in strategie pure che avevamo), che è dato da $(p^*, p^*) = (v/2c, v/2c)$. Si tratta di verificare che sia soddisfatta la condizione 6.5. Cioè che, per un $p \neq p^*$ tale che $f(p, p^*) = f(p^*, p^*)$ si ha che $f(p^*, p) > f(p, p)$. Noto che operare sulle “strategie miste” non richiede nulla di nuovo, sul lato matematico-formale, rispetto all’estensione mista di un gioco finito. Comunque, per chi fosse in-
WEB teressato, sulla pagina web si possono trovare le giustificazioni dettagliate di queste osservazioni.

Un limite dell’idea di ESS è che (contrariamente a quanto accade per l’equilibrio di Nash) non ogni gioco finito ammette ESS, neanche facendo ricorso alle “strategie miste” appena descritte. Solo nel caso particolare in cui X (e quindi anche Y) contenga solo due strategie è possibile garantire l’esistenza di ESS (esistenza garantita solo a livello di “strategie miste”). Con tre strategie si hanno dei controesempi (vedasi il Problema 35).

Ritornando al caso generale, il lettore avrà notato come la definizione di ESS, come succede in genere per una idea di equilibrio, sottende una *dinamica* di cui la definizione data cerca di cogliere alcuni aspetti essenziali, senza doverla rendere del tutto esplicita. Ci si può quindi chiedere se non si possa proporre un processo dinamico che modellizzi la situazione affrontata mediante gli ESS, e quale relazione esista fra questi due approcci. Una dinamica ragionevolmente semplice che è stata proposta è la cosiddetta dinamica del *replicatore*, che andiamo ad illustrare nelle sue caratteristiche di base.

Cominciamo con una versione “a tempi discreti”. Il processo dinamico lega due istanti di tempo distanziati da un intervallo di durata τ (τ sarà espresso come frazione di un anno; usiamo il parametro τ in quanto passeremo poi ad una dinamica a tempo continuo facendo tendere τ a zero).

Consideriamo una popolazione composta, al solito, di F e di C. I payoff, esprimenti la "fitness" sono:

$I\backslash II$	F	C
F	$1,1$	$4,2$
C	$2,4$	$3,3$

I payoff[21] indicano il numero di "offsprings" attesi "in un anno". Assumiamo che da un individuo C nasca ancora un individuo di tipo C (idem per F). Allora, per ottenere gli "offsprings" nell'arco di tempo corrispondente a una frazione τ di anno, le quantità indicate nella matrice vanno moltiplicate per τ.

Assumiamo che la popolazione totale sia mantenuta stabile al livello di N individui (evidentemente, assumiamo una situazione in cui le risorse disponibili sono date e fissate). A dire il vero, questa è solo una ipotesi di comodo: non ha un ruolo essenziale, visto che ciò che ci interessa sono le proporzioni di falchi/colombe.

Vediamo come si evolve una popolazione in cui ad un dato istante t siano presenti una frazione $p = p(t)$ di individui del tipo F e (ovviamente) $1 - p$ individui di tipo C.

Il numero di figli attesi di tipo C, cioè quelli nati da C, sono, per ciascuno individuo di questo tipo:

$$\tau f_C(p) = \tau \cdot [2p + 3(1 - p)] = \tau(3 - p)$$

Poiché ci sono $N(1 - p)$ individui di tipo C, all'inizio del periodo successivo vi saranno

$$N(1 - p)(1 + \tau f_C(p))$$

individui di tipo C. Analogamente, avremo

$$Np(1 + \tau f_F(p))$$

individui di tipo F. Possiamo notare che si ha:

$$\tau f_F(p) = \tau \cdot [p + 4(1 - p)] = \tau(4 - 3p)$$

Abbiamo assunto che la popolazione, per effetto della competizione sulle risorse, venga mantenuta al livello di numerosità N. Si noti che non viene fatta alcuna distinzione fra individui C o F, nel senso che la probabilità di riuscire a procurarsi le risorse (il cibo, ad esempio) è identica per i due tipi (ipotesi

[21] Il gioco considerato è "falco-colomba" con $v = c = 2$, a cui in ogni casella si è aggiunta la quantità (irrilevante) 2. Senza questa aggiunta, otteniamo la tabella descritta nella nota 20.

non da poco...). Allora, se al tempo t avevamo la frazione $p(t)$ di individui di tipo F, al tempo $t+\tau$ la loro frazione nella popolazione sarà:

$$p(t+\tau) = \frac{Np(t)(1+\tau f_F(p(t)))}{N\cdot((1-p(t))(1+\tau f_C(p(t))) + p(t)(1+\tau f_F(p(t))))} =$$

$$= \frac{Np(t)(1+\tau f_F(p(t)))}{N\cdot(1+\tau(1-p(t))f_C(p(t))) + \tau p(t) f_F(p(t))} = \frac{p(t)(1+\tau f_F(p(t)))}{1+\tau \bar{f}(p(t))} =$$

$$= p(t)\frac{1+\tau f_F(p(t))}{1+\tau \bar{f}(p(t)}$$

Dove abbiamo posto

$$\bar{f}(p) = (1-p)f_C(p) + p f_F(p)$$

Facendo i calcoli:

$$\frac{p(t+\tau)-p(t)}{\tau} = p(t)\frac{f_F(p(t)) - \bar{f}(p(t))}{1+\tau\bar{f}(p(t))}$$

E, per $\tau \to 0$:

$$p'(t) = p(t)(f_F(p(t)) - \bar{f}(p(t)))$$

Questa è una equazione differenziale[22] ed è detta equazione (della dinamica) del replicatore. Che si può generalizzare al caso di n tipi diversi di individui, ottenendo:

$$p_i'(t) = p_i(t)(f_i(p(t)) - \bar{f}(p(t)))$$

Dove

$$f_i(p) = \sum_j a_{ij} p_j;$$

$$\bar{f}(p) (= \sum_{i,j} p_i a_{ij} p_j) = \sum_i p_i f_i(p)$$

(la matrice a_{ij} è naturalmente la matrice della fitness).

[22]Lo ammetto. Qui sto assumendo un po' di più del solito per quanto riguarda la dimestichezza del lettore con la matematica. Spero di poter essere scusato: dopotutto è una pagina su oltre 250... Quanto fatto in questa pagina non è altro che la "costruzione" standard che si usa nella modellizzazione matematica per far spuntare fuori, appunto, una equazione differenziale che si ritiene offra una buona descrizione del fenomeno cui si è interessati. Approfitto dell'occasione per segnalare, a chi fosse interessato, che su questo tema è presente in rete, da tempo, una mia introduzione alla modellizzazione mediante equazioni differenziali alla quale potrebbe valere la pena dare un'occhiata: `http://www.diptem.unige.it/patrone/equazioni_differenziali_intro.htm`

Tornando al nostro caso, se sostituiamo ad f_F ed a $\bar{f}$ la loro espressione (abbiamo trovato che $f_F(p) = 4 - 3p$ e $f_C(p) = 3 - p$, da cui ci ricaviamo anche $\bar{f}(p)$), otteniamo l'equazione:

$$p' = p(1-p)(1-2p)$$

Si può studiare la stabilità asintotica dei vari punti di equilibrio di questa equazione differenziale, cosa che però esula dalla finalità di questo testo. Ricordo solo che i punti di equilibrio di una equazione differenziale quale quella che abbiamo trovato non sono altro che i punti per i quali si annulla il secondo membro dell'equazione. Nel nostro caso, ciò corrisponde ai valori $p = 0, 1, 1/2$. La ragione per cui si parla di equilibrio è che, se il sistema si trova inizialmente in quella condizione, continuerà a restarci. Visto che comunque un modello trascura sempre alcuni aspetti, è importante sapere cosa avviene "attorno" ad un equilibrio. In particolare, stabilità asintotica di un equilibrio vuole dire, grosso modo, che le traiettorie partenti da un punto abbastanza vicino all'equilibrio convergono verso questo equilibrio. Si può verificare che $p = 1/2$ soddisfa questa condizione: quindi, ad esempio, una piccola perturbazione accidentale nella composizione della popolazione verrà "riassorbita", nel senso che la composizione tenderà a ritornare verso un ugual numero di falchi e di colombe.

Non è casuale il fatto che, per la matrice di fitness che abbiamo considerato, l'equilibrio asintoticamente stabile della dinamica del replicatore, cioè un pari numero di F e di C, sia un ESS (cosa vista precedentemente). Calcoli analoghi fatti usando una matrice dei payoff che, invece essere quella del gioco "chicken" (vedi nota), sia quella del dilemma del prigioniero, forniscono una dinamica che converge all'unico equilibrio di Nash, che è anche ESS.

Non si deve, tuttavia, ritenere che vi sia una perfetta corrispondenza tra ESS ed equilibri asintoticamente stabili per la dinamica del replicatore. Chi fosse interessato ad approfondire la questione, può trovare ulteriori dettagli, ad esempio, in Binmore (1992). Aggiungo solo che, come ci si può aspettare, il quadro tende a complicarsi in presenza di più equilibri.

E' giunta l'ora di "chiudere" questo capitolo. Cosa abbiamo visto? Alcune note di carattere introduttivo relative a diverse vie che sono state percorse per allontanarsi dal modello classico della TdG. Di ciascuna delle vie che ho citato, abbiamo visto solo i primi passi. Invito naturalmente chi si fosse incuriosito ad approfondire, su testi specializzati, gli aspetti che lo intrigano. Io mi accontento di avere indicato alcune delle strade che sono state tentate. Non le ho descritte tutte, naturalmente, ma almeno vorrei menzionare esplicitamente un aspetto che ho trascurato ma che è molto importante in presenza di “razionalità limitata”: i fenomeni di apprendimento[23] che si manifestano in condizioni di interazioni strategiche ripetute e di cui la “best reply dynamics” ed il “fictitious play” possono essere considerati dei rozzi antenati.

Volendo trarre un bilancio rispetto ai temi di questo capitolo non posso far altro che sottolineare, in sintesi, quali siano le mie opinioni:
- si tratta di un “pezzo” *molto* importante della TdG
- sono stati ottenuti molti risultati interessanti, che gettano nuova luce su vari aspetti dell’interazione strategica o che addirittura ne fanno emergere di nuovi
- alcuni dei suoi risultati mettono in discussione i presupposti standard della TdG
- vi è ancora molto da fare, soprattutto per la presenza di nuovi parametri nel modello, che sono molto difficili da quantificare

Aggiungo alcune considerazioni relative alla nota di pagina 134. Il modello classico del decisore razionale lo vede come un essere dotato, a prima vista, della capacità di scegliere tra diverse azioni. E’ vero che poi egli è “obbligato” a scegliere quello che preferisce, ma per lo meno è lasciata alla sua libera ed insindacabile[24] determinazione quali siano le sue preferenze. Nel caso delle ESS siamo lontanissimi da tutto questo e, in effetti, sembra esservi più che altro una connessione fondata sull’uso di analoghi strumenti formali. D’altronde, quando si pensa ai decisori modellizzati come automi a stati finiti, si è ugualmente lontani dai presupposti interpretativi della teoria classica. Resta in comune, oltre all’uso di strumenti matematici simili, la problematica: situazioni in cui più “decisori” interagiscono.

Come si vede, anche dal ritmo sincopato di questo capitolo, molti sono gli “issue” posti dall’allentamento del classico paradigma di razionalità. Chiuderò dicendo che, se la TdG vi attrae, la problematica della “razionalità limitata” è senz’altro tra quelle che vi suggerisco di approfondire.

[23]Citerò almeno un testo, che può servire come riferimento: Fudenberg e Levine (1998).
[24]A parte le condizioni di coerenza, in particolare la condizione di transitività.

Capitolo 7

Problemi di contrattazione

Dopo aver osato oltrepassare le colonne d'Ercole, abbandonando l'assunzione del decisore razionale ed intelligente, in questo capitolo e nel successivo ritorniamo alla TdG classica, per esplorarne una parte che ha avuto un ruolo molto importante fin dalla sua nascita: mi riferisco ai giochi cooperativi. Finora abbiamo dedicato ampio spazio a vari aspetti relativi ai giochi non cooperativi. L'aver concentrato l'attenzione su questi significa avere escluso per i giocatori la possibilità di sottoscrivere accordi vincolanti: vedremo in questo e nel prossimo capitolo quali effetti possa avere l'introduzione di questa possibilità.

In questo capitolo ci soffermeremo sui cosiddetti problemi di contrattazione. Che cosa sono? Sono situazioni nelle quali a due decisori è data la possibilità di arrivare ad un accordo che possa essere vantaggioso, possibilmente per entrambi. Si può pensare alla compravendita di una casa, o in generale ad un compratore e un venditore di un bene che cercano di mettersi d'accordo sul prezzo, al processo che porta alla stesura di un contratto di lavoro. Non si pensi che la contrattazione sia limitata ad aspetti economici: laddove un accordo fra due decisori può portare a un reciproco vantaggio, lì vi è spazio per la contrattazione. Ciò detto, userò tuttavia come filo conduttore del discorso uno degli esempi "monetari" più semplici: vi sono 100 euro sul tavolo e due decisori devono accordarsi su come spartirli[1] tra loro. Se non si accordano, i 100 euro restano lì. Ogni suddivisione è lecita, comprese anche quelle in cui una parte dei 100 euro resta sul tavolo: se ci sarà utile per semplificare[2] l'analisi, imporremo alcune restrizioni su quali siano le suddivisioni

[1] Questi 100 euro devono essere considerati come "manna piovuta dal cielo", nel senso che non sono frutto di operosità pregressa, da parte di nessuno dei due giocatori. Faccio questa precisazione perché, altrimenti, uno potrebbe giustamente chiedersi come mai, in quel che segue, non si terrà conto del contributo dei due decisori alla creazione di questa ricchezza che si vanno a spartire.

[2] Mi riferisco soprattutto a semplificazioni dal punto di vista tecnico, che non stravolgono gli aspetti essenziali.

possibili.

Questa situazione si presta ad essere affrontata in vari modi. Due sono particolarmente significativi. Il primo potrebbe essere quello di modellizzare la situazione come un gioco non cooperativo, descrivendo in particolare (magari in forma estesa) tutti i dettagli rilevanti della situazione e quindi anche i possibili processi che possono portare al raggiungimento o meno di un accordo. Presumibilmente, cercheremmo di vedere se e quali accordi possano essere, ad esempio, equilibri di Nash del gioco così costruito. Un altro potrebbe essere quello di esaminare quali accordi vincolanti riteniamo possano emergere da questa situazione, senza passare attraverso una sua analisi dettagliata in termini di gioco non cooperativo: assumendo, in altre parole, che non sia necessario conoscere tutti i dettagli dell'interazione strategica, che sia sufficiente la conoscenza di un numero ridotto di parametri del problema. Di fatto, privilegeremo questo secondo approccio. Anzi, useremo i giochi di contrattazione per introdurre un punto di vista molto importante nella TdG (e non solo): il cosiddetto approccio assiomatico.

Prima di passare ad approfondire questo punto di vista, vediamo quale possa essere una modellizzazione del problema di contrattazione qualora volessimo utilizzare gli strumenti di analisi visti fino ad ora, i giochi non cooperativi. Occorre fare attenzione, perché il risultato finale sarà un accordo di spartizione, che può anche essere un contratto vincolante (magari perché con effetti futuri), per cui non possiamo fidarci del fatto che le soluzioni che abbiamo studiato finora possano esserci utili. Tuttavia, possiamo comunque provare ad usare il tipo di modellizzazione che conosciamo per descrivere un processo di contrattazione, cioè possiamo ritenere che il nostro compito sia quello di descrivere tutte le possibili "mosse" dei giocatori, con i loro tempi. In altre parole, come anticipato, ci proponiamo di descrivere la forma estesa del gioco. Emergono però immediatamente due problemi, se pensiamo a come possa avvenire una effettiva trattativa tra i due giocatori sulla spartizione dei 100 euro: possiamo immaginare l'importanza di considerazioni verbali a supporto di proposte di spartizione, ed il loro alternarsi o sovrapporsi senza una tempistica preordinata.

Come possiamo descrivere tutto questo? E' molto difficile riuscire a tracciare un albero che ci offra una descrizione esaustiva. Intanto, il fatto che non esista una tempistica pre-determinata, porta inevitabilmente ad avere, come minimo, un albero con infiniti nodi: ad ogni istante di tempo dobbiamo prevedere la possibilità che i giocatori facciano una "mossa". Immaginare che le mosse possano avvenire solo ad istanti di tempo preordinati ci porta ad un artificiale ingabbiamento di quelle che sono le possibilità di contrattazione: se non vogliamo tagliare via dall'analisi elementi essenziali, dobbiamo pensare ad una modellizzazione a tempo continuo, lasciando appunto a ciascun giocatore la possibilità di fare le sue mosse agli istanti che più gli aggradano. Per di più, queste mosse possono essere una qualunque enunciazione verbale, del tipo: "mi sembra del tutto equo che i 100 euro siano divisi dandone x a me ed il resto a te", dove x è un numero compreso fra 0 eurocent e 100.00 euro; ma anche del tipo: "se non accetti la proposta che ti ho fatto, mi ritiro dalla contrattazione" o "sai benissimo che ho bisogno di 60 euro!"; eccetera. Pare difficile porre limiti a priori alla capacità dialettica e alla fantasia negoziale dei due giocatori.

Insomma, l'albero che ci aspettiamo di ottenere è molto complesso da rappresentare, e figuriamoci quindi da analizzare. Non che questo debba a priori preoccupare: sarebbe un atteggiamento ben poco scientifico quello di arrendersi di fronte alle difficoltà, ignorando la possibilità che, a seguito di una analisi sufficientemente profonda le difficoltà possano alla fine ridimensionarsi o sparire (e, se questo non avviene, dobbiamo usare al meglio la pazienza e l'ingegno che abbiamo). E' però evidente che una analisi esaustiva delle strategie a disposizione dei giocatori è al di là della nostra portata. Dobbiamo trovare un modo per "ridurre la complessità". Da questo punto di vista, l'approccio proposto da Nash è forse il più drastico possibile in questa direzione e, come sottoprodotto, ci farà "uscire" dal contesto dei giochi non cooperativi.

L'idea è la seguente: anziché analizzare nel dettaglio le complesse decisioni strategiche da assumere, domandiamoci quali condizioni dovrebbe soddisfare l'*esito* di un processo di contrattazione fra decisori razionali ed intelligenti.

Concentriamo l'attenzione sul problema particolare che si è detto, la divisione dei 100 euro. Facciamo subito un'ipotesi molto forte, ovverossia che le preferenze dei due giocatori (che assumeremo soddisfino le condizioni di vNM) siano conoscenza comune tra loro. Nessun dubbio che sia un'ipotesi pesante, anche perché molte volte in processi concreti di contrattazione, si pensi alla compravendita di una casa, non è affatto vero che un decisore conosca la valutazione che l'altro ne ha, men che meno che conosca in dettaglio le preferenze dell'altro decisore. D'altro canto, potremmo rispondere a questa obiezione dicendo che da qualche parte bisogna pur partire, e che in fondo l'introduzione di elementi di incompletezza[3] di informazione avrebbe l'effetto di complicare ulteriormente anche l'altro approccio, quello che passa attraverso il tentativo di descrivere la forma estesa del gioco.

Siano allora $u_I, u_{II} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni di utilità di vNM che descrivono le preferenze dei due decisori, rispetto al denaro[4] (più precisamente, $u_I(x)$ è

[3] Un "classico" nella trattazione dei problemi di contrattazione a informazione incompleta è Myerson (1979).

[4] Si noti che questa assunzione è *restrittiva*, nel senso che le preferenze del decisore potrebbero benissimo dipendere anche da "quanto tocca all'altro"! Questo aspetto può essere rilevante se si confrontano tra loro delle spartizioni che non prevedono di suddividere completamente i 100 euro. Il decisore I potrebbe preferire lasciare i 100 euro sul tavolo all'alternativa di avere 5 euro lui e 95 l'altro.

la utilità che il giocatore I assegna all'ottenere dalla contrattazione la somma x, in aggiunta alla sua presente disponibilità, ed analogamente per il secondo). Come caso specifico, per poter fare dei calcoli laddove possa essere utile, assumeremo che sia $u_I(x) = x$ e $u_{II}(x) = \sqrt{x}$.

Abbiamo allora che ogni esito del problema di contrattazione potrà essere individuato dalle coppie di valori delle funzioni di utilità $(u_I(x), u_{II}(y))$, che derivano da tutte le possibili spartizioni dei 100 euro: intendiamo che x e y indichino quanto spetterà (in euro) alla fine ad I ed a II rispettivamente. Si noti che *non* assumeremo che sia $x + y = 100$: ammetteremo che sia possibile a priori un risultato cosiddetto inefficiente. Tra i risultati possibili metteremo in particolare anche quello corrispondente allo "status quo ante", e cioè il caso $x = y = 0$, che rappresenta il punto di partenza del processo di contrattazione, ma che può anche rappresentare il risultato finale, nel caso in cui i due giocatori non riescano a trovare un accordo migliore (viene anche detto punto di disaccordo). Indicheremo con d la coppia $(u_I(0), u_{II}(0))$, mentre useremo la lettera S per denotare l'insieme di tutte le coppie di valori delle funzioni di utilità $(u_I(x), u_{II}(y))$ che corrispondono, come detto, a tutte le spartizioni in linea di principio possibili.

Nel nostro esempio, con le u_I e u_{II} specificamente indicate, l'insieme di contrattazione S è rappresentato in figura 7.1.

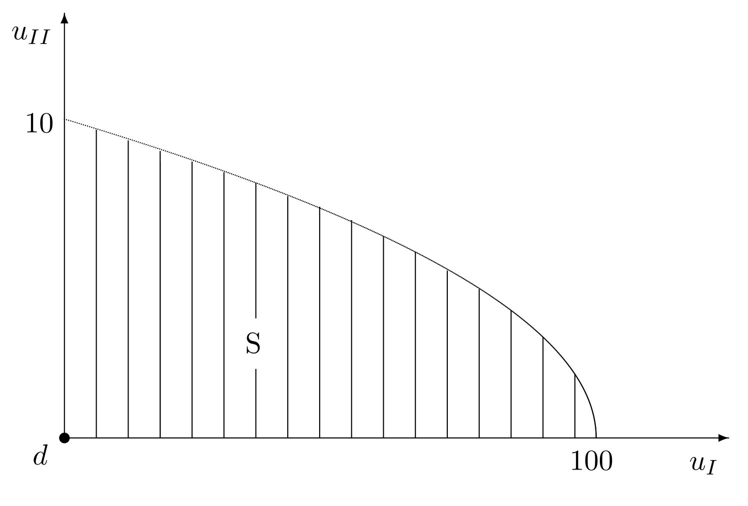


Figura 7.1: Rappresentazione del problema di contrattazione

Continuiamo col nostro programma di lavoro, facendo una assunzione estremamente forte: supponiamo che ad ogni problema di contrattazione, rappresentato da una coppia (S, d), si possa associare univocamente "la soluzione" $\Phi(S, d)$, ovverossia una coppia di valori $(\Phi_I, \Phi_{II}) = (\Phi_I(S, d), \Phi_{II}(S, d))$ che rappresenta i valori di utilità corrispondenti alla spartizione cui ci aspettiamo possano giungere giocatori razionali e intelligenti.

Possiamo immaginare delle condizioni cui tale soluzione dovrebbe soddisfare, oltre al fatto scontato che $(\Phi_I(S,d), \Phi_{II}(S,d))$ appartenga ad S? Certamente.

Una delle prime condizioni è quella di simmetria. Se il problema di contrattazione è del tutto simmetrico per i due giocatori, ovverossia se S è simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, e se d sta sulla bisettrice, la soluzione dovrebbe stare anch'essa sulla bisettrice (vedi figura 7.2). Con ciò, assumiamo implicitamente che due decisori razionali e intelligenti non abbiano diverse "abilità" nel contrattare.

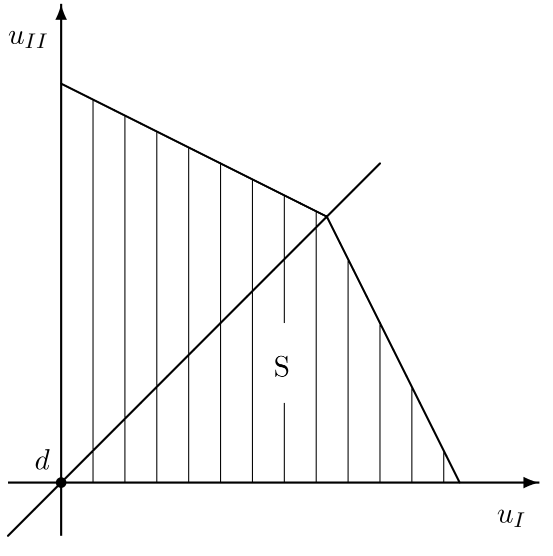


Figura 7.2: Un problema di contrattazione simmetrico

Si noti che, sulla base di questa sola proprietà ciascuno dei punti di S che stanno sulla bisettrice può essere soluzione!

Quali altre condizioni possiamo aggiungere? Una condizione plausibile è quella di efficienza. Espressa nei termini del nostro esempio, l'idea è che non dovrebbero rimanere soldi sul tavolo: i giocatori si spartiscono interamente i 100 euro. E' una assunzione realistica? Non sembra: l'esito di un processo di contrattazione reale non è sempre efficiente. Non dobbiamo però dimenticare l'ipotesi molto forte che abbiamo fatto (oltre all'assunzione di decisori razionali ed intelligenti), ovvero che le preferenze dei decisori siano conoscenza comune. Sulla base di questa assunzione, è un po' meno strano assumere che il risultato finale del processo di contrattazione possa essere efficiente[5].

Una terza condizione deriva da una considerazione che forse qualche lettore avveduto avrà già fatto: se le funzioni di utilità sono un mero strumento analitico di rappresentazione dell'unico dato che abbia rilevanza empirica, ovvero le preferenze dei giocatori, non abbiamo forse dato, nella costruzione di (S, d), un rilievo eccessivo ad una scelta arbitraria di funzioni di utilità? In un certo senso, sì, ma rimediamo subito imponendo che sia soddisfatta una condizione di *covarianza* della soluzione rispetto a trasformazioni delle funzioni di utilità di vNM che corrispondano a equivalenti rappresentazioni di date preferenze. Più precisamente, l'assunzione è di questo tipo: dato (S, d), immaginiamo di trasformarlo in (S', d'), applicando una trasformazione di coordinate (sia ad ogni punto di S che al punto di disaccordo d) del tipo seguente:

$$(u_I, u_{II}) \to (u'_I, u'_{II}) = (\alpha_I u_I + \beta_I, \alpha_{II} u_{II} + \beta_{II})$$

Se effettuiamo questa trasformazione, vogliamo che la soluzione (Φ_I, Φ_{II}) del problema (S, d) diventi $(\Phi'_I, \Phi'_{II}) = (\alpha_I \Phi_I + \beta_I, \alpha_{II} \Phi_{II} + \beta_{II})$.

Nel nostro caso particolare, anziché usare $u_I(x) = x$, potevamo usare indifferentemente un'altra funzione di utilità ad essa equivalente quale, ad esempio, $u_I(x) = 2x - 47$; lo stesso vale per $u_{II}(x) = \sqrt{x}$, che possiamo rimpiazzare con $u_{II}(x) = 17\sqrt{x} + 90$. Se la soluzione per il problema (S, d) fosse il punto di coordinate $(200/3, \sqrt{100/3})$, essa si dovrebbe trasformare, per (S', d'), in $(259/3, 17 \cdot \sqrt{100/3} + 90)$.

Ammettiamo allora anche questa proprietà per le soluzioni. Sono sufficienti queste tre ipotesi fatte (simmetria, efficienza, covarianza) per trovare la soluzione di ogni problema di contrattazione? Chiaramente no. Basta prendere il problema di contrattazione (S, d) che corrisponde al nostro caso specifico, quello della spartizione dei 100 euro. Questo problema di contrattazione non è simmetrico (né lo diventa con trasformazioni ammissibili delle due funzioni di utilità). Si noti che il problema di base (la situazione data, la "game form") *è simmetrico*, ma tali non sono le preferenze dei giocatori rispetto ai guadagni monetari e pertanto l'insieme S non è simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. L'unica cosa che possiamo dire, grazie alla condizione di efficienza, è quindi che la soluzione sarà del tipo $(t, \sqrt{100 - t})$ per un opportuno valore di $t \in [0, 100]$.

Possiamo aggiungere qualcosa? Possiamo ragionevolmente introdurre ulteriori restrizioni per la soluzione? La risposta data a suo tempo da Nash è

[5]Non a caso, nell'approccio di Myerson (1979) a problemi di contrattazione a informazione incompleta, è previsto che il risultato possa essere inefficiente in certi stati di natura che si possono verificare con probabilità positiva.

positiva e consiste nell'accettazione, in questo contesto, del principio della "Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti" (userò l'acronimo IIA, di derivazione inglese).

Cosa dice questo principio? Come tutti i principi non si presta ad una formulazione precisa, "chiusa". Può però essere illustrato con esempi molto semplici. Immaginate che si debba scegliere il sindaco di una città, e che i candidati siano 3: i soliti Tizio, Caio e Sempronio. Si svolgono le elezioni, secondo le modalità previste dalla legge, e risulta eletto Tizio. Dopo le elezioni, da ulteriori controlli della documentazione emerge che il candidato Caio non rientrava tra l'elettorato passivo (ad esempio, per una qualche forma di incompatibilità, quale l'essere proprietario di reti televisive locali). Dovranno essere rifatte le elezioni? Se riteniamo che sia applicabile il principio dell'indipendenza dalle alternative irrilevanti, la risposta sarà no. A favore di questa opzione sta il fatto che "Caio" è una alternativa "irrilevante", non avendo vinto: Sempronio è stato battuto da Tizio, dopotutto. Ciò non impedisce che si possa legittimamente sostenere che, in assenza del candidato Caio, Sempronio avrebbe potuto vincere (ci vuol poco ad immaginare una situazione realistica in cui questa argomentazione è legittima: si può pensare che i programmi elettorali di Sempronio e Caio fossero molto simili e che quindi l'assenza del candidato Caio avrebbe avuto l'effetto che i suoi voti si riversassero su Sempronio, che pertanto avrebbe potuto sconfiggere Tizio).

Noi ammetteremo che valga il principio di indipendenza delle alternative irrilevanti (dovrebbe essere abbastanza evidente da quanto appena detto che non sono affatto schierato in sua strenua difesa; voglio però notare che l'esempio appena fatto contiene un evidente aspetto di informazione incompleta, che nella nostra modellizzazione abbiamo escluso), e cercheremo di vedere dove questo ci possa portare. Vedremo che ci porterà lontano, permettendoci di determinare in modo univoco[6], assieme alle proprietà già introdotte, la soluzione di ogni problema di contrattazione. Vediamo come ciò possa avvenire.

Supponiamo che la soluzione del nostro problema di contrattazione sia il punto evidenziato in figura 7.3 con un cerchietto "pieno": non sapendo ancora chi possa essere la soluzione, ho preso un punto "a caso" di coordinate $(64, 6)$.

Tracciamo la retta tangente al bordo di S, passante per il punto indicato. Questa retta tangente individua il triangolo T che in figura 7.3 è stato tratteggiato. Consideriamo il problema (T, d), dove il "disagreement point" d non è altro che l'origine, come nel nostro problema di partenza. Possiamo trovare la soluzione per il problema (T, d)? La risposta è sì, e per farlo ci servono le prime tre proprietà indicate. Cominciamo ad utilizzare l'assioma di cova-

[6]Qui sta l'aspetto "magico" del risultato di Nash. Naturalmente, scavando fra le pieghe della dimostrazione, si può capire come possa emergere un risultato così sorprendente: matematicamente, è il teorema di separazione tra convessi che offre il giusto "ponte" con il principio di indipendenza dalla alternative irrilevanti.

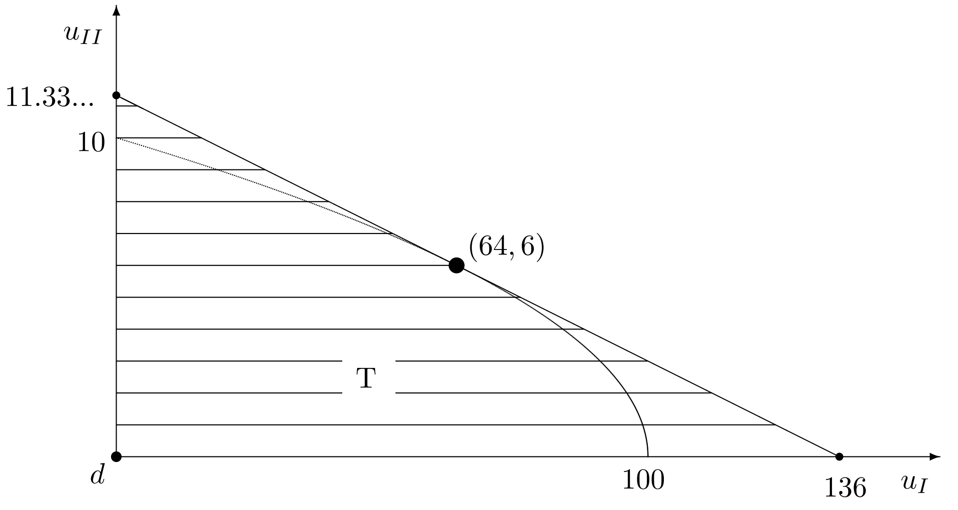


Figura 7.3: Un problema di contrattazione e il triangolo associato a una presunta soluzione

rianza per trasformare (T, d) in modo da ottenere un problema (T', d') che sia simmetrico, esattamente come viene mostrato nella figura 7.4 (abbiamo scelto $d' = d$).

Abbiamo semplicemente fatto in modo che l'ipotenusa del triangolo T si disponga "a 135 gradi". A questo punto, la soluzione del problema (T', d') è, per simmetria ed efficienza, il punto di coordinate $(68, 68)$, indicato nella figura 7.4 con un cerchietto vuoto. Ma allora, per covarianza, la soluzione del problema (T, d) è il punto evidenziato col cerchietto "vuoto", in figura 7.5.

Osserviamo come i due cerchietti che compaiono in figura 7.5 individuano due punti distinti (tra l'altro, anche se dalla figura non si vede, il secondo punto non appartiene neppure ad S). Si noti però come il punto $(64, 6)$ in figura 7.3 fosse stato individuato in modo arbitrario. Possiamo allora immaginare che, se proviamo a spostare questo punto iniziale (quello individuato col cerchietto pieno) lungo il bordo di S, prima o poi troveremo quel punto per cui la procedura sopra escogitata, che utilizza T e T', ci ridà al termine un cerchietto vuoto che viene a coincidere con quello pieno. A conforto di questa affermazione si può notare come si possa presumere che la trasformazione che "mappa" il cerchietto pieno in quello vuoto sia una trasformazione continua: ciò lascia presumere che l'applicazione di un opportuno teorema di punto fisso fornisca la prova che l'affermazione fatta sia effettivamente corretta. Comunque sia, se questo avviene, abbiamo trovato la soluzione[7] del problema di contrattazione (S, d)! Infatti, la soluzione di (T, d) è quella indicata grazie alla covarianza ed

[7] La quale è, per la precisione, il punto di coordinate $(200/3, \sqrt{100/3})$.

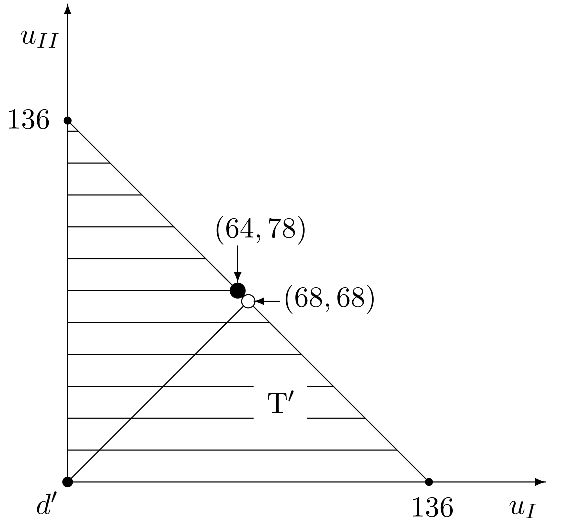


Figura 7.4: Un problema di contrattazione sul triangolo simmetrico T'

alla simmetria applicata al problema (T', d'): se così è, osserviamo che la soluzione per (T, d) deve essere soluzione anche per (S, d), grazie alla indipendenza dalle alternative irrilevanti. Quale è infatti la differenza tra (S, d) e (T, d)? La differenza sta semplicemente ed unicamente nel fatto che S è ottenuto da T eliminando delle *alternative* che possiamo ben ritenere *irrilevanti*, visto che la soluzione del problema (T, d) non è stata eliminata. Proprio come avveniva nel caso dell'elezione del sindaco.

Naturalmente non ho fornito una dimostrazione rigorosa del fatto che i quattro principi (simmetria, covarianza, efficienza, indipendenza dalle alternative irrilevanti), sono in grado di determinare in maniera univoca la soluzione di un problema di contrattazione. Non solo perché le argomentazioni che abbiamo fatto semplicemente suggeriscono quella che potrebbe essere una strada per una dimostrazione formale, ma anche perché i principi non sono stati tradotti in enunciati specifici, né è stato precisato quale sia esattamente la classe dei problemi di contrattazione che si sta considerando. Tutto ciò è, comunque, fattibile e le dovute precisazioni possono essere trovate su vari testi specialistici, oltre che nella fonte originaria (e sulla pagina web collegata WEB
a questo libro).

Ciò che abbiamo appena visto non è altro che l'approccio usato da Nash ai problemi di contrattazione, in un suo famoso articolo apparso nel 1950 sulla rivista *Econometrica*. Nash ha anche fornito una formula che permette di trovare la soluzione. Si considera $S_d = \{(u_I, u_{II}) \in \mathbb{R}^2 : u_I \geq d_I,\ u_{II} \geq d_{II}\}$ e

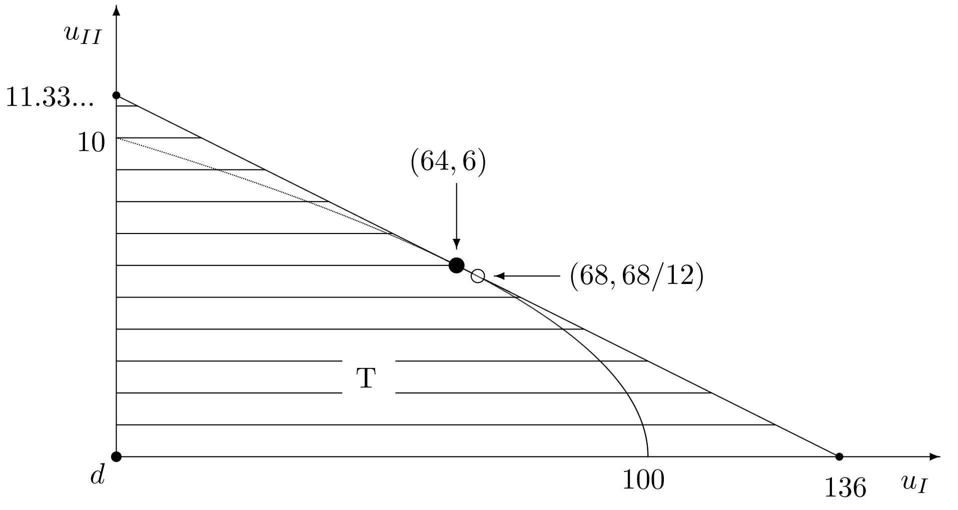


Figura 7.5: La candidata soluzione non va bene

la soluzione $\Phi(S,d)$ è la coppia $(\bar{u}_I, \bar{u}_{II})$ che rende massimo il cosiddetto "prodotto di Nash", cioè $(u_I - d_I)(u_{II} - d_{II})$ su S_d. L'approccio di Nash non solo rappresenta un brillante[8] contributo per cercare di risolvere un problema per il quale le strade che avevamo imparato a conoscere si rivelano impervie, ma offre anche un esempio paradigmatico di una modalità di affrontare i problemi di interazione strategica che è stato utilizzato molte volte ed in varie circostanze. Mi sto riferendo all'uso del cosiddetto "metodo assiomatico" per definire una soluzione di un problema di interazione strategica. Vale la pena notare come questo tipo di approccio mostri la sua fecondità anche al di fuori dell'ambito di stretta pertinenza della teoria dei giochi. Il nome stesso potrebbe e dovrebbe far venire alla mente altri ambiti in cui si è sviluppato, ben prima della teoria dei giochi: la geometria euclidea, ed ancor più l'uso del metodo assiomatico nella fondazione stessa della matematica o di quella sua parte così centrale che è la teoria degli insiemi[9]. A dire il vero, pur se il termine "assioma" è quello che viene consuetudinariamente utilizzato in TdG a proposito di questo tipo di approccio, io preferisco, e mi sembra più appropriato dato il contesto, usare il termine meno impegnativo di "proprietà" e quindi parlare di individuazione di soluzioni a partire dalle proprietà che richiediamo debbano soddisfare.

[8] Osservo che nella dimostrazione Nash utilizza una argomentazione analoga ma non identica a quella che abbiamo visto: con un abile trucco (come detto, usa un "teorema di separazione") riesce ad evitare di far ricorso diretto al teorema di punto fisso.

[9] L'uso del metodo assiomatico non è limitato ai soli usi "interni" della matematica. Si può dare una fondazione assiomatica della nozione di entropia, o di quella di massa. Si può parlare di fondazione assiomatica della meccanica quantistica e della teoria delle scelte sociali. Etc.

Detto questo sul metodo, due parole vanno spese anche sul risultato. Una conseguenza analitica della formula che dà la soluzione di Nash è che (a parità di altre condizioni) risulta essere penalizzante l'avversione al rischio. Nell'esempio della divisione dei 100 euro, nonostante la simmetria del problema il giocatore II ottiene il risultato peggiore, e ciò è dovuto al fatto che la sua funzione di utilità $u_{II}(x) = \sqrt{x}$ indica che è "avverso al rischio", contrariamente al giocatore I che è invece indifferente al rischio. Il fatto che la teoria preveda uno svantaggio per chi ha una maggiore avversione al rischio è un punto a favore della teoria, per quanto riguarda la capacità di riprodurre quanto viene usualmente osservato in problemi di contrattazione.

Non meno rilevante è il fatto che la teoria di Nash offra una soluzione *univoca* ad un problema di contrattazione. Pur tenendo conto delle assunzioni impegnative che sostengono questa teoria, siamo di fronte ad un tentativo (e risultato) audace, rispetto alle risposte che la teoria economica aveva dato in precedenza al problema di contrattazione, ritenendolo un problema la cui soluzione era tendenzialmente indeterminata (fatta salva l'efficienza, rappresentata, ad esempio, nella "curva di contrattazione" di Edgeworth).

Dopo aver visto il modello più famoso di contrattazione, vorrei dedicare la parte restante del capitolo a tre questioni rilevanti per questa problematica:

- ammettendo la possibilità di accordi vincolanti, possiamo ridescrivere un gioco in forma strategica come problema di contrattazione, così come è stato presentato in questo capitolo?

- è possibile trovare un sistema di proprietà che sia "migliore" di quello introdotto da Nash o, in subordine, che sia di interesse paragonabile al suo?

- abbiamo visto le difficoltà che presenta la descrizione di un processo di contrattazione da un punto di vista "non cooperativo": ciò nonostante, si può comunque dire qualcosa di rilevante, o per lo meno di interessante, seguendo questa via?

Cominciamo con la prima domanda. Se abbiamo un gioco finito a due giocatori in forma strategica, è abbastanza facile immaginare quali possano essere tutti i risultati possibili a seguito di accordi. I due giocatori possono infatti accordarsi sul giocare una qualsiasi distribuzione di probabilità[10] su $X \times Y$ e da questo segue che i payoff ottenibili sono descrivibili in modo elementare. Il "tool" essenziale consiste nella rappresentazione, nello spazio "delle utilità" dei due giocatori, dell'insieme W costituito dalle varie coppie

[10] Supponiamo di avere a che fare con decisori le cui preferenze soddisfano i requisiti della teoria di von Neumann e Morgenstern per le decisioni in condizioni di rischio.

di payoff corrispondenti alle diverse coppie di strategie pure a disposizione dei due giocatori. Per averne una rappresentazione "concreta", utilizzo un esempio: la figura 7.6 è costruita applicando il metodo appena descritto al gioco in forma strategica rappresentato nella tabella 7.1.

$I \backslash II$	L	R
T	$(1,2)$	$(0,1)$
M	$(0,3)$	$(2,1)$
B	$(0,2)$	$(3,4)$

Tabella 7.1: Esempio di gioco in forma strategica

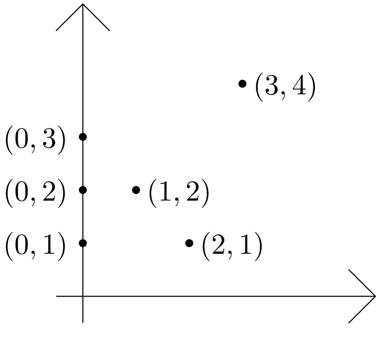


Figura 7.6: L'insieme W delle coppie di payoff

Fatto questo, i payoff ottenibili attraverso accordi fra i giocatori sono dati dal cosiddetto "involucro convesso" di W, descrivibile più semplicemente come il più piccolo poligono convesso che contiene tutti i punti di W, come mostrato nella figura 7.7. Come mai? Perché i punti dell'involucro convesso sono tutti e soli i punti esprimibili come "combinazione convessa" dei punti (x_i, y_i) $(i = 1, \ldots, 6)$ di W. Quindi, un punto (x, y) sta nell'involucro convesso di W se e solo se $(x, y) = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i(x_i, y_i)$, con $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i = 1$. Ad esempio, il punto $(1/2, 7/4)$ è esprimibile come $3/4(0, 2) + 1/4(2, 1)$ (si noti che possiamo anche scriverlo come $3/8(0, 1) + 3/8(0, 3) + 1/4(2, 1)$; non richiediamo che ci sia un solo modo per farlo). La ragione per cui ci interessano i punti dell'involucro convesso di W è molto semplice: la formula $(x, y) = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i(x_i, y_i)$ ci dice che il punto (x, y) può essere ottenuto giocando la strategia correlata che assegna probabilità λ_i ad una qualsiasi strategia che dia come payoff

(x_i, y_i). Nel nostro esempio, la coppia di payoff $(1/3, 1/2)$ può essere ottenuta con la strategia correlata che prevede di giocare (B, L) con probabilità $3/4$ e (M, R) con probabilità $(1/4)$ (o, anche, giocando: (T, R) con probabilità $3/8$, (M, L) con probabilità $3/8$ e (M, R) con probabilità $(1/4)$). E, viceversa, ogni strategia correlata non potrà dare luogo ad altro che ad una coppia di payoff attesi che stanno nell'involucro convesso di W. Insomma, lo spazio S delle "possibilità di contrattazione" è trovato molto facilmente: ripeto, non è altro che l'involucro convesso di W.

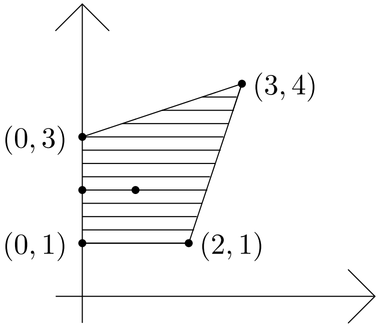


Figura 7.7: L'involucro convesso dell'insieme W delle coppie di payoff

Il vero scoglio, nel passaggio da un gioco in forma strategica (X, Y, f, g) ad un problema di contrattazione (S, d), sta nell'individuare chi sia d, il "disagreement point". Nell'esempio che abbiamo utilizzato come "problema modello", cioè la spartizione dei 100 euro, non c'era alcun problema: era scontato chi fosse il punto di disaccordo.

Se però abbiamo un gioco in forma strategica, quale possiamo immaginare possa essere il punto di disaccordo? Se la teoria dei giochi non cooperativi ci fornisse un'indicazione netta su cosa sia da intendere per soluzione di un gioco in forma strategica, sarebbe ragionevole assumere questo come d. Ciò è però ben lungi dall'essere vero; inoltre, se anche si accettasse l'equilibrio di Nash come soluzione, si avrebbe comunque il problema della sua essenziale non unicità (si pensi alla battaglia dei sessi, ad esempio). Noto, per di più, che potrebbe essere più coerente prendere come punto di riferimento un equilibrio correlato: dato il contesto, è naturale pensare che i giocatori possano correlare le loro strategie. Ciò non semplifica il problema: ricordo che gli equilibri correlati sono almeno tanti quanti gli equilibri di Nash e quindi il problema della non univocità della prescrizione si allarga ancora di più.

Si potrebbe pensare di adottare un qualche punto di vista "ad hoc", che tenga conto del fatto che il problema di interazione strategica viene, per così dire, immerso in un problema di contrattazione. Da questo punto di vista potrebbe avere un certo appeal considerare le cosiddette strategie di max min, che abbiamo introdotto nel capitolo 3.

Ricordo che $\hat{x}$ è una strategia di max min per I se $\phi(x) = \min\{f(x,y) : y \in Y\}$ assume il suo valore massimo in $\hat{x}$. Il modo stesso in cui si definisce $\hat{x}$ (e $\hat{y}$, la sua "gemella" per II), fa sì che la coppia $(\hat{x}, \hat{y})$ individui un[11] candidato interessante come "disagreement point", ovverossia $d = (f(\hat{x},\hat{y}), g(\hat{x},\hat{y}))$. Tuttavia, nel complesso questa idea per trovare il disagreement point non è poi così straordinaria. Che un giocatore scelga la strategia di max min non è molto credibile, in generale, a meno che non ci si trovi in una situazione ad interessi contrapposti, come già evidenziato con l'esempio della tabella 3.17. Si noti, per giunta, che i casi interessanti dal punto di vista della contrattazione non sono quelli dove gli interessi dei due giocatori sono contrapposti: se così è, infatti, sparisce lo spazio utilizzabile per trovare un accordo che sia di reciproco vantaggio. Nei casi di giochi ad interessi non direttamente contrapposti, non è proponibile (in generale) la individuazione del "disagreement point" come esito di strategie di max min.

Quindi la risposta alla prima questione è piuttosto negativa. Da un gioco in forma strategica non si può, in generale, passare in modo canonico ad un problema di contrattazione. Non, per lo meno, se accettiamo l'approccio di Nash. Penso sia evidente la rilevanza, negativa, di queste considerazioni che indeboliscono o la significatività del modello di Nash o la coerenza complessiva della TdG (o entrambi...).

Per quanto riguarda la seconda questione, e cioè se sia possibile trovare un sistema di proprietà "migliori" di quelle di Nash, la risposta che io do a questa domanda è che non c'è a disposizione un sistema che io mi senta di qualificare come "migliore" di quello proposto da Nash, assumendo naturalmente che il set di ipotesi sulla struttura[12] del problema di contrattazione sia comparabile a quello di Nash, in modo che un confronto sia possibile e sensato.

Quanto ho detto non significa affatto che io ritenga il sistema di Nash "il migliore possibile". Semplicemente ritengo che non vi siano altri modelli i quali mostrino una chiara superiorità rispetto a quello di Nash dal punto di vista

[11] Un aspetto interessante, a favore dell'idea di usare il max min, è che, anche se la strategia di max min può non essere unica, però il *valore* di max min è univocamente determinato, ed è proprio tale valore che ci interessa per definire d. Noto anche che tecnicamente dovremmo applicare l'idea del *max min* alla estensione mista del gioco.

[12] Intendo dire che uno potrebbe fare assunzioni molto diverse. Ad esempio, assumere che siano possibili confronti interpersonali di utilità; oppure lavorare con un linguaggio più ricco, ad esempio uno col quale si possa parlare di diritti, di meriti, di bisogni, di "dotazioni iniziali", etc. Presumibilmente, inoltre, il modello di Nash non sarà adeguato fuori da una situazione di informazione completa come quella descritta.

della loro attendibilità. Per cercare di spiegare un po' meglio cosa intendo, descrivo brevemente un modello "alternativo", proposto da Kalai e Smorodinsky (1975). Questo modello è molto simile a quello di Nash, differenziandosene perché non accetta la proprietà di "Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti" e la sostituisce con una richiesta di tipo diverso, ovvero la "Monotonia Individuale".

Una argomentazione di un certo peso in favore di Kalai e Smorodinsky rispetto a Nash viene dalla considerazione dei due problemi di contrattazione (S', d) e (S'', d) disegnati nella figura 7.8, in cui è stata tratteggiata la parte della figura di sinistra che "scompare" quale possibilità di contrattazione nel disegno di destra.

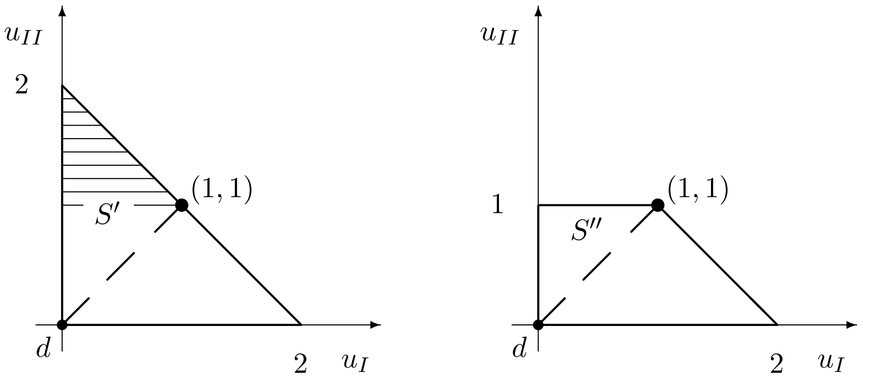


Figura 7.8: Due problemi di contrattazione

Per simmetria ed efficienza la soluzione del problema di contrattazione (S', d) è il punto $(1, 1)$. Da questo segue immediatamente, in forza di IIA, che lo stesso punto *deve* essere la soluzione per il problema di contrattazione (S'', d): infatti, il disagreement point è lo stesso per i due problemi, inoltre è $S'' \subseteq S'$ e la soluzione per S' sta in S''. Questo fatto non è facile da accettare, visto che in (S'', d) il giocatore II si trova ad ottenere il massimo livello di utilità tra quelli cui può aspirare, mentre il giocatore I ottiene esattamente quello che avrebbe da un problema di contrattazione quale (S''', d), o (S'''', d), raffigurati in figura 7.9.

Insomma, la "porzione" tratteggiata in figura 7.8 è proprio irrilevante, come dice il nome della proprietà chiave usata da Nash. E' accettabile questo? Non dovrebbe lasciare una qualche traccia nella soluzione il fatto che una situazione data non sia simmetrica, ma offra a II, almeno potenzialmente, delle opportunità migliori rispetto a I?

Kalai e Smorodinsky hanno cercato di rispondere a questo tipo di considerazioni, sostituendo, come detto, il requisito di Indipendenza dalle Alter-

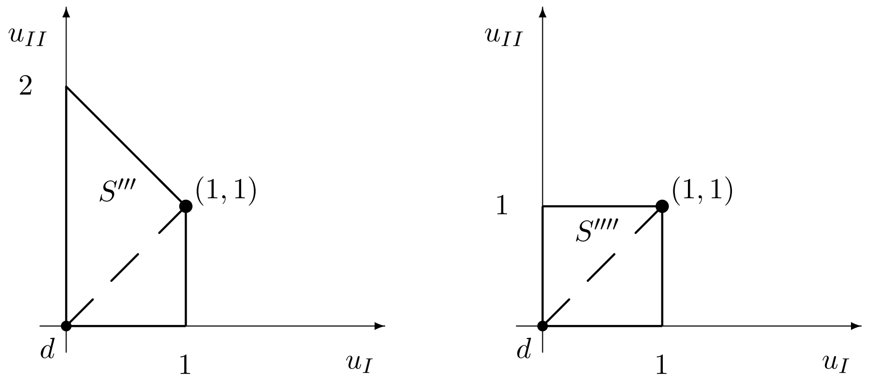


Figura 7.9: Altri due problemi di contrattazione

native Irrilevanti con quello di Monotonia Individuale (che enunceremo dopo, per comodità di esposizione). Hanno provato che la Monotonia Individuale, congiuntamente alle tre proprietà di simmetria, efficienza e covarianza, caratterizza univocamente una soluzione per i problemi di contrattazione. Anche loro hanno dato una "formula" che individua la loro soluzione. Si definisca "utopia point" il punto b le cui coordinate sono così determinate (ricordo che $S_d = \{(u_I, u_{II}) \in \mathbb{R}^2 : u_I \geq d_I,\ u_{II} \geq d_{II}\}$):

$$b_I = \max\{u_I : (u_I, u_{II}) \in S_d\}, \qquad b_{II} = \max\{u_{II} : (u_I, u_{II}) \in S_d\}.$$

La soluzione di Kalai e Smorodinsky si ottiene scegliendo l'unico punto efficiente sul segmento che congiunge d con b. La figura 7.10 illustra gli stessi problemi di contrattazione visti in figura 7.8, con indicate le relative soluzioni di Kalai e Smorodinsky.

Avendo introdotto lo "utopia point", possiamo descrivere più agevolmente la proprietà di "Monotonia Individuale":

Proprietà di monotonia Individuale. Siano dati due problemi di contrattazione (S', d') e (S'', d''), con $d' = d''$ e con $S' \subseteq S''$. Se è $b_I(S', d') = b_I(S'', d'')$, allora si ha $\Phi_{II}(S', d') \leq \Phi_{II}(S'', d'')$.

L'idea espressa da questa proprietà è che un ampliamento delle possibilità di contrattazione (da S ad S') che non modifica, per lo "utopia point", la coordinata corrispondente ad un giocatore, andrà a vantaggio dell'altro. A mio parere non è scontata la superiorità dell'approccio di Nash rispetto a Kalai e Smorodinsky, né il viceversa. Inoltre, il linguaggio che usiamo per formalizzare i problemi di contrattazione e che è comune ad entrambi i due approcci, non ci permette di approfondire la questione. Una strada possibile è quella appunto di arricchire il linguaggio, abbandonando l'essenzialità dell'approccio

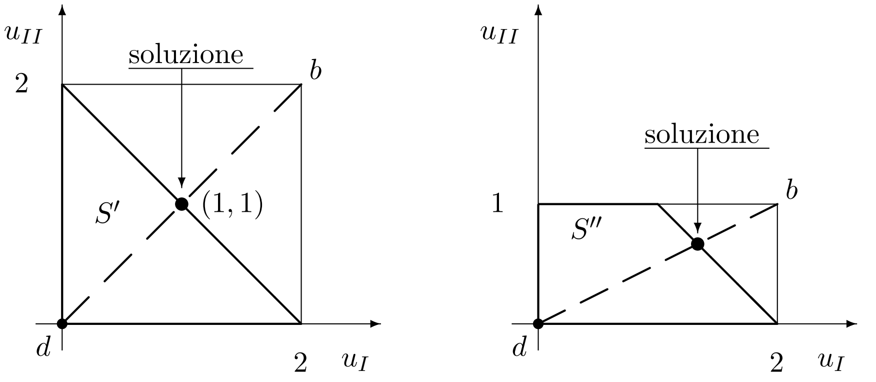


Figura 7.10: La soluzione di Kalai e Smorodinsky per due problemi di contrattazione

di Nash per poter utilizzare ulteriori informazioni sul problema o effettuare delle considerazioni più complesse. E' possibile perseguire questa strada (vedasi per esempio l'idea di contrattazione su un "economic environment", o con "named goods" di Roemer (1996)), ma al solito mi limito a rinviare chi volesse approfondire a testi specializzati. Mi limito ad osservare che la introduzione di ulteriori dettagli ha anche un tipico effetto perverso: quello di introdurre ulteriori elementi sui quali ci si può trovare in disaccordo a seconda dei presupposti da cui si parte o di quegli aspetti che si intende accentuare.

L'avere citato un assioma di monotonia mi obbliga a fare una osservazione, anche per rispondere ad una domanda che qualche lettore attento potrebbe essersi fatta. Come mai non viene fatta (né da Nash, né da Kalai e Smorodinsky) una ipotesi di monotonia del tipo seguente?

Proprietà di monotonia. Siano dati due problemi di contrattazione (S', d') e (S'', d''), con $d' = d''$ e con $S' \subseteq S''$. Allora, $\Phi_I(S', d') \leq \Phi_I(S'', d'')$ e $\Phi_{II}(S', d') \leq \Phi_{II}(S'', d'')$.

Per una ragione molto semplice: si prova facilmente (rinvio al problema 39 a questo proposito), che una tale ipotesi è in conflitto con la richiesta di efficienza. Detto altrimenti, non è possible definire in alcun modo sulla classe dei problemi di contrattazione (come introdotta da Nash) una soluzione che soddisfi la proprietà di monotonia e a quella di efficienza[13]. Va detto che una ipotesi di monotonia di questo genere non tiene conto (al contrario di quella di Kalai e Smorodinsky) che l'ampliamento (il miglioramento) delle possibilità di accordo può essere ineguale tra i due giocatori di modo da costituire di fatto un indebolimento delle "pretese" di uno a scapito dell'altro. In un'ottica nor-

[13]Si noti che è essenziale che la condizione di efficienza sia quella cosiddetta "stretta". La cosiddetta efficienza debole non è invece in contrasto con la condizione di monotonia. Per questo rinvio a Tijs (2003).

mativa, per converso, potrebbe sembrare un requisito attendibile chiedere che nessuno rimanga danneggiato dal fatto che la “torta” da spartire è diventata “più grossa”.

Il modello “assiomatico” appena visto, che ci ha portato a caratterizzare due importanti concetti di soluzione per problemi di contrattazione quali la soluzione di Nash e quella di Kalai e Smorodinsky, è stato e viene utilizzato molto ampiamente, in TdG e non solo.

Per questo motivo è importante fare alcune considerazioni su questo metodo, in modo da metterne in evidenza sia alcuni pregi che difetti.

Fra i pregi, il più notevole è certamente quello di non partire da una soluzione che si ritiene appropriata, ma puntare l’attenzione sulle proprietà che la soluzione “dovrebbe” avere. Gli esempi che abbiamo visto (e quelli che vedremo nel capitolo 8) portano alla caratterizzazione univoca di una soluzione, ma sarebbe scorretto vedere in questo la finalità del metodo assiomatico. Non si può tacere uno dei risultati più interessanti di questo approccio nelle scienze sociali, ovvero il cosiddetto teorema di impossibilità (detto anche “teorema del dittatore”) di Arrow (1951), il quale mostra che *non esiste* alcun metodo di aggregazione delle preferenze che soddisfi un certo numero di proprietà, ognuna delle quali sembra essere ragionevole. Se, nel contesto dei problemi di contrattazione, la condizione di Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti sembra discutibile, può essere interessante scoprire quale sia la classe delle soluzioni che soddisfano le meno problematiche condizioni di simmetria, efficienza e covarianza; oppure, se abbiamo dubbi sul fatto che la condizione di simmetria sia applicabile nel contesto cui siamo interessati, ci si può chiedere quali siano le soluzioni che soddisfano tutti gli assiomi di Nash, eccetto la simmetria.

Si noti come le considerazioni precedenti abbiano senso nella misura in cui si ha a che fare con una teoria incompleta o che, perlomeno, trattiamo come se tale fosse. Vorrei precisare: le considerazioni iniziali di questo capitolo puntavano l’indice verso le difficoltà ad applicare il modello standard di gioco non cooperativo in forma estesa al contesto della contrattazione: non è però affatto a questo tipo di incompletezza (che potremmo chiamare, un po’ sbrigativamente, di tipo “computazionale”) che intendo riferirmi: mi riferisco al fatto che la teoria non mi dà una risposta univoca, una volta inseriti dentro i parametri specifici del caso in esame. Per fare un esempio, nella fisica classica le leggi della dinamica mi permettono di determinare il moto di un corpo una volta che siano noti i dati rilevanti (forze agenti, posizione e velocità iniziale, etc.): non abbiamo bisogno di una analisi assiomatica del tipo visto qui. Invece, nel contesto della contrattazione, evidentemente non si ritiene di avere uno strumento altrettanto incisivo quanto le “leggi della dinamica” se ci dedichiamo allo studio della situazione attraverso i vari filtri rappresentati dalle proprietà che ci appaiono “plausibili”.

Quanto appena detto non vuole essere una “diminutio” del metodo assiomatico. Tuttavia, proprio perché ritengo che sia un metodo molto importante, sono convinto che si debba essere consapevoli dei suoi limiti. Un limite importante (inestricabilmente connesso ai suoi pregi) è che può essere applicato solo laddove sia possibile una adeguata formalizzazione del problema, cosa che non sempre è data e che potrebbe anche indurre nella tentazione di cercare scorciatoie, trascurando quegli aspetti della data situazione che non si prestano ad essere ricondotti all'analisi formale.

Un secondo aspetto mi pare rilevante[14]: il fatto che siano elencati esplicitamente taluni assiomi può far dimenticare altre condizioni che sono comunque presupposte e che possono avere un ruolo determinante. Si potrebbero fare molti esempi, a questo proposito, ma mi limiterò a soffermarmi su un paio di casi. Uno riguarda quali siano le informazioni sulle quali si fonda tutta la struttura formale: ad esempio, nel modello di contrattazione di Nash (e di Kalai e Smorodinsky) si trascura qualsiasi informazione che non sia incorporata nelle funzioni di utilità. Se si ritiene davvero che le informazioni rilevanti in un problema di contrattazione siano tutte e sole quelle incorporate nei valori delle funzioni di utilità, allora la modellizzazione è accettabile. Ma non sempre questa assunzione (detta anche ipotesi di "welfarismo") è appropriata. A questo proposito, ad esempio, Yaari e Bar-Hillel (1984) hanno verificato, a livello sperimentale, come i decisori ritengano più appropriato un certo tipo di soluzione piuttosto che un'altra a seconda che le informazioni da incorporare nelle funzioni di utilità derivino da bisogni, gusti oppure opinioni (credenze). Altre critiche interessanti sono state fornite da Roemer (vedasi, ad esempio, Roemer (1996)), il quale osserva come l'ipotesi di "welfarismo" non permette di distinguere tra situazioni che, da un punto di vista "economico" sono differenti: come già ricordato, egli elabora quindi una teoria della contrattazione che parte da un "economic environment", anziché dal solo dato (S, d) nello spazio delle utilità.

Un altro aspetto cui è facile non prestare l'attenzione dovuta[15], è valutare se davvero la classe dei problemi di contrattazione che è ragionevole considerare come "terreno" di applicazione degli assiomi coincida con la classe astratta che stiamo considerando. Ad esempio, se i problemi di contrattazione che ci interessano provengono da giochi finiti in forma strategica (nel modo che abbiamo visto, cioè mediante le strategie correlate), otterremo che i nostri insiemi di contrattazione S sono dei *poliedri* convessi e quindi non esauriscono tutta la classe degli insiemi che presuppone tradizionalmente la teoria (usualmente ci si riferisce a generici insiemi convessi: osservo come un cerchio od una ellisse siano insiemi convessi ma certo non poliedri). Il punto delicato è che, a priori,

[14] Per lo meno sulla base della mia esperienza di insegnamento agli aspiranti matematici, che sospetto abbiano uno specifico "bias" dovuto alla loro preparazione (e conseguente distorsione) professionale.

[15] Qui i matematici, almeno per (de)formazione professionale, dovrebbero cavarsela meglio.

non vi è alcuna garanzia che gli assiomi che caratterizzano una soluzione su una classe la caratterizzino ancora su una sottoclasse. Avremo occasione di vedere un esempio interessante in tal senso nel capitolo sui giochi cooperativi (pagina 206; vedi anche il Problema 48).

Altri esempi di assiomi "nascosti" sono i seguenti: perché ci si propone fin dall'inizio di determinare una *unica* soluzione per un problema di contrattazione? Dopotutto, un gioco in forma strategica ha tipicamente più di un equilibrio di Nash. Quindi, anche limitare a priori la ricerca di una soluzione ai "singleton" è un assioma! Il fatto di non averlo "battezzato" come tale può avere come effetto che non venga tenuto presente e di conseguenza non venga messo in discussione. Altra assunzione implicita, imparentata con questa è: non potremmo cercare come soluzione una "lotteria", anziché un esito deterministico? Cito anche il fatto che l'approccio di Nash (ma anche quello di Kalai e Smorodinski) trascura completamente gli aspetti procedurali del processo di contrattazione: se guardiamo a quello che vedremo fra poco, e cioè gli "ultimatum game" a più stadi, possiamo renderci conto di quanto possano pesare gli aspetti, per l'appunto, di tipo procedurale. Se teniamo presente anche quanto detto citando Roemer ed Yaari e Bar-Hillel, ci si può rendere conto come l'approccio assiomatico di Nash contenga anche molte assunzioni che potrebbero sfuggire ad una sua "lettura" non sufficientemente attenta.

Passando alla terza domanda, non nego che, in realtà, questa domanda è stata posta proprio perché esiste un modello di contrattazione che cerca di dare una risposta a questo problema e che merita di essere descritto.

Il modello che considereremo non può certamente essere considerato un approccio *descrittivo* alla contrattazione. Si tratta di una rappresentazione estremamente stilizzata, la quale necessita di una quantità di dati sui giocatori molto piccola, ed al contempo offre un "output" interessante, in quanto fornisce una giustificazione "non cooperativa" alla soluzione di Nash.

Sto parlando del modello di contrattazione di Rubinstein (1982), detto anche modello delle offerte alternate. Vediamo come descrivere un problema di spartizione, seguendo questa strada. Anzi, ci occuperemo di nuovo della divisione dei 100 euro. Solo che, per comodità di esposizione e di trattazione del modello, farò alcune ipotesi strutturali leggermente diverse da quelle fatte prima.

L'idea di partenza è che uno dei due giocatori, diciamo il giocatore I, inizi facendo una proposta di divisione dei 100 euro. Domanda: come viene scelto il giocatore che inizia? Se vogliamo cercare di preservare la simmetria fra i ruoli dei due giocatori, almeno ex-ante, possiamo immaginare che la scelta avvenga mediante una estrazione a sorte, con pari probabilità. Ma non insisto su questo aspetto, perché alla fine avrà un ruolo sostanzialmente irrilevante.

Cosa avviene, dopo che il giocatore I ha fatto la sua offerta? Il giocatore

II deve dire se accetta oppure no. Se accetta, il gioco finisce qui e tra i due giocatori vengono spartiti i 100 euro come aveva proposto I. Se II non accetta, il modello di Rubinstein prevede che stia a lui fare una offerta di spartizione. Dopo di che, come ci si può immaginare, sarà I a dire se accetta oppure no. E così via.

Come si comprende, non si può escludere a priori che il gioco possa durare indefinitamente. Faremo quindi intervenire un "fattore di sconto[16]", anche per poter maneggiare più comodamente la situazione da un punto di vista formale. Tuttavia, prima di passare a studiare il gioco completo, conviene comprendere bene cosa avviene nel caso in cui siano previsti al massimo due turni di offerte. Anzi, cominceremo addirittura col caso in cui ci sia solo un giocatore a fare, ed una volta sola, una proposta di spartizione: vale la pena di vederlo, perché si tratta del cosiddetto "ultimatum game", detto così perché la proposta del giocatore I si configura in effetti come "ultimativa".

Assumiamo anche queste ulteriori caratteristiche della situazione: i 100 euro sul tavolo sono in biglietti da 10, e le proposte formulabili da parte di I sono quelle in cui egli indica quanti biglietti propone di prendersi (gli è consentito indicare da un minimo di 1 fino ad un massimo di 9). La forma estesa del gioco che otteniamo è descritta in figura 7.11.

Supponiamo che i due giocatori abbiano preferenze "lineari nella moneta", e che inoltre essi "guardino" solo alla somma di denaro che loro riceveranno dalla spartizione. In formule, se (x, y) è una spartizione, allora $u_I(x, y) = x$ e $u_{II}(x, y) = y$. Pertanto i "numeri" associati ai nodi terminali dell'albero di figura 7.11 rappresentano i payoff del gioco.

Dato che il gioco è ad informazione perfetta, possiamo utilizzare come soluzione l'equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi, che otteniamo facilmente mediante induzione a ritroso: la previsione che ne ricaviamo è che, in ogni nodo, la scelta ottimale per II è quella di accettare la proposta di I, che pertanto allora farà l'offerta $(90, 10)$. Il risultato che ci attendiamo[17] è quindi la spartizione $(90, 10)$.

Cosa avviene se aggiungiamo un secondo stadio? Abbiamo la figura 7.12,

[16]Cioè, assumiamo che l'utilità che un giocatore ottiene da una somma di denaro "domani" è pari all'utilità che ottiene dall'avere una identica somma "oggi", moltiplicata per un opportuno fattore, detto appunto "fattore di sconto". Il valore di questo fattore dipende dalle preferenze dell'individuo, ma anche, ovviamente, dall'intervallo di tempo che intercorre fra "oggi" e "domani".

[17]Contraddetti praticamente da ogni esperimento fatto per questo gioco: è esperienza diffusa il fatto che II rifiuti (sdegnosamente!) la proposta di spartizione $(90, 10)$, se proposta. Ma si noti che abbiamo fatto una ipotesi molto drastica e poco realistica sulle preferenze dei giocatori. Il mio obiettivo non è quello di analizzare di per sé l'ultimatum game, che qui ha solo un ruolo strumentale all'introduzione del gioco di Rubinstein. Volendo effettivamente restringersi al solo ultimatum game, dovremmo quanto meno cercare di utilizzare delle funzioni di utilità più appropriate.

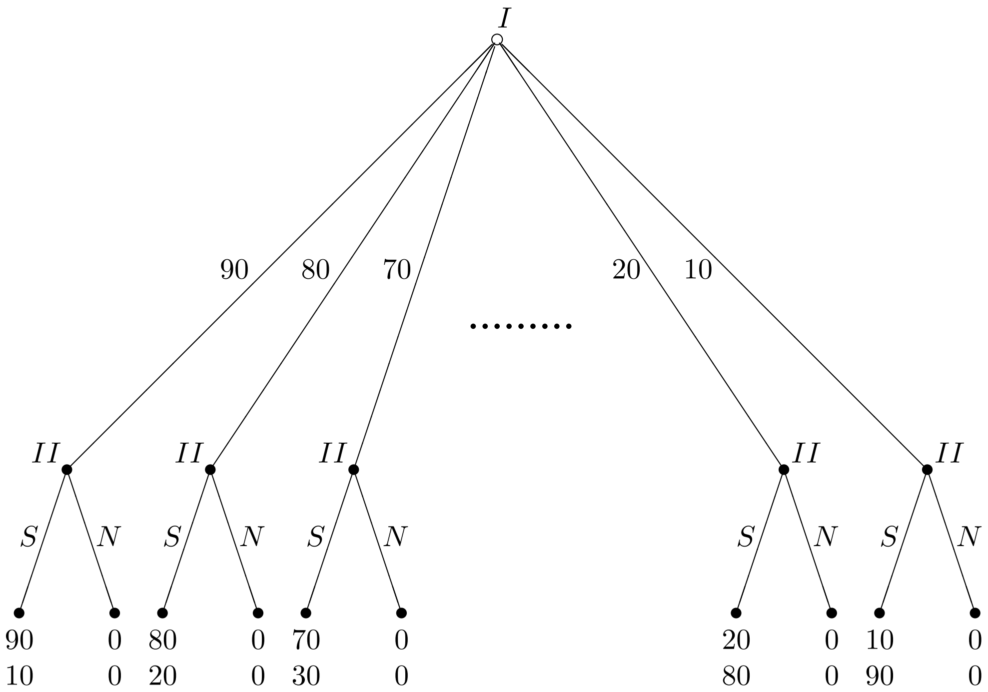


Figura 7.11: L'ultimatum game

con le proposte di spartizione risultanti nelle varie circostanze. Se continuiamo ad utilizzare le stesse funzioni di utilità, l'equilibrio perfetto nei sottogiochi questa volta darà come risultato $(10, 90)$ (come si può agevolmente constatare, individuando in ogni nodo le scelte ottimali dei giocatori, dato quello che avverrà nel seguito). Come si vede, si ha un completo "ribaltamento" della situazione rispetto al caso in cui c'era un solo turno. Come mai? Certo una ragione sta nel fatto che II non ha alcuna "impazienza" e, visto che il secondo turno è per lui favorevole, ha tutto l'interesse a dire sempre no ad ogni offerta di I, in modo da poter fare lui la proposta. Osservo incidentalmente come questo gioco abbia un altro equilibrio perfetto nei sottogiochi: esso prevede che II accetti l'offerta $(10, 90)$ al primo turno. Ritorneremo su questo, perché il fatto che vi sia un equilibrio il quale prevede che il gioco finisca al primo turno è interessante.

Se introduciamo l'impazienza[18] dei giocatori, cosa cambia? Lo vediamo subito. Per rendere più evidente il fenomeno, userò un fattore di sconto particolarmente piccolo[19]. Suppongo che il fattore di sconto per il giocatore II sia

[18]Non come aspetto caratteriale, ma come caratteristica delle loro preferenze intertemporali!

[19]Ma si noti che nulla è stato detto sulla durata del tempo che intercorre tra il primo ed

uguale a 3/10. Per cui 10 euro al secondo stadio sono equivalenti a 3 euro al primo stadio. Per rendere più leggibile la figura, indico i payoff già "scontati", nel senso che li riferisco tutti ad una stessa data (appena esperito il primo turno). Del fattore di sconto di I non mi interesso (diciamo che lo assumo pari ad 1, cioè assumo che per I non faccia alcuna differenza quando riceve gli euro), sia perché nell'ultimatum game a due stadi il fattore di sconto di I è irrilevante, sia per evitare di assumere che il fattore di sconto sia uguale per entrambi i giocatori, togliendomi così un importante grado di libertà che avrà un certo interesse quando passeremo a considerare il modello di Rubinstein.

Nella figura 7.13 ho individuato, per induzione a ritroso, le scelte ottimali dei giocatori e ho indicato con delle frecce. Seguendole, si trova che il risultato finale è la spartizione $(70, 30)$, visto che II accetterà questa offerta, non essendo in grado di ottenere di meglio col passaggio al secondo turno.

Noto come in questo caso vi sia un unico equilibrio perfetto nei sottogiochi, che prevede che il gioco termini al primo stadio. Questa è una caratteristica generale di questi problemi: può capitare (come nell'esempio precedente senza tasso di sconto) che vi siano anche equilibri i quali prevedono che il gioco finisca dopo due turni, ma in tal caso vi sarà sempre un equilibrio che prevede anche un solo stadio. Sembra non esservi quindi, in questi modelli, ragione per dilazionare il raggiungimento di un accordo, contrariamente a quello che si osserva spesso in concreti processi di contrattazione. Si osservi, però, che qui ci stiamo muovendo in un contesto di informazione *completa* e quindi non vi sono ragioni per cui attendere possa essere utile: non vi sono segnali da mandare o da ricevere, non vi sono neppure elementi di incertezza che vengono "risolti" nello svolgersi dell'interazione.

Continuerò il processo di "avvicinamento" al modello di Rubinstein tramite un paio di estensioni del modello che abbiamo appena visto: permetterò di fare delle "spartizioni" meno grossolane ed aumenterò il numero di turni.

Per la prima estensione, cosa cambia se ammettiamo tutte le spartizioni "fino all'euro", ovvero tutte quelle da $(99, 1)$ fino a $(1, 99)$? Ben poco. L'equilibrio perfetto nei sottogiochi prevede, come risultato, di nuovo la spartizione $(70, 30)$ (infatti II potrà ottenere 99 al secondo turno, che per lui equivalgono a 29.7 euro al primo, quindi accetta la proposta $(70, 30)$ da parte di I). Non cambia il risultato se passiamo ai centesimi di euro, o se accettiamo spartizioni ancora più fini.

Come regola generale ci possiamo aspettare quindi che il risultato sia approssimativamente $((1 - \delta_{II}) \cdot 100, \delta_{II} \cdot 100)$, dove δ_{II} rappresenta il fattore di sconto per II. La ragione è semplice: al secondo stadio II può ottenere 100 (o, meglio, un guadagno tanto vicino a 100 quanto glielo consente la "granularità" delle spartizioni ammesse) e quindi accetterà una proposta che gli dia,

---

il secondo stadio, per cui non è detto che si tratti di un fattore di sconto così irrealistico.

al primo stadio, la somma $100 \cdot \delta_{II}$ che per lui è equivalente ad ottenere 100 al secondo turno. Visto che proposte peggiori verranno respinte da II, per I è ottimale allora proporre una spartizione che gli dia $(1-\delta_{II}) \cdot 100$. Come detto, i risultati saranno approssimativamente questi (quanto siano vicini dipende, appunto, dalla granularità usata).

Cosa succede se abbiamo un terzo turno? Dovrebbe essere facile immaginare che questa volta sarà I ad avere il vantaggio dell'ultima mossa e si accaparrerà tutta la somma[20] al terzo turno. Quindi I accetterà al secondo turno una somma pari a $100 \cdot \delta_I$, e quindi II otterrà $100 \cdot (1 - \delta_I)$ al secondo turno. Che per lui è equivalente a $100 \cdot (1 - \delta_I)\delta_{II}$ al primo turno. Morale, ci aspettiamo la divisione $(100 - 100 \cdot (1 - \delta_I) \cdot \delta_{II}, 100 \cdot (1 - \delta_I)\delta_{II})$.

Possiamo continuare, introducendo un quarto turno, e così via. Cosa avviene se continuiamo ad allungare la durata di queste offerte e contro-offerte? Per vederlo, semplifichiamoci un poco la vita, supponendo che la somma da dividere sia pari ad 1 euro. Generalizzando i calcoli fatti, qualora l'ultimo turno di offerta spetti a II[21], ciò che egli ottiene è una somma di termini di questo tipo:

$$(\delta_I - \delta_I\delta_{II}) + (\delta_I - \delta_I\delta_{II})\delta_I\delta_{II} + \ldots + (\delta_I - \delta_I\delta_{II})\delta_I^n\delta_{II}^n$$

Si intende che la somma è quanto otterrà II al primo turno.

Usando le regole delle progressioni geometriche (vedi pagina 94), possiamo riscrivere la somma precedente così:

$$(\delta_I - \delta_I\delta_{II})\frac{1 - \delta_I^{n+1}\delta_{II}^{n+1}}{1 - \delta_I\delta_{II}}$$

Se n è molto grande, e se δ_I, δ_{II} sono minori strettamente di 1, la quantità $\delta_I^{n+1}\delta_{II}^{n+1}$ è trascurabile, pertanto il payoff per II è approssimativamente uguale a:

$$\frac{\delta_I - \delta_I\delta_{II}}{1 - \delta_I\delta_{II}}$$

Se consideriamo il caso particolare $\delta_I = \delta_{II} = \delta$, otteniamo (sempre per II):

$$\frac{\delta - \delta^2}{1 - \delta^2} = \frac{\delta}{1 + \delta}$$

Se δ non si discosta molto[22] da 1, ciò che ottiene II è circa $1/2$ (e naturalmente

[20] Sempre "modulo" l'approssimazione che stiamo usando.

[21] Nel caso in cui l'ultimo a fare la proposta di spartizione sia I, i calcoli sono naturalmente del tutto simili. Ancora una volta i risultati non saranno esattamente identici a quelli che indico, ma vi si avvicineranno a piacimento, pur di rendere sempre più fini le possibilità di spartizione.

[22] Occorre fare attenzione ad un aspetto: se δ è vicino ad 1, occorrerà che n sia molto grande, per giustificare il fatto che abbiamo trascurato $\delta_I^{n+1}\delta_{II}^{n+1}$.

anche ciò che ottiene I, cioè $\frac{1}{1+\delta}$, è prossimo ad $1/2$). Quindi il vantaggio di essere l'ultimo a fare l'offerta di spartizione si attenua considerevolmente.

Siamo a questo punto arrivati alle soglie del modello di Rubinstein: si tratta solo di passare ad un gioco di durata infinita. Che vantaggio abbiamo nel farlo? Essenzialmente che i risultati non saranno più approssimati (vedasi prima quando abbiamo detto che per n abbastanza grande $\delta_I^{n+1}\delta_{II}^{n+1}$ è trascurabile), ma diventeranno esatti (se per di più abbandoneremo ogni residua "granularità" nelle spartizioni possibili). Lascio a testi specialistici (in primis, Osborne e Rubinstein (1994), ma si può consultare utilmente anche Binmore (1992), cui mi sono largamente ispirato in questa presentazione) la precisazione dei dettagli tecnici su cui si fonda questo risultato. A me basta essere riuscito (spero!) a rendere plausibile il fatto che ci dovremmo aspettare una spartizione del tipo:

$$(\frac{\delta_I - \delta_I\delta_{II}}{1-\delta_I\delta_{II}}, \frac{1-\delta_{II}}{1-\delta_I\delta_{II}})$$

Sottolineo un aspetto. Questi sono i payoff (cioè delle spartizioni) che I e II ottengono se giocano strategie perfette nei sottogiochi. Non ho descritto esaurientemente invece le strategie (tranne che nel caso ad uno o due stadi: vedasi ad esempio la figura 7.13), perché mi interessavano soprattutto questi, in quanto direttamente confrontabili con la previsione del modello di Nash. Per quanto riguarda gli equilibri di Nash, mi limito ad osservare (ma senza alcun tentativo di provare questo fatto) che, come è prevedibile, ve ne sono molti di più. Non solo, ma in realtà ogni spartizione può essere ottenuta come payoff di un equilibrio di Nash: ritroviamo anche in questo contesto lo scarso potere predittivo dell'equilibrio di Nash, analogamente a quanto visto nei giochi ripetuti.

Come possiamo collegare il risultato di questo modello non cooperativo di contrattazione, molto stilizzato, col modello di Nash?

Se teniamo conto delle ipotesi fatte, in particolare delle assunzioni che entrambi i giocatori sono indifferenti al rischio, la predizione del modello di Nash è che la spartizione dia luogo a un risultato simmetrico. Nel modello di Rubinstein, anche se supponiamo $\delta_I = \delta_{II} = \delta$, otteniamo un risultato che è vicino a $(1/2, 1/2)$, ma non coincide con esso. Già questa approssimazione è comunque un risultato interessante (noto che la situazione dei due giocatori non è simmetrica, visto che "la prima mossa" tocca al giocatore I). Possiamo ottenere, comunque, un risultato completamente simmetrico, se eliminiamo un ulteriore elemento di granularità presente nel modello: possiamo in effetti "accorciare" l'intervallo di tempo Δt che intercorre tra gli stadi della contrattazione. Se immaginiamo che questo intervallo di tempo diventi sempre più piccolo (al limite, che tenda a zero), allora otteniamo esattamente il risultato previsto dal modello di Nash.

Osservo ancora due cose: questo risultato può essere ampiamente generalizzato, in particolare in due direzioni interessanti. Una è che possiamo considerare come funzioni di utilità dei giocatori una qualsiasi coppia di funzioni concave: l'assunzione di indifferenza al rischio l'ho fatta per avere delle funzioni più semplici da trattare, ma non è essenziale per la derivazione del risultato.

L'altra generalizzazione è che il fattore di sconto non solo non deve essere uguale per i due giocatori affinché il modello "funzioni", ma anzi ha un riflesso importante sulle soluzioni, direttamente leggibile in termini di "forza contrattuale". In effetti, il modello di Rubinstein non "giustifica" solo il modello classico di Nash, ma anche le cosiddette soluzioni asimmetriche (una soluzione asimmetrica è ottenuta massimizzando $(u_I - d_I)^\alpha \cdot (u_{II} - d_{II})^\beta$, anziché il classico "prodotto di Nash"). Ebbene, il modello di Rubinstein permette di dare una interpretazione ad α e β, collegandoli al fatto che i giocatori hanno un fattore di sconto diverso. Come ci si può aspettare, il giocatore più impaziente sarà quello con minore potere contrattuale.

Questa presentazione del modello di Rubinstein chiude il capitolo dedicato alla contrattazione. Si tratta di un "pezzo" importante della TdG: per rendersene conto, si può notare come molte interazioni strategiche passano tipicamente attraverso rapporti intercorrenti fra *coppie* di giocatori (anche quando i giocatori coinvolti sono più di due). Un riferimento significativo è, a questo proposito, il libro di Harsanyi (1977) centrato sulla contrattazione e nel quale si possono trovare interessanti legami fra il modello di Nash e precedenti approcci (Zeuthen, in particolare). Merita di essere citato, naturalmente, anche il libro di Osborne e Rubinstein (1990) interamente dedicato alla contrattazione.

Il modello di Rubinstein offre, pur nella stilizzazione estrema del processo di contrattazione, un esempio di realizzazione (parziale) di ciò che in TdG è noto come "programma di Nash". L'idea è molto semplice da esprimere: si tratta di mostrare come, da un processo di interazione strategica in un contesto non cooperativo, gli equilibri che si determinano corrispondano di fatto a soluzioni individuate in un contesto cooperativo[23].

Vi sono due rilevanti ragioni di interesse nel tentativo di trovare una fondazione non cooperativa a concetti di soluzione[24] "cooperativi". Una è di carattere interno alla TdG: si tratta di ottenere un "plus" significativo sul fronte della coerenza interna della disciplina (come abbiamo visto nel tentati-

[23]Noto l'analogia con la problematica della "fondazione microeconomica della macroeconomia", od anche della modellizzazione su base microscopica dei processi termodinamici macroscopici.

[24]Quindi, facendo ad esempio riferimento a quanto vedremo nel prossimo capitolo, sarebbe interessante individuare processi di interazione tra i giocatori il cui equilibrio corrisponda al valore Shapley.

vo di passare da un gioco in forma strategica a un problema di contrattazione ad esso associato, questa coerenza è ben lontana dal potersi considerare ovvia). Un'altra ragione ha a che fare con la ricerca della game form "giusta" (o le game form), nel senso che per l'appunto conduca ad una ben determinata soluzione cooperativa. L'interesse di questo secondo motivo è notevole, se teniamo conto del fatto che la game form può essere conseguenza di uno specifico "quadro istituzionale": ciò significa che possiamo capire quali "setting" offrano maggiore stabilità a tipi di soluzione che per altri motivi (equità? efficienza?) riteniamo meritevoli di essere adottati.

Osservo infine come la teoria della contrattazione si trovi ad essere alla frontiera della TdG: basti pensare ai punti di contatto con la teoria della negoziazione (si veda, per esempio, Raiffa (1982)), la quale si distingue da ciò che abbiamo visto in questo capitolo per un maggiore eclettismo negli strumenti utilizzati. Cosa che non dovrebbe sorprendere, viste le difficoltà ricordate all'inizio del capitolo per la formalizzazione di un effettivo processo di contrattazione.

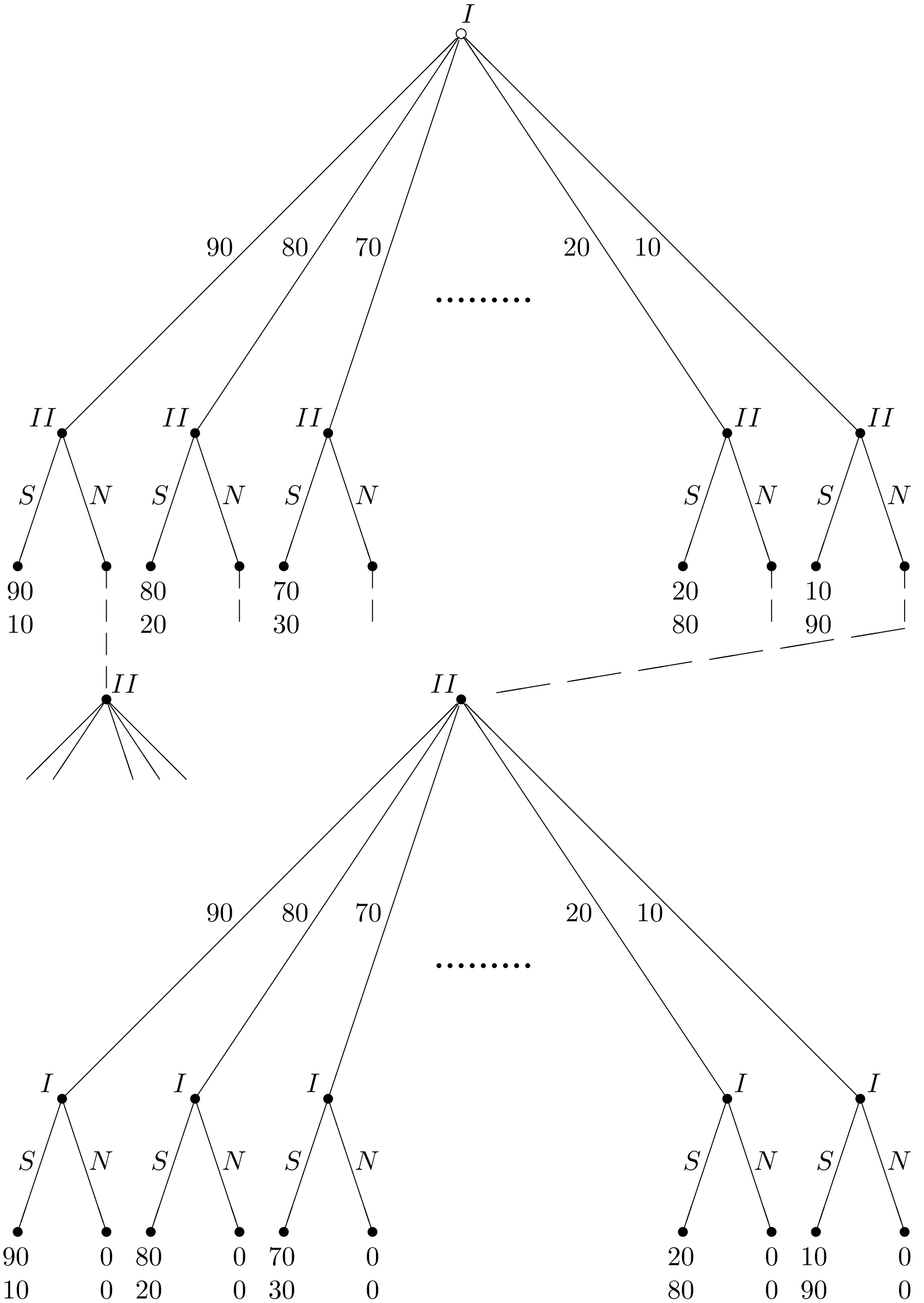


Figura 7.12: L'ultimatum game a due stadi

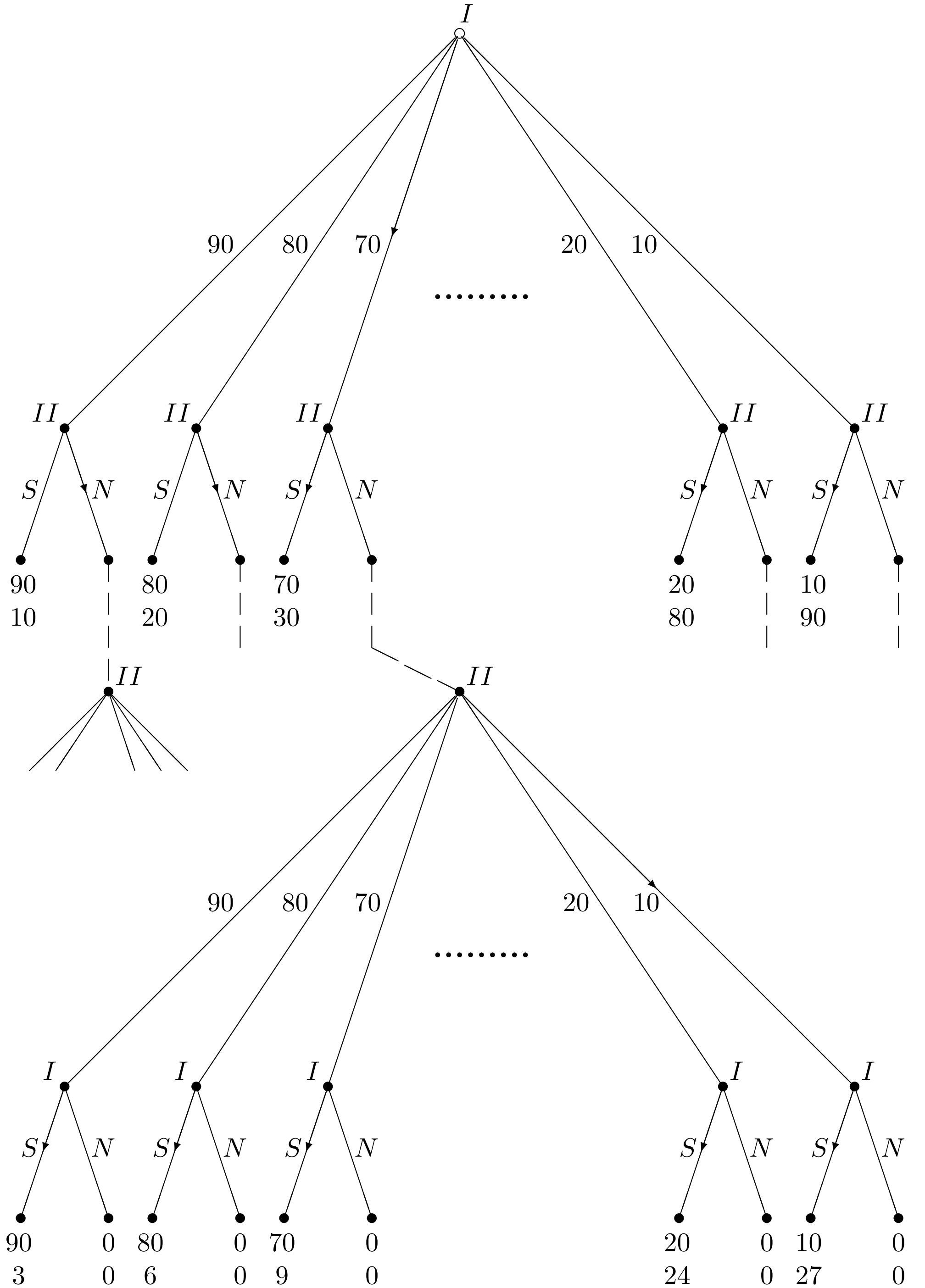


Figura 7.13: L'ultimatum game a due stadi, con fattore di sconto

Capitolo 8

Giochi cooperativi

Abbiamo introdotto, nel capitolo dedicato alla contrattazione, il punto di vista "cooperativo", ovverossia abbiamo cercato di analizzare cosa possa succedere qualora i giocatori possano sottoscrivere accordi vincolanti. Vedremo in questo capitolo cosa si possa fare in un contesto "cooperativo" quando il numero di giocatori coinvolti sia superiore a due.

Una prima idea potrebbe essere quella di estendere quanto si è visto nel caso di due giocatori al caso di n, con pochi opportuni adattamenti. Ciò lo si può fare, ed è stato fatto (c'è una soluzione dei problemi di contrattazione ad n giocatori che è una immediata estensione di quella di Nash: basta massimizzare l'analogo del "prodotto di Nash", visto a pagina 153, con n fattori anziché solo due). Il passaggio da due ad n giocatori introduce tuttavia un elemento del tutto nuovo, che non può essere ignorato, anche se è fonte di straordinarie difficoltà. Potrebbe infatti benissimo avvenire che accordi vincolanti siano stretti da un gruppo di giocatori che non necessariamente esaurisce tutti gli n giocatori coinvolti. Si pensi al caso in cui uno dei giocatori possiede una casa ed intende venderla, mentre gli altri due sono potenziali acquirenti. Ci aspettiamo che il risultato finale sia un accordo a due, non certo a tre (anche se non escludiamo che ciò possa avvenire, è sicuramente un evento raro in questo tipo di situazioni).

Come possiamo allora arricchire il modello, tenendo conto delle potenzialità esprimibili dai gruppi intermedi di giocatori? Se volessimo seguire la strada utilizzata per i problemi di contrattazione, la descrizione dell'insieme degli accordi possibili per ogni gruppo di giocatori ci condurrebbe in modo naturale a considerare quelli che in TdG sono detti giochi cooperativi ad utilità non trasferibile (NTU-games). Il livello di tecnicismo che questi giochi richiedono mi spinge però a non affrontare la trattazione degli NTU-games, ma a restringermi al caso molto più semplice dei cosiddetti giochi "a utilità trasferibile" (TU-games). Non è una scelta indolore: restano tagliati fuori dall'analisi i cosiddetti "market games" (per lo meno, nella loro versione standard), che tanto rilievo hanno avuto, all'interno della TdG ed anche nella teoria economica, negli anni '60: dirò qualcosa a questo proposito nel capitolo conclusivo.

I termini utilizzati (utilità trasferibile/non trasferibile) possono sconcertare, visto il tipo di presupposti che abbiamo usato finora. In particolare, le funzioni di utilità dei giocatori le abbiamo viste come meri strumenti tecnici per rappresentare in modo conveniente le loro preferenze. Pur se restringiamo l'attenzione alle funzioni di utilità di vNM, si ha che la funzione di utilità di un giocatore è solo determinata a meno di trasformazioni affini strettamente crescenti[1], e quindi non si capisce bene come questo "oggetto" possa essere "trasferito" da un giocatore all'altro. In effetti, questo tipo di problema non si pone per gli NTU-games, che non fanno alcuna ipotesi di trasferibilità.

Per fortuna, non si tratta di prendere così alla lettera la terminologia in uso. Quando si parla di utilità trasferibile si intende che esista un certo tipo di bene (esempio classico: il denaro) che gode di due proprietà:

- può essere trasferito da un giocatore ad un altro in una quantità a piacere

- è possibile fissare una scala comune a tutti i giocatori per misurare l'utilità di questo bene, nel senso che *ogni* giocatore attribuisce un identica variazione di utilità per una variazione unitaria nella disponibilità di questo bene.

Quando si parla di TU-game, si assume anche che questo bene cui è associata un'unica scala di utilità sia perfettamente divisibile (questa è una ipotesi puramente di comodo: ci si evita di lavorare nel "discreto"). La possibilità di effettuare trasferimenti di questo bene viene identificata come possibilità di avere "pagamenti laterali" (side payments). Quando si assume la possibilità di pagamenti laterali si ammette normalmente anche che i giocatori abbiano la facoltà di buttare via, se necessario, una quantità arbitraria di quel bene che viene misurato su un'unica scala. Va da sé che la idea di "utilità trasferibile" e quella di "possibilità di effettuare pagamenti laterali" sono due connotazioni diverse, ma va detto che nella pratica corrente i termini "giochi a utilità trasferibile" e "giochi a pagamenti laterali" sono usati (pur se scorrettamente) in modo del tutto intercambiabile[2]. Volendo soffermarci sulla terminologia standard in uso, ricordo che è utilizzato il termine "gioco in forma caratteristica" per indicare che ci si riferisce ad un gioco cooperativo per il quale venga indicato, per ogni coalizione S, ciò che questa coalizione riesce ad ottenere. Il

[1]Noto che le funzioni di utilità "ordinali", usate per le decisioni in condizioni di certezza, ammettono una gamma ancora più ampia di trasformazioni, pur continuando a rappresentare le stesse preferenze.

[2]La ragione è dovuta al fatto che spesso si assumono entrambe le ipotesi, sia la trasferibilità dell'utilità che la possibilità di effettuare pagamenti laterali

termine indica la terza delle forme fondamentali usate per descrivere i giochi (oltre alla forma estesa ed alla forma strategica) e si applica tanto ai giochi ad utilità trasferibile che a quelli ad utilità non trasferibile. Il termine "giochi in forma caratteristica" e stato introdotto da von Neumann e Morgenstern; vi è un termine sinonimo, "giochi in forma di coalizione", che è stato introdotto più recentemente, e la cui utilizzazione è incoraggiata da Aumann[3].

Io userò il termine "TU-games", assumendo di avere a che fare con giochi che sono sia ad utilità trasferibile che a pagamenti laterali.

Come è evidente, il modello dei TU-games realizza una drastica semplificazione, a livello della descrizione delle preferenze dei giocatori: come ci si può aspettare, questa semplificazione offre in cambio dei vantaggi, nel senso che con i TU-games si possono analizzare situazioni interessanti, fornendo delle risposte significative pur se magari un poco più "rozze", avendo la necessità di ricorrere a una quantità di dati relativamente piccola.

Certo l'ipotesi di "utilità trasferibile" è una ipotesi impegnativa, soprattutto nel senso di ammettere l'esistenza di una scala comune di valutazione: questa scala può essere data direttamente dai guadagni monetari, laddove essi esistano. Va detto a questo proposito che proprio questo è il caso più diffuso in cui si utilizzano i TU-games. Le altre ipotesi ancillari sono molto meno pesanti, ma dopo averle presentate le vorrei descrivere, facendo riferimento ad un esempio.

Passiamo allora ad analizzare, con ricchezza di dettagli, un esempio. Si consideri il gioco in forma strategica a due giocatori indicato nella tabella 8.1: utilizzando le strategie correlate, la coalizione $\{I, II\}$, costituita dai giocatori I e II, è in grado di realizzare tutti (e soli!) i payoff attesi indicati nella figura 8.1 (costruita in modo analogo a quella di figura 7.7). Per il disegno di questa figura non c'è bisogno di alcuna ipotesi di "trasferibilità" dell'utilità, né di "pagamenti laterali".

$I \backslash II$	L	R
T	$(2, 6)$	$(1, 0)$
B	$(3, 2)$	$(2, 0)$

Tabella 8.1: Un gioco in forma strategica

Naturalmente, altre figure possono ben rappresentare la stessa situazione. Ad esempio, la figura 8.2, per ottenere la quale non ho fatto altro che effet-

[3]Chissà se il tentativo di scalzare il termine tradizionale per sostituirlo con uno più "espressivo" avrà successo... D'altro canto, sarebbe più importante riuscire a cambiare il nome, molto fuorviante, della disciplina! Io non penso che capiterà.

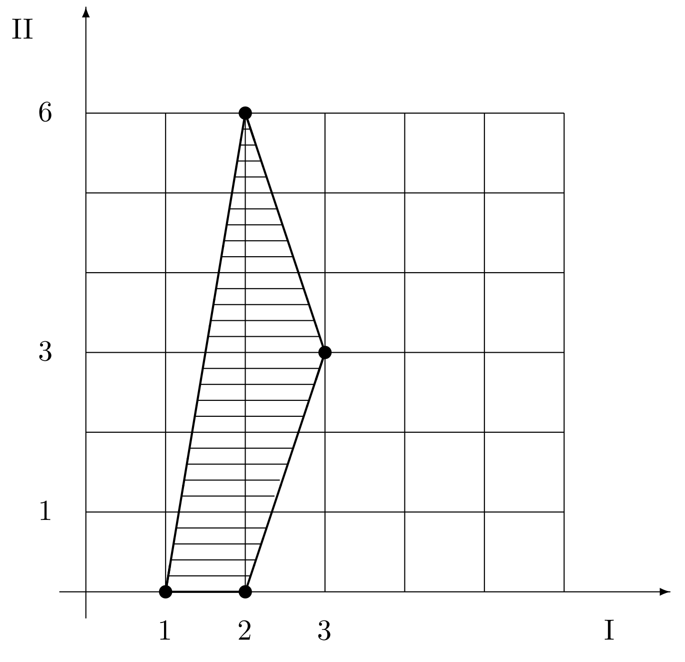


Figura 8.1: I payoffs del gioco di tabella 8.1

tuare un cambiamento di scala nella scelta delle utilità. Più precisamente, per il giocatore I ho "spostato lo zero" (cioè, ho sottratto 1 ai valori della sua funzione di utilità) ed ho poi moltiplicato per 2 i valori ottenuti, mentre per il secondo ho fatto un cambiamento di scala, moltiplicando per 2/3 i valori della sua funzione di utilità. Un trucchetto simile l'avevo usato in un test su problemi di contrattazione, per "nascondere" il fatto che il gioco di partenza era il dilemma del prigioniero. Mi ricordo che pochi avevano sfruttato l'ipotesi di covarianza per semplificare il problema riducendo la figura a quella classica, *simmetrica*, per la quale la soluzione di Nash del problema di contrattazione è immediata ed, in particolare, non richiede alcun calcolo.

Tornando al gioco della tabella 8.1, se ipotizziamo che i numeri presenti in tabella siano guadagni monetari (espressi in euro, ad esempio) per i due giocatori, e che abbia senso misurare la utilità per *entrambi* i giocatori sulla stessa scala di quella per indicare i guadagni monetari, allora la figura 8.2 non è più accettabile.

La ipotesi di "trasferibilità" della utilità (che va ad aggiungersi all'esistenza di una comune scala di valutazione) fa sì che sia ottenibile anche una distribuzione del payoff $(2, 6)$ del tipo $(4, 4)$, ed in generale ogni altra distribuzione che sia sulla retta di equazione $x + y = 8$. Più in generale, ogni payoff otte-

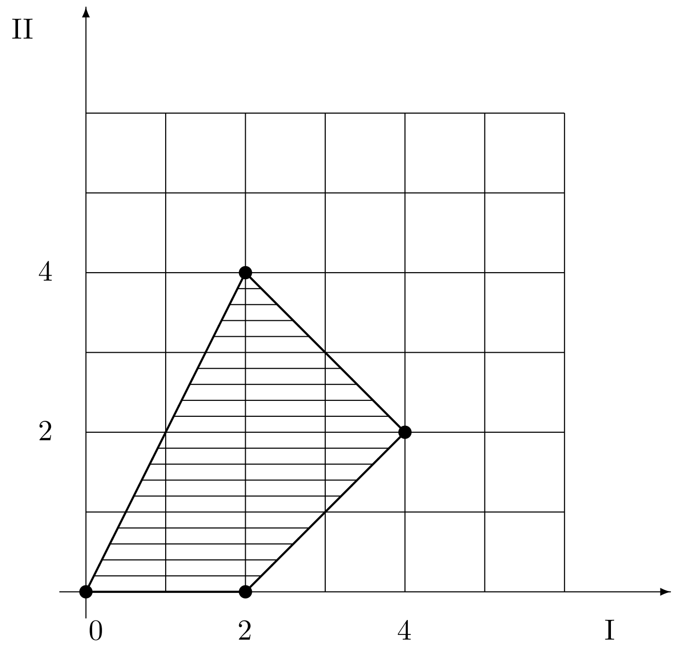


Figura 8.2: Ancora un gioco cooperativo derivato dal gioco in forma strategica della tabella 8.1

nibile dai giocatori può essere tra loro spartito nel modo che meglio credono. Otteniamo allora la figura 8.3 (se ammettessimo anche che un giocatore dia "del suo" all'altro, otterremmo tutta la striscia infinita disposta a 45 gradi individuata dalla zona tratteggiata).

Infine, abbiamo ammesso anche che parte del "denaro" guadagnato possa essere buttato via, ed anzi che i giocatori possano distruggere quantità arbitrariamente grandi di denaro (eventualmente "preso a prestito", quindi potendosi indebitare oltre ogni limite): ciò ci permette di considerare ogni punto del semipiano tratteggiato in figura 8.4 (l'ultima!) come un possibile esito per i due giocatori.

E' chiaro che questa assunzione di "potersi sbarazzare di qualunque cosa" è una ipotesi di comodo che ci permette di semplificare il modello: grazie anche a quest'ultima condizione, l'unico dato di cui abbiamo bisogno per descrivere tutte le possibili spartizioni tra i due giocatori è il numero 8, che rappresenta il massimo della *somma* dei guadagni che i giocatori I e II possono ottenere complessivamente dal gioco. Non ci serve null'altro.

Ebbene, un TU-game non è altro che le generalizzazione di questo tipo di considerazioni al caso di un gruppo qualsiasi di giocatori. In termini

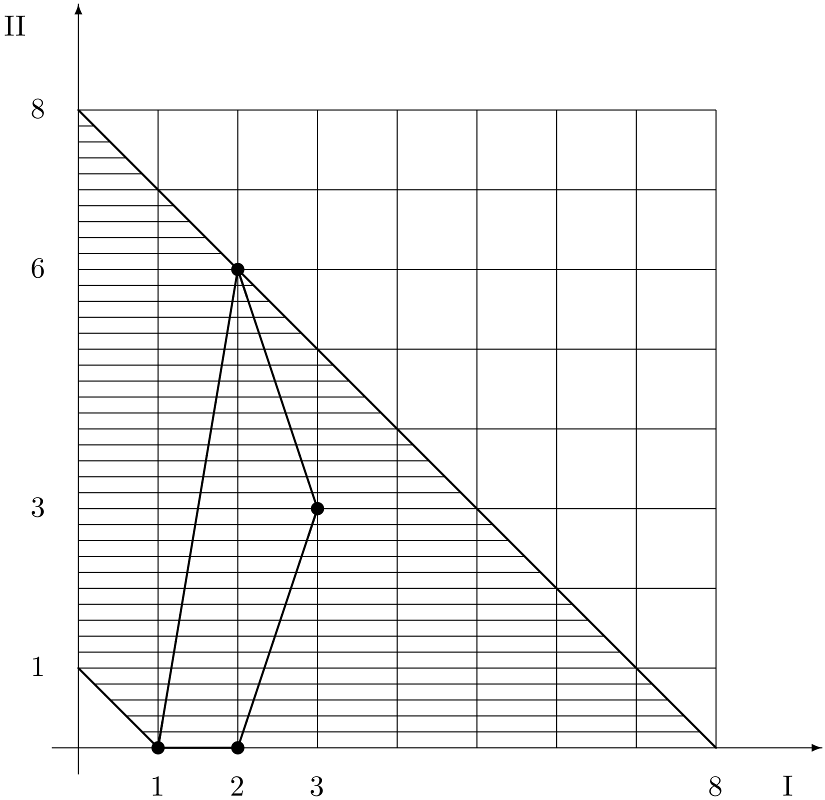


Figura 8.3: I payoffs del gioco di tabella 8.1, quando siano ammessi "pagamenti laterali"

matematico-formali, quindi, un TU-game è rappresentato da una funzione che ad ogni insieme S di giocatori assegna semplicemente un numero. L'interpretazione di questo numero è tipicamente quella del guadagno che la "coalizione" S riesce a garantirsi, indipendentemente da quello che possono fare i rimanenti giocatori. Occorre fare attenzione al fatto che questo tipo di interpretazione è molto meno neutra di quanto possa apparire: il termine "garantirsi" indica in realtà una delle possibili interpretazioni (la più diffusa, se si vuole); anche l'idea di "indipendentemente da" non è scontata ed anzi costituisce una delle difficoltà maggiori se si vuole passare da un gioco in forma strategica al corrispondente TU-game.

Basta considerare il gioco (a soli due giocatori) di tabella 8.2.

Questo gioco ha un unico equilibrio di Nash in strategie pure, che è (T, L), e che dà un payoff pari ad 1 a ciascun giocatore (ottimo risultato, il meglio cui possa aspirare ciascuno dei due).

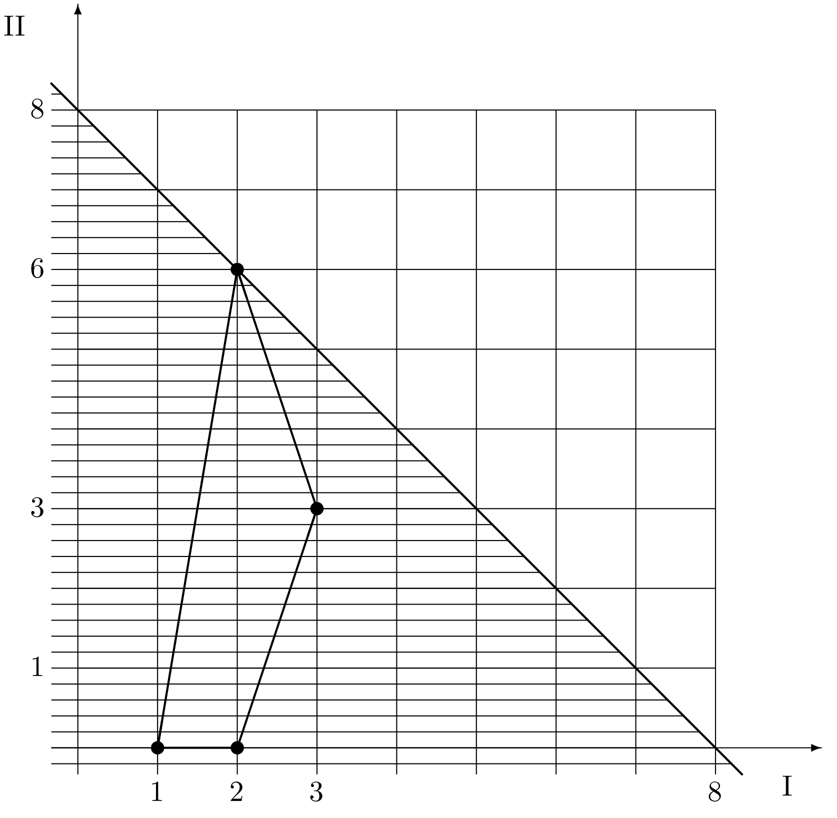


Figura 8.4: I payoffs del gioco di tabella 8.1, quando siano ammessi "pagamenti laterali" e si assuma l'ipotesi di "libera disponibilità"

Ma se insistiamo sul termine "garantirsi", il quale si rifà all'approccio classico di von Neumann e Morgenstern, intendiamo riferirci al payoff che un giocatore è in grado di ottenere "qualunque cosa facciano gli altri" (in questo caso, gli altri sono solo l'altro giocatore). Tale payoff è il *max min* e corrisponde alla scelta, da parte del giocatore I, della strategia M che gli garantisce un payoff pari a -1, qualunque cosa faccia l'altro (il discorso si applica in modo identico a II, visto che il gioco è simmetrico, e lo porta a scegliere C). A dire il vero, quando si parla di *max min* di solito si fa riferimento, quasi d'obbligo, all'estensione mista del gioco, per la buona ragione che con l'uso di strategie miste un giocatore può in genere riuscire a garantirsi un payoff (atteso, naturalmente) più alto che non con l'uso delle sole strategie miste. Vorrei però evitare questi calcoli, che possono nascondere dietro dettagli "cal-

$I \setminus II$	L	C	R	min delle righe per I ↓	
T	$(1,1)$	$(1,0)$	$(-2,-1)$	-2	
M	$(0,1)$	$(0,0)$	$(-1,0)$	-1	← max dei min sulle righe
B	$(-1,-2)$	$(0,-1)$	$(-3,-3)$	-3	
min delle colonne per II →	-2	-1	-3		
		↑ max dei min sulle colonne			

Tabella 8.2: Un gioco in forma strategica con indicazione delle strategie di *max min*

colistici" il messaggio essenziale[4]: l'uso del *max min* per individuare il payoff di una coalizione è *molto* discutibile.

Vorrei insistere sul fatto che porre l'accento sull'idea di "garantirsi" il payoff è veramente una scelta che si presta a forti obiezioni. Nell'esempio, la scelta "garantista" del giocatore I a favore di M è di fatto determinata dalla colonna che si trova sotto la strategia R di II, strategia che però è dominata da L e quindi non dovrebbe essere utilizzata da II.

Quindi, l'uso del termine "garantirsi" può risultare quanto mai inappropriato.

Non ci si deve tuttavia preoccupare più di tanto per le difficoltà esistenti a livello della "traduzione" da un gioco dato in forma strategica al "corrispondente" TU-game. Già lo avevamo visto per i problemi di contrattazione, e lo stesso vale per i TU-games: sono molti i casi in cui possiamo effettuare la traduzione diretta dalla situazione concreta in esame ad un TU-game, senza dover passare attraverso la "mediazione" della forma strategica. Si notino le forti implicazioni di questa affermazione: allo stesso tempo si nega la rilevanza "fondazionale" dell'approccio non cooperativo (mediante l'uso della forma strategica) e si ammette anche che la TdG non è in grado di stabilire un convincente ponte che permetta il passaggio dai giochi non cooperativi a quelli cooperativi.

Vediamo un esempio molto semplice di TU-game, in cui quanto appena affermato risulterà evidente. Abbiamo tre suonatori di diversi strumenti, che si esibiscono abitualmente in locali: il loro compenso, come singoli, è il seguente:

[4]Garantisco il lettore che si può fare un esempio analogo usando le strategie miste.

100 per I, 150 per II e 200 per III. Possono, volendo, anche mettersi sul mercato a coppie, nel qual caso riescono a "spuntare" i seguenti compensi: I e II assieme ricevono 400, I e III 300, II e III 400. Infine, anche il "trio" è apprezzato e il suo "cachet" complessivo è pari a 600. Come si vede, ci ritroviamo già belli pronti i "numeri" da assegnare ad ogni coalizione S. Visto che lo abbiamo a disposizione, approfitterò di questo esempio per illustrare alcuni concetti di base dei TU-games.

Osservo, per cominciare, che se noi adottassimo il punto di vista di trascurare quanto le coalizioni intermedie possono ottenere, avremmo che la soluzione generalizzata di Nash del problema di contrattazione porterebbe a suddividere equamente il "surplus" realizzato dalle cooperazione fra tutti e tre. Poiché il surplus è pari a $600 - (100 + 150 + 200) = 150$, ognuno otterrebbe un guadagno addizionale di 50 che si andrebbe ad aggiungere al suo "cachet" come "solista": il guadagno totale per i singoli sarebbe quindi: 150 per I, 200 per II e 250 per III. Si vede immediatamente, però, che la coalizione costituita da I e II sarebbe in grado di ottenere da sola un guadagno pari a 400 e quindi di più di quanto le verrebbe assegnato dalla soluzione di Nash generalizzata.

Cercheremo di affrontare queste "complicazioni". Per farlo introdurrò prima gli aspetti matematico-formali, per poter esprimere con la dovuta precisione (ed anche concisione) le considerazioni che faremo. Vorrei ribadire, comunque, che questo semplice esempio mostra come si possa ottenere direttamente un TU-game per descrivere una situazione di interazione strategica, *senza passare attraverso la forma strategica*. E' accettabile? La risposta è "no" se uno assume una posizione "integralista", che ha avuto credito fra gli economisti[5], ma che a me non sembra sostenibile, anche per quanto già visto e detto prima. Non c'è dubbio che il modo in cui abbiamo descritto gli elementi della situazione corrisponde ad una drastica semplificazione, in particolare degli aspetti strategici dell'agire dei tre musicanti. Potrebbe comunque accadere (e molte volte è così) che si possa comunque analizzare la situazione e fare previsioni significative senza bisogno di un'analisi troppo minuta. Se questo avviene, possiamo ritenere che abbiamo semplicemente scelto la strada di adottare un modello meno ricco di dettagli. D'altronde, in *ogni* modello della realtà è presente un trade-off fra il livello di dettagli e la maneggevolezza del modello. Se poi riusciamo ancora a fare considerazioni che siano riconducibili a ipotesi di razionalità ed intelligenza dei giocatori, possiamo dire che continuiamo a rimanere "dentro alla disciplina"[6].

Passiamo allora al formalismo. Un TU-game (cioè un gioco cooperativo a "utilità trasferibile", detto anche gioco cooperativo "a pagamenti laterali")

[5] Il fatto che il libro di Fudenberg e Tirole (1991) non lasciasse alcuno spazio ai giochi cooperativi è la testimonianza più chiara di questo punto di vista.

[6] Non che questa sia la mia ragione di vita! Semplicemente è scientificamente significativo il fatto che un dato paradigma abbia una ampia latitudine di applicabilità

in "forma caratteristica" è una coppia (N, v). Dove N è un insieme finito qualsiasi, i cui elementi rappresentano i *giocatori*. Tipicamente, quando non abbia importanza l'identificazione personale dei vari giocatori, assumerò che sia $N = \{1, 2, \dots, n\}$ (qui chiaramente n indica il numero dei giocatori). Il simbolo v denota la cosiddetta "funzione caratteristica" del gioco, la quale non è altro che una funzione che ad ogni sottoinsieme S di N associa un numero reale $v(S)$. Ovverossia, è $v : \mathcal{P}(N) \longrightarrow \mathbb{R}$, laddove il simbolo $\mathcal{P}(N)$ indica "l'insieme delle parti" di N, cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi di N. L'unica restrizione che imporremo sempre a v è che sia $v(\emptyset) = 0$ (il simbolo $\emptyset$ indica l'insieme vuoto; nel nostro caso intendiamo dire che il "guadagno" della "coalizione" vuota, cioè senza giocatori, è pari a zero: dovrebbe essere chiaro che si tratta semplicemente di una utile convenzione).

Avendo a disposizione un TU-game, ci possiamo porre la consueta domanda: quale è "la soluzione"? Anche qui, ed anzi in modo più accentuato rispetto ai giochi non cooperativi, non troviamo un'unica soluzione; d'altronde, la sintesi che da una situazione data ci conduce alla sua rappresentazione mediante un TU-game è tale per cui molti aspetti restano non descritti, il che lascia ampio spazio ad un approccio che abbiamo già incontrato: si cercherà di tenere conto dei "pezzi mancanti" a livello dei vari concetti di soluzione. Vorrei ripetere con altre parole quanto ho appena detto, perché è un punto importante: l'idea è che, avendo incorporato pochi dettagli nella descrizione della situazione, ci faremo guidare nel proporre diversi tipi di soluzione anche dall'esigenza di tenere conto di "dettagli omessi"[7]. Va da sé che queste considerazioni sono particolarmente importanti nel momento in cui uno cerca di applicare lo strumento dei TU-game.

Occupandomi "a tempo pieno" di TdG, devo dire che la quantità di proposte per soluzioni di TU-games, rese disponibili dalla letteratura "scientifica" è giunta ad un livello opprimente, caratteristico più delle fasi decadenti di una disciplina che non dei momenti di sviluppo. Non è del tutto chiaro, in particolare a me, se il bilancio sia in fondo positivo. Comunque, il gran numero di soluzioni disponibili è qualcosa con cui dobbiamo convivere (fintanto che non arrivi qualche idea rivoluzionaria, magari decretando la fine della TdG così come viene intesa finora). E' chiaro che non tutte le soluzioni proposte hanno lo stesso livello di significatività o di generalità. Mi accontenterò, allora, di analizzare le "soluzioni" per TU-game che hanno avuto maggior successo, fino ad ora, anche basandomi sul presupposto (un po' pericoloso...) che il successo avuto non sia casuale, ma dipenda dal fatto che sono basate su delle buone idee.

Per poter parlare di soluzioni in modo efficace, è opportuno introdurre un poco di ulteriore terminologia.

[7]Vedasi quanto si è fatto nel caso della soluzione di Nash al problema di contrattazione.

Dato un gioco (N, v), i sottoinsiemi di N saranno detti coalizioni. Una famiglia di numeri reali, indiciata sugli elementi di S, ovverossia $(x_i)_{i \in S}$, rappresenterà una *allocazione* di payoff tra gli elementi di S. Per esempio, se $N = \{1, 2, 3\}$, una allocazione di payoff fra gli elementi di N è una terna (x_1, x_2, x_3) di numeri reali, mentre una allocazione fra gli elementi di $S = \{1, 3\}$ è una coppia (x_1, x_3) di numeri reali. Si noti che, per come sono definite le allocazioni, non è garantito che esse siano effettivamente realizzabili. Chiameremo allora "fattibili" (per S) le allocazioni per S che soddisfano la condizione $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$. Un caso particolarmente importante è quello in cui la coalizione S è tutto N. Inoltre, diremo che una allocazione x per N è efficiente se $\sum_{i \in N} x_i \geq v(N)$. Una allocazione $(x_i)_{i \in N}$ che sia al contempo fattibile ed efficiente per N viene detta *pre-imputazione*: visto che fattibilità significa $\sum_{i \in N} x_i \leq v(N)$ ed efficienza vuol dire $\sum_{i \in N} x_i \geq v(N)$, una pre-imputazione è semplicemente caratterizzata da $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.

Il termine che è stato appena introdotto lascia presupporre che vi siano anche le *imputazioni* (e che magari siano anche più importanti delle pre-imputazioni...). In effetti così è, ed una imputazione non è altro che una pre-imputazione la quale soddisfa anche la condizione[8] che sia $x_i \geq v(i)$ per ogni $i \in N$: a parole, ciò significa che ogni giocatore si vede assegnato dalla allocazione $(x_i)_{i \in N}$ almeno tanto quanto egli riuscirebbe ad ottenere da solo (cioè, senza bisogno di accordarsi con nessun altro).

Le imputazioni hanno un ruolo molto importante per i TU-games: di fatto rappresentano il "serbatoio" da cui attingono la gran parte delle soluzioni per TU-game. E' abbastanza naturale fare questa restrizione, sotto opportune ipotesi, di cui la più significativa è la superadditività, che traduce in formule il vecchio adagio "l'unione fa la forza".

Diremo che un TU-game è superadditivo se, per ogni $S, T \subseteq N$, con S e T disgiunte tra loro, si ha:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$$

Se un gioco è superadditivo, ne segue che le migliori allocazioni per i giocatori vengono ottenute quando essi si riuniscono tutti nella "grande coalizione" N.

In effetti, se una allocazione $x = (x_i)_{i \in S}$ è fattibile per S, grazie alla superadditività è garantito che si possa trovare una allocazione fattibile per N la quale offre ai giocatori di S almeno quanto veniva offerto da x. Basta considerare $N \backslash S$ e dividere $v(N \backslash S)$ in parti uguali fra gli elementi di $N \backslash S$: questo ci dà una allocazione y per $N \backslash S$ che, "composta" con x, dà luogo ad

[8] Nella formula che segue ed altrove, per semplicità ed in accordo con la consuetudine, userò la notazione $v(i)$ anziché quella corretta di $v(\{i\})$, così come utilizzerò anche notazioni del tipo $v(13)$ al posto di $v(\{1, 3\})$

una allocazione fattibile z per N. Infatti:

$$\sum_{i \in N} z_i = \sum_{i \in S} x_i + \sum_{i \in N \setminus S} y_i \leq v(S) + v(N \setminus S) \leq v(N)$$

Si noti l'ultima disuguaglianza che è garantita appunto dalla superadditività.

Occorre fare attenzione a non trarre immotivate conseguenze da quanto appena detto. La allocazione z "costruita" nel modo sopra descritto a partire da x non è garantito che sia soddisfacente per tutte le coalizioni! Qui si vuole solo esibire *una* allocazione *fattibile* per N, nulla più.

Uno dei concetti fondamentali di soluzione per un TU-game è rappresentato dal "nucleo". L'idea di nucleo emerge in modo molto naturale come immediata (anzi, pericolosamente troppo immediata, col rischio che si abbassi il livello di vigilanza critica) estensione dell'idea di razionalità individuale e collettiva che sottende alla definizione di imputazione. Come possiamo "leggere" le condizioni che definiscono una imputazione? Vi è la condizione di fattibilità $\sum_{i \in N} x_i \leq v(N)$, e poi due condizioni di "razionalità": la razionalità individuale, $x_i \geq v(i)$, e la razionalità collettiva, $\sum_{i \in N} x_i \geq v(N)$. Perché allora non introdurre l'idea che una allocazione soddisfi ulteriori vincoli di razionalità? Cioè, che soddisfi anche *tutte* le condizioni $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$? Dopotutto, se pensiamo ad una allocazione come ad un *accordo* tra giocatori per la spartizione di $v(N)$, così come non è ragionevole pensare che un giocatore i accetti una spartizione che gli dà meno di quanto egli non possa ottenere da solo, si può pensare di estendere queste considerazioni anche ad un gruppo di giocatori, ovverossia ad una coalizione. Si definisce allora *nucleo* di un TU-game (N, v) l'insieme di tutte le imputazioni che soddisfano queste situazioni di razionalità intermedia. In formule,

$$\text{nucleo}(v) = \{(x_i)_{i \in N} : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \ \text{ e } \ \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \text{ per ogni } S \subseteq N\}$$

Anziché discutere in astratto dei meriti, demeriti e problemi tipici del nucleo, preferisco farlo a proposito di alcuni esempi, in modo da avere "materiale" concreto a supporto della discussione. Gli esempi che considereremo sono i seguenti:

- il gioco dei musicanti
- il gioco dei guanti
- i giochi di mercato
- il gioco di maggioranza

Il gioco dei musicanti
Indicherò, per semplicità, con $1, 2, 3$ i nostri giocatori I, II, III. Ricordo che $v(1) = 100$, $v(2) = 150$, $v(3) = 200$, $v(12) = 400$, $v(13) = 300$, $v(23) = 400$, $v(123) = 600$.

Una allocazione è una terna di numeri reali (x_1, x_2, x_3). Affinché questa sia una pre-imputazione deve essere $x_1 + x_2 + x_3 = 600$ (geometricamente rappresenta un piano nello spazio); per essere una imputazione deve soddisfare inoltre le condizioni $x_1 \geq 100$, $x_2 \geq 150$, $x_3 \geq 200$. Quindi, geometricamente, le imputazioni rappresentano una porzione triangolare del piano sopra individuato, come viene mostrato nella figura 8.5, in cui le imputazioni sono messe in evidenza col tratteggio.

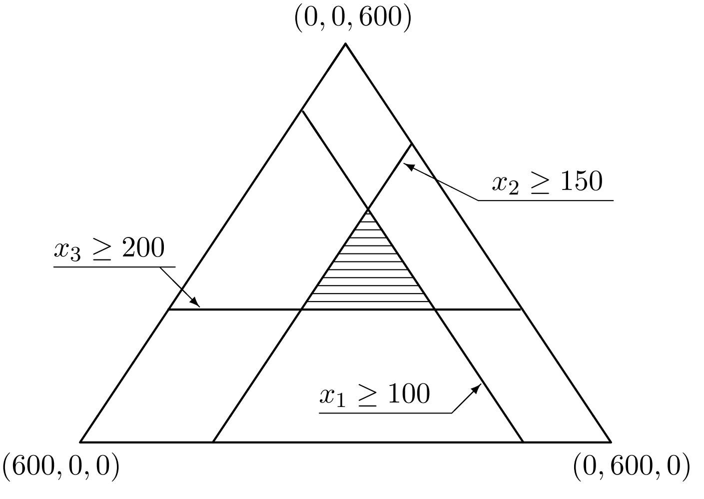


Figura 8.5: Le imputazioni per il gioco dei tre musicanti

Le imputazioni che stanno nel nucleo sono quelle che soddisfano le ulteriori condizioni:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 400 \\ x_1 + x_3 &\geq 300 \\ x_2 + x_3 &\geq 400 \end{aligned}$$

Osservo che, per una pre-imputazione, le precedenti condizioni sono equivalenti a:

$$\begin{aligned} x_3 &\leq 200 \\ x_2 &\leq 300 \\ x_1 &\leq 200 \end{aligned}$$

Come mai? Vediamolo per la prima: poiché (x_1, x_2, x_3) è una imputazione, è

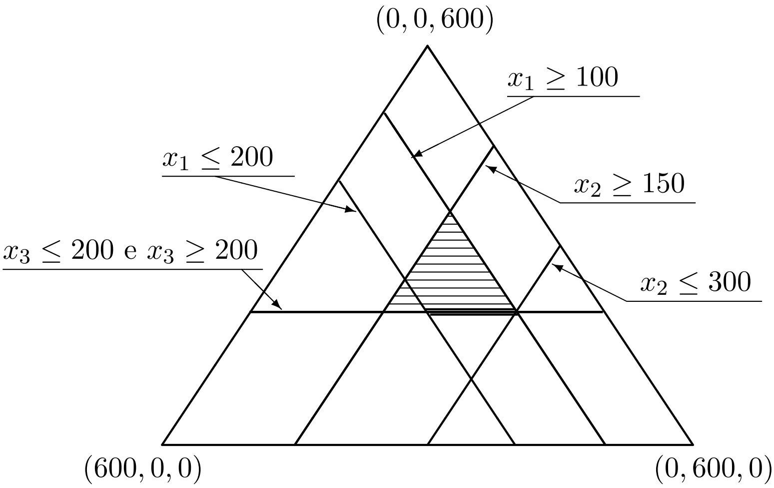


Figura 8.6: Il nucleo del gioco dei tre musicanti

$x_1 + x_2 + x_3 = 600$ e quindi $x_1 + x_2 = 600 - x_3$. Pertanto, dire $x_1 + x_2 \geq 400$ è equivalente a dire $600 - x_3 \geq 400$, cioè $x_3 \leq 200$.

Il nucleo è dato dalle imputazioni rappresentate in figura 8.6 dalla linea calcata e contiene più di una imputazione. Si noti che si tratta di una situazione un po' particolare, dovuta al fatto che accidentalmente abbiamo sia la condizione $x_1 + x_2 \geq 400$ (che per una pre-imputazione è equivalente a $x_3 \leq 200$) e la condizione $x_3 \geq 200$. Se $v(3)$ fosse, ad esempio, un poco più grande di 200 avremmo un nucleo vuoto, mentre se fosse un poco più piccolo avremmo un nucleo rappresentato da un poligono convesso non degenere (ovverossia, "pieno").

Il gioco dei guanti

Questo è uno degli esempi classici della TdG, cosa che è da attribuire ad una sua caratteristica, forse inattesa, che emergerà dall'analisi che ci accingiamo a fare.

Abbiamo 2001 giocatori, dei quali 1000 (per comodità, immaginiamo che questi siano i giocatori numerati da 1 a 1000) possiedono un guanto sinistro, mentre i rimanenti 1001 possiedono un guanto destro. Indicherò con L il gruppo degli individui che posseggono un guanto sinistro, e con R l'insieme degli altri giocatori. Pertanto, $L = \{1, \ldots, 1000\}$ ed $R = \{1001, \ldots, 2001\}$. Facciamo l'ipotesi che solo *coppie* di guanti abbiano valore, e lo fisseremo convenzionalmente pari a 1. Una coalizione, ovverossia un gruppo S di giocatori, riuscirà ad ottenere un valore pari al numero di *paia* di guanti che riesce a "mettere assieme", il che è uguale al *minimo* tra il numero di elementi di

$L \cap S$ ed $R \cap S$.

E' chiaro che le imputazioni sono date da tutti e soli gli elementi $x \in \mathbb{R}^{2001}$ che hanno tutte le coordinate non negative (si noti che $v(i) = 0$ per ogni individuo i) e tali per cui $\sum_{i=1}^{2001} x_i = 1000$. Come sarà fatto il nucleo di questo gioco? Molto semplicemente. C'è un solo vettore nel nucleo, ed è il vettore $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, che ha le prime 1000 coordinate, quelle corrispondenti ai giocatori di L, pari a 1 e tutte le rimanenti 1001 pari a zero.

Che questo vettore stia nel nucleo è una verifica facile, che viene lasciata al lettore. Vediamo il fatto meno immediato, e cioè fatto che esso sia l'unica imputazione che sta nel nucleo. Se così non fosse, ci sarebbe un altro vettore z, con una coordinata tra le ultime 1001 strettamente positiva. Senza ledere la generalità possiamo supporre che la 1001-esima coordinata valga $a > 0$: ma se consideriamo la coalizione costituita da tutti i giocatori tranne il 1001-esimo, questa potrà costituire 1000 paia di guanti, e quindi deve essere che $\sum_{i=1}^{1000} z_i + \sum_{i=1002}^{2001} z_i \geq 1000$. Ma $\sum_{i=1}^{2001} z_i = 1000$ (z è una imputazione) e $z_{1001} = a$ ci dicono che $\sum_{i=1}^{1000} z_i + \sum_{i=1002}^{2001} z_i = 1000 - a$, quindi non è verificata la condizione $\sum_{i=1}^{1000} z_i + \sum_{i=1002}^{2001} z_i \geq 1000$. Pertanto, altri elementi nel nucleo non ce ne sono.

Cosa ci dice questo risultato? Da un lato potrebbe essere piacevole il fatto che il nucleo contenga un unico elemento, facendo quindi venire meno elementi di indeterminatezza che sono intrinsecamente dovuti al fatto che il nucleo, per come è definito, è un insieme di allocazioni (a volte un insieme molto grande). Dall'altro lato, può sembrare strano il fatto che *tutto* il valore che i giocatori messi assieme riescono ad ottenere sia assegnato ai giocatori in possesso di un guanto sinistro[9].

Visto che il gioco può essere considerato come rappresentativo di una situazione di mercato, per quanto stilizzata (e, si noti, senza prezzi esplicitamente all'opera!), ci si può attendere che dei due beni sul mercato sia il guanto sinistro, quello più scarso, ad essere valutato di più dell'altro: ci si poteva in altre parole aspettare che i possessori di un guanto sinistro si ritrovassero alla fine più "ricchi" degli altri giocatori, ma questo esito così estremo può lasciare interdetti. Dopotutto, la carenza relativa del bene "guanto sinistro" è molto bassa.

Va però osservato che il modello che stiamo usando non considera alcun tipo di "attrito" che ci potremmo aspettare in una situazione concreta che abbia le caratteristiche corrispondenti alla nostra astrazione. Alcune ipotesi implicite che, esplicitate, possono rendere conto di quanto avviene, sono:
- c'è informazione completa della situazione da parte di tutti i giocatori coin-

[9]Si noti che, se interpretiamo il risultato come frutto di un accordo vincolante fra tutti i 2001 giocatori, si pone anche un problema di non poco conto: i 1001 giocatori col guanto destro cosa ci guadagnano a "firmare" l'accordo?

volti
- non vi sono costi di contrattazione (neanche il tempo perduto! Si noti che vi sono 2^{2001}, ovvero circa $2.3 \cdot 10^{602}$ coalizioni, anche se per simmetria moltissime sono tra loro del tutto equivalenti)
- i guanti sono assolutamente identici e così la valutazione di ogni coppia di guanti.

Insomma, il risultato ottenuto dipende in maniera molto pesante da condizioni poco realistiche del tipo di quelle appena evidenziate. Se queste ipotesi possono avere un ruolo meno essenziale quando il numero di giocatori coinvolto è piccolo, il loro peso cresce e diventa determinante quando il numero dei giocatori è molto grande.

Penso che queste semplici osservazioni possano bastare per rendere conto del perché si ottenga un risultato così estremo, ed anche perché esso debba essere ritenuto poco attendibile dal punto di vista della rilevanza interpretativa. Vorrei tuttavia aggiungere un'analogia di tipo fisico (più precisamente, meccanico), perché io vedo ognuna delle ipotesi sopra evidenziate (ed altre che si potrebbero aggiungere) come volte ad eliminare nel modello, rispetto alla situazione concreta, un po' di attrito, di "sabbia negli ingranaggi". L'analogia meccanica è molto semplice e mostra quanto rilevante possa essere il ruolo dell'attrito (e qui si parla di attrito in senso proprio). Immaginate una sfera d'acciaio che si trovi ad un metro dal suolo. Se trascuriamo l'attrito, la velocità che ha quando arriva al suolo è la stessa, sia che venga lasciata cadere verticalmente, sia che venga fatta scivolare lungo un piano inclinato, per quanto esigua sia questa inclinazione. E' chiaro che per valori molto piccoli dell'inclinazione, tutta una serie di fattori (l'attrito, ma anche altri: ad esempio le imperfezioni della sfera concreta che abbiamo e quelle della superficie del piano inclinato) fanno sì che le previsioni del modello semplificato non siano più attendibili. Tutto ciò vale a maggior ragione quando cerchiamo di usare la TdG per fare previsioni nel suo ambito applicativo d'elezione, cioè le scienze sociali: la presenza di "sabbia" è ben più rilevante di quanto non capiti in molte applicazioni della fisica. Nel caso dei 2001 giocatori, effettivamente di "sabbia" ve ne è molta e faremmo bene a non dimenticarlo.

I giochi di mercato

La scelta fatta di limitarmi ai TU-game (come, d'altronde, era stato fatto nell'importante contributo di Shapley e Shubik (1969)) fa sì che nel presentare questa classe di giochi occorra fare delle ipotesi particolarmente forti, che costituiscono una importante limitazione all'interesse di questi giochi, in particolare rispetto alla teoria economica; ciò nonostante, vale comunque la pena di dedicare un poco di tempo e di spazio a questa classe di giochi. Anche perché i risultati si possono trasferire alla classe degli NTU-game, e quindi hanno un interesse che trascende l'ambito speciale nel quale li vedremo.

Abbiamo n giocatori, ciascuno dei quali ha una "dotazione iniziale" costituita da un paniere di beni $\omega_i \in \mathbb{R}^l_\geq$: uso l'indice i per significare che sto considerando la dotazione iniziale del giocatore $i \in N = \{1, \ldots, n\}$; l'esponente l deriva dall'assunzione che vi siano l tipi diversi di beni, per cui un paniere di beni è descritto da una l-pla ordinata di numeri reali[10]; noto infine che i panieri di beni dei quali ci occuperemo avranno tutte le coordinate non negative[11].

Assumerò che i beni siano "perfettamente divisibili": potremo così considerare una generica quantità a di un bene, dove a è un qualsiasi numero reale non negativo. Non è una ipotesi essenziale, serve solo per individuare un ambito di analisi: si potrebbe anche fare fare l'ipotesi "alternativa" che i beni abbiano un carattere discreto, come i guanti nell'esempio precedente, nel quale tra l'altro avevamo un caso di beni "perfettamente complementari" (i guanti di destra e di sinistra, naturalmente).

Ciò che ci permette di descrivere questa situazione come TU-game è l'ipotesi che l'utilità[12] che ciascun agente ricava dal consumo di un paniere di beni sia misurabile su una scala *comune* a tutti, oltre al fatto che esista un mezzo (denaro, ad esempio, ma va bene anche il sale, basta che sia disponibile) per trasferire liberamente tra loro l'utilità, ove necessario.

Allora, ogni agente i sarà descritto (di fatto, *caratterizzato*) da una legge di trasformazione $f_i : \mathbb{R}^l_\geq \to \mathbb{R}$, che associa ad ogni paniere di beni la utilità che egli ricava dal suo consumo.

Avendo questi dati a disposizione, possiamo determinare chi è $v(S)$:

$$v(S) = \max\{\sum_{i \in S} f_i(x_i) : x_i \in \mathbb{R}^l_\geq \text{ per ogni } i \text{ e } \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S} \omega_i\}$$

Ciò che esprimono queste relazioni è facilmente descrivibile verbalmente: i membri di S mettono in comune le loro risorse e se le redistribuiscono in modo da riuscire ad ottenere la massima utilità complessiva possibile.

Così come è stato formulato il problema, non vi è alcuna garanzia che $v(S)$ sia ben definito, in quanto non sappiamo se il massimo invocato esista. E' sufficiente però assumere che le funzioni f_i siano continue per ottenere, mediante l'applicazione di uno "standard tool" come il teorema di Weierstrass, la garanzia che tale massimo esista. Una tale ipotesi di continuità è ragionevole

[10] Ad esempio, se il bene 1 è pane (misurato in Kg) e il bene 2 è salame (misurato in hg), $\omega_i = (0.5, 2)$ significa che il giocatore i ha 1/2 Kg di pane e 2 etti di salame.

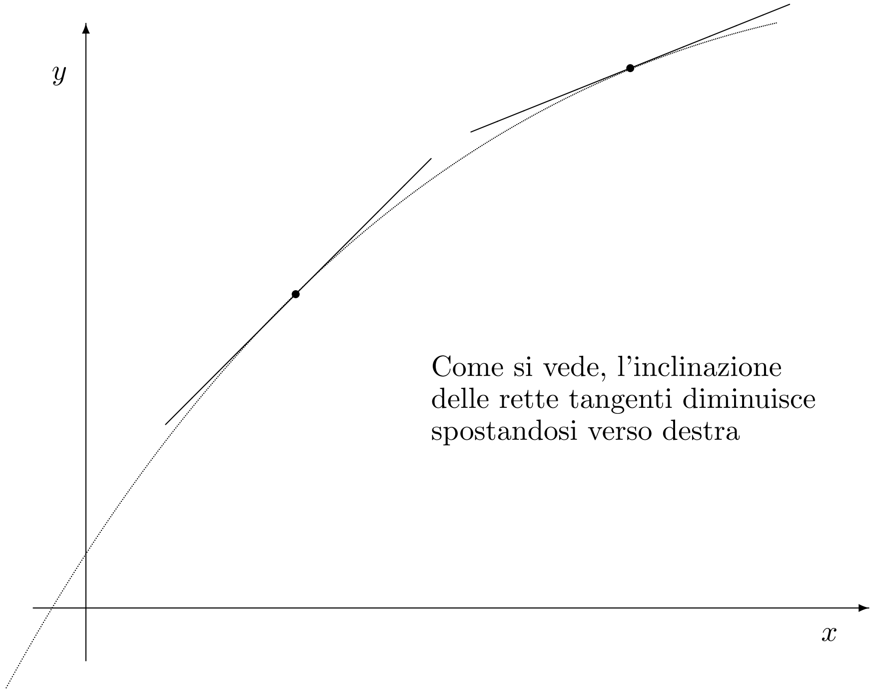
[11] Cosa che è espressa dalla condizione di appartenere ad $\mathbb{R}^l_\geq$: il pedice $\geq$ è usato per individuare i vettori di $\mathbb{R}^l$ aventi tutte le coordinate non negative.

[12] Privilegerò l'interpretazione del modello formale in termini di "economia di puro scambio e consumo", ma vorrei notare che altre interpretazioni sono possibili: Osborne e Rubinstein offrono una interpretazione "produttiva" dello stesso modello formale.

in questo contesto: il consumo di due panieri di beni che differiscono di poco tra loro dovrebbe dare dei valori di utilità vicini tra loro.

Cosa possiamo dire del nucleo? Vi saranno allocazioni nel nucleo? Con le assunzioni fatte non possiamo garantirlo. E' però interessante il fatto che una ulteriore ipotesi, la quale ammette una chiara lettura in termini interpretativi, garantisce che il nucleo sia non vuoto. L'ipotesi è quella di *concavità* delle funzioni f_i, ipotesi che corrisponde all'idea di utilità marginale decrescente, assunzione tipica nella teoria economica neoclassica, anzi, chiave di volta dell'impianto marginalistico.

Ricordo che, se il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è "liscio", di modo che abbia rette tangenti, l'idea di "utilità marginale decrescente" corrisponde al fatto che i coefficienti angolari delle rette tangenti *diminuiscono* quando il punto di tangenza si sposta verso destra, come è illustrato nella figura seguente. Questa condizione sui coefficienti angolari è equivalente alla condizione di concavità per f (sempre assumendo che il suo grafico sia liscio o, in termini tecnici, che f sia una funzione derivabile). Queste condizioni si estendono anche al caso di funzioni di più variabili, come le "nostre" f_i.



Ebbene, l'ipotesi di concavità garantisce che il nucleo di un "gioco di mercato" è non vuoto. Ovverossia, è possibile ripartire la dotazione iniziale complessiva $\sum_{i \in N} \omega_i$ fra tutti i giocatori in modo che nessuna coalizione sia in grado di fare meglio.

La dimostrazione di questo fatto non è immediata. C'è una via "classica" per garantire questo fatto, che consiste nell'applicare una importante caratterizzazione dei TU-game a nucleo non vuoto, dovuta a Bondareva (1963) che, grazie all'applicazione del teorema di dualità in programmazione lineare, identifica i TU-game a nucleo non vuoto con la classe dei giochi bilanciati. Non è questa la sede per esaminare questo risultato, anche perché richiederebbe molto spazio per essere descritto, ma va detto che esso fornisce un tool notevole, usato in vari contesti. Chi fosse interessato a vedere i dettagli tecnici del teorema di Bondareva, può consultare riferimenti standard quali Owen (1968) od Osborne e Rubinstein (1994).

Il fatto che il nucleo sia non vuoto è molto significativo[13]. Tra l'altro, garantisce che esista non solo una redistribuzione efficiente delle dotazioni iniziali, fatto di per sé interessante, ma che addirittura si possa effettuare questa redistribuzione in modo che nessun gruppo di giocatori sia in grado di far meglio "contando solo sulle proprie forze", il che significa che questa redistribuzione ha notevoli proprietà di stabilità. Si noti che la determinazione di questa redistribuzione non passa esplicitamente attraverso un sistema di prezzi di mercato, anche se un risultato importante, il cosiddetto "secondo teorema fondamentale dell'economia del benessere", garantisce che un qualsiasi elemento del nucleo può essere ottenuto come equilibrio di mercato per un qualche sistema di prezzi (a patto di effettuare una opportuna redistribuzione delle risorse iniziali).

Una osservazione residuale, ma significativa, relativamente a questo gioco, è che esso ci offre un caso limpido di situazione a cosiddette "coalizioni ortogonali" (per usare la terminologia di Myerson (1991)). In effetti, in generale la interpretazione di $v(S)$, che fa riferimento a ciò che la coalizione S è in grado di "garantirsi" è discutibile, come abbiamo visto. Nei market games, con le ipotesi che abbiamo fatto, il comportamento degli elementi di $N \setminus S$ è del tutto *ininfluente* per quel che riguarda il benessere di S (si noti che questa rosea situazione è dovuta alla assunzione, implicita nella nostra modellizzazione, che non siano presenti "esternalità", come le chiamano gli economisti[14]: se così non è, i problemi di interpretazione per $v(S)$ rimangono). Il problema 50 invita a riflettere su queste considerazioni.

[13] Ricordo anche che Shubik (1959) ha reinterpretato nel contesto della TdG l'idea classica di "curva di contrattazione" di Edgeworth (1881), associandola appunto all'idea di nucleo.

[14] In questo contesto, avremmo per esempio una "esternalità" qualora la funzione di utilità di un individuo dipendesse, per esempio, dal consumo di un bene da parte di un altro consumatore.

Il gioco di maggioranza

L'ultimo esempio che discuterò mostra una criticità rilevante qualora si ritenesse di proporre il nucleo come "la soluzione" per i TU-game: il nucleo di questo gioco risulta essere in effetti vuoto (cosa che, d'altronde, abbiamo visto già fare capolino nell'esempio dei musicanti).

L'esempio che vedremo è particolarmente stilizzato, ed anche per questo motivo è molto semplice, per cui di fatto si presta ad essere rappresentativo di un'ampia classe di situazioni di interazione strategica. Abbiamo tre giocatori, ovverossia $N = \{1, 2, 3\}$, e i valori per le coalizioni sono i seguenti: $v(1) = 0$, $v(2) = 0$, $v(3) = 0$, $v(12) = 1$, $v(13) = 1$, $v(23) = 1$ e $v(N) = 1$.

Una imputazione è una terna di numeri reali (x_1, x_2, x_3) con tutte le coordinate non negative e tale che $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Per appartenere al nucleo, deve soddisfare le ulteriori seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 1 \\ x_1 + x_3 &\geq 1 \\ x_2 + x_3 &\geq 1 \end{aligned}$$

Se sommiamo membro a membro queste tre condizioni, vediamo che, affinché (x_1, x_2, x_3) appartenga al nucleo, deve essere soddisfatta la condizione:

$$2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 3$$

Ma, visto che $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, ne ricaviamo che dovrebbe essere $2 \geq 3$, il che è falso. Vale a dire: non possiamo trovare alcuna allocazione nel nucleo.

E' importante osservare che il gioco non ha in sé nulla di particolarmente esotico. In particolare, si tratta di un gioco superadditivo, come il lettore può agevolmente verificare. Non solo, ma possiamo ritrovare una intera famiglia di giochi similari: basta definire $v(12) = a$, $v(13) = b$, $v(23) = c$ e richiedere che questi parametri[15] siano tutti maggiori di 2/3 (e minori od uguali ad 1 se vogliamo preservare la superadditività). Il fatto che il nucleo del gioco risulti vuoto per un certo range nei parametri rilevanti fa capire come ci si trovi di fronte non ad un fatto eccezionale, ma ad una situazione con una significativa stabilità.

Ritorniamo al gioco introdotto. Ribadisco che si tratta di un gioco superadditivo, per cui l'idea di concentrare l'attenzione sulle possibili spartizioni di $v(N)$ tra i giocatori non perde il suo rilievo. Come mai il nucleo è non vuoto? Cosa determina questo fatto, al di là dei semplici calcoli? E' la eccessiva forza

[15] Come si vede, i valori delle altre coalizioni sono stati lasciati inalterati. Potremmo fare variare anche loro, ma ci si può sempre ridurre alla situazione con $v(1) = 0$, $v(2) = 0$, $v(3) = 0$ e $v(N) = 1$, con una opportuna riparametrizzazione dei payoff che non muta le caratteristiche strategiche del gioco.

relativa delle coalizioni intermedie, rispetto alla "grande coalizione". Lo si vede chiaramente dal fatto che la spartizione $(1/3, 1/3, 1/3)$ di $v(N)$ (proposta più che ragionevole, data la simmetria del gioco!), scontenta *tutte* le coalizioni costituite da due giocatori: ciascuna di loro è infatti in grado di ottenere 1, anziché 2/3, che è il valore che verrebbe assegnato, nel complesso, alla coalizione dall'allocazione $(1/3, 1/3, 1/3)$.

Il valore Shapley

Il fatto che possiamo trovare giochi del tutto normali senza imputazioni nel nucleo ci può indurre a cercare altre vie per "risolvere" un TU-game. Non dedicherò spazio a quella che è stata storicamente la prima idea, introdotta da von Neumann e Morgenstern, ovverossia quella di "insieme stabile di imputazioni" come soluzione di un TU-game. Non lo faccio perché questa soluzione presenta tutta una serie di caratteristiche negative che la rendono poco "appetibile": è difficile da calcolare, per un gioco di media complessità; in certi casi si possono avere soluzioni con una struttura "assurda" che non si presta ad alcuna interpretazione ragionevole; infine, esistono TU-games che comunque non hanno soluzioni nel senso di von Neumann e Morgenstern. Tutto questo non vuol dire che le soluzioni di von Neumann e Morgenstern abbiano ormai solo un interesse storico, anzi. Voglio solo dire che preferisco riservare lo spazio a disposizione per l'illustrazione di altri approcci all'idea di "soluzione" per un TU-game. Di fatto, l'unica altra soluzione cui dedicherò sufficiente spazio sarà il "valore di Shapley".

L'introduzione classica a questa soluzione passa attraverso un approccio del tutto analogo a quello visto nel caso della soluzione di Nash al problema di contrattazione: ovverossia, come fatto originariamente da Shapley (1953), vengono indicate alcune proprietà e si mostra che, sulla classe dei TU-game, vi è una ed una sola soluzione che soddisfi queste proprietà.

Introduciamo allora il valore di Shapley, rinviando a dopo le considerazioni critiche.

L'idea è quella di assegnare ad ogni gioco una allocazione, in modo da rispettare alcuni criteri. Un primo criterio, ovvio, è la simmetria. Simmetria vuol dire che se due giocatori si trovano "nella stessa identica posizione" in un gioco, allora il valore Shapley dovrebbe assegnare loro la stessa quantità: è chiaramente la trasposizione ad altro contesto della condizione di simmetria imposta alla soluzione di problemi di contrattazione. Vale la pena di ricordare anche la condizione di anonimità che è simile, ma differente e più generale. Essa esprime che quanto viene dato ad un giocatore non deve dipendere da "chi è" questo giocatore (cioè, se si tratta di Franco o di Vito), ma solo da quanto il giocatore è in grado di ottenere da solo o con altri. Vediamo un esempio.

Esempio 8.1 *Abbiamo tre giocatori che per semplicità chiameremo 1, 2, 3. Si ha:* $v(1) = v(2) = v(3) = 0$*;* $v(1,2) = v(1,3) = 4$*;* $v(2,3) = 6$*;* $v(1,2,3) = 20$*. I giocatori* 2 *e* 3 *si trovano evidentemente in una posizione identica fra loro, per quanto riguarda questo gioco. Allora, la condizione di simmetria dice che in questo gioco dovremmo dare a* 2 *esattamente quanto viene dato a* 3*. Consideriamo ora un altro gioco,* w*, che assegna agli stessi giocatori (e alle loro coalizioni) i seguenti valori:* $w(1) = w(2) = w(3) = 0$*;* $w(2,3) = w(1,3) = 4$*;* $w(1,2) = 6$*;* $w(1,2,3) = 20$*. Che differenza c'è tra il gioco* v *e quello* w*? Che in* w *il giocatore 3 si trova nella identica situazione in cui il giocatore 1 si trovava nel gioco* v*. L'idea di anonimità richiede che noi diamo al giocatore 3, nel gioco* w*, esattamente quello che diamo al giocatore 1 nel gioco* v*.*

Vorrei notare il ruolo "fondamentale" della condizione di anonimità (e quindi anche di quella di simmetria): se siamo convinti che la modellizzazione della situazione mediante un TU-game sia accettabile, allora questo significa che il TU-game raccoglie l'informazione essenziale e quindi non è possibile trattare in modo differente due giocatori che, dal punto di vista astratto dei TU-game, non possono essere distinti.

Per procedere, tanto per cambiare ci farà comodo aggiungere un pizzico di apparato formale.

Indichiamo con $\mathcal{G}(N)$ l'insieme di tutti i giochi (N, v) che sono definiti su un dato insieme N di giocatori e con $\mathcal{G}$ l'insieme di tutti i TU-game. Diciamo "valore" una funzione Φ definita su $\mathcal{G}$ tale che $\Phi : \mathcal{G}(N) \to \mathbb{R}^n$, dove $n = |N|$. Vale a dire, un "valore" è una regola che ad ogni gioco associa una allocazione. Nel seguito, ci occuperemo di un fissato insieme di giocatori, N. Cioè, lavoreremo su $\mathcal{G}(N)$ e, per semplicità, assumeremo che sia $N = \{1, \ldots, n\}$.

Sia $\sigma : N \to N$ una corrispondenza biunivoca, detta anche permutazione di N. Un esempio di permutazione è dato da: $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 1$. Dato un gioco v su N, indichiamo con σv il gioco definito come: $\sigma v(S) = v(\sigma(S))$

Esempio 8.2 *Sia* $N = \{1, 2, 3\}$*. Prendiamo* $\sigma : N \to N$ *così definita:* $\sigma(1) = 3$*,* $\sigma(2) = 2$*,* $\sigma(3) = 1$*. Se* $S = \{1, 2\}$*, abbiamo che* $\sigma(S) = \{\sigma(1), \sigma(2)\} = \{3, 2\} = \{2, 3\}$*. Quindi,* $\sigma v(1, 2) = v(2, 3)$*. Se prendiamo* $T = \{2, 3\}$*, abbiamo che* $\sigma(T) = \{\sigma(2), \sigma(3)\} = \{2, 1\} = \{1, 2\}$*. Quindi,* $\sigma v(1, 2) = v(2, 3)$*. Dovrebbe essere evidente che il gioco* w *nell'esempio precedente non è altro che il gioco* σv*, essendo* σ *la permutazione che stiamo considerando (quella che scambia 1 con 3). Per quanto riguarda la simmetria, possiamo osservare che per la permutazione* $\sigma' : N \to N$ *definita da:* $\sigma'(1) = 1$*,* $\sigma'(2) = 3$*,* $\sigma'(3) = 2$*, si ha che* $\sigma' v = v$*.*

L'idea è ovviamente di chiedere che:

Assioma 8.1 (Anonimità) *Sia v un gioco e $\sigma : N \to N$ una permutazione. Allora, $\Phi_{\sigma(i)}(\sigma v) = \Phi_i(v)$.*

Vediamo cosa significa, in riferimento all'esempio appena visto. Sia $i = 1$: allora, $\sigma(i) = \sigma(1) = 3$. Vogliamo quindi che $\Phi_3(\sigma v) = \Phi_3(w) = \Phi_1(v)$. Cioè: quel che viene assegnato al giocatore 1 nel gioco v, deve essere assegnato al giocatore 3 nel gioco w.

Volendo, si può formalizzare anche l'assioma di simmetria. E' identico a quello di anonimità, salvo che si applica solo alle permutazioni σ per cui $\sigma v = v$.

Un'altra condizione che imponiamo a Φ è la seguente:

Assioma 8.2 (Efficienza) *Per ogni gioco v, $\Phi(v)$ è una pre-imputazione, cioè $\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = v(N)$.*

L'interpretazione di questo assioma è ovvia: il "valore" Φ deve ripartire tra i giocatori quello che riesce ad ottenere la grande coalizione.
Nonostante la apparente ragionevolezza, questa condizione presenta un problema nelle moderne presentazioni dei TU-games, che non impongono alcuna restrizione tipo la superadditività (e nemmeno "surrogati", come la condizione che il gioco sia coesivo[16]). Se imponiamo che questo assioma valga per *tutti* i TU-games, non sembra molto appropriato parlare di efficienza. Basti pensare ad un gioco a soli due giocatori, con $v(1) = v(2) = 1$ e $v(12) = 0$: è molto più efficiente per i due giocatori starsene ognuno per i fatti propri ed ottenere 1, anziché spartirsi un misero 0... Sono quindi più che legittimi i dubbi sulla ragionevolezza di richiedere che questo assioma valga per ogni TU-game. Questo problema sarà risolto restringendo l'analisi ai soli giochi superadditivi.

Mi limiterò quindi a considerare la classe $\mathcal{SG}(N)$ dei giochi *superadditivi* che hanno N come insieme dei giocatori. Anche i due assiomi precedenti si assumeranno essere validi su questa classe di giochi.

Per introdurre l'assioma successivo abbiamo bisogno di dire cos'è il contributo marginale di un giocatore. Se S è una coalizione, ed $i \notin S$, il numero reale $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ viene detto contributo marginale di i alla coalizione S. Se si ha che $v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(i)$ per ogni coalizione S che non contiene i, il giocatore i viene detto "dummy player". In altri termini, se ad una coalizione S si aggiunge il giocatore i, ciò non ha alcun effetto particolarmente significativo: il giocatore i si porta dietro la sua dote[17] ma il suo arrivo nella coalizione S non provoca alcun guadagno ulteriore. Non dovrebbe allora essere particolarmente sorprendente il seguente assioma:

[16]Un gioco è coesivo se $v(N) \geq \sum_{1=1}^{k} v(S_i)$ per ogni partizione $S_1, \ldots, S_k$ di N

[17]Si noti che per un gioco superadditivo è $v(S \cup \{i\}) \geq v(S) + v(i)$ e quindi è sempre $v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(i)$. Pertanto, in un gioco superadditivo il contributo marginale minimo è proprio $v(i)$.

Assioma 8.3 (Dummy player) *Se in un gioco v il giocatore i è un "dummy player", allora $\Phi_i(v) = v(i)$.*

L'ultima condizione è molto facile da enunciare. C'è solo bisogno di definire, dati due giochi $v, w \in \mathcal{SG}(N)$, che cosa sia il gioco $v + w$, somma dei due. La definizione è la più semplice possibile: data una qualunque coalizione $S \subseteq N$, si pone $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$.

Assioma 8.4 (Additività) $\Phi_i(v + w) = \Phi_i(v) + \Phi_i(w)$, *per ogni* $i \in N$.

Osservo come, al di là del fatto che sia facile da enunciare ed alla sua "palatabilità" matematica, dei quattro assiomi quest'ultimo è il più discutibile, in quanto sommare due giochi può produrre un terzo gioco in cui la posizione "strategica" del giocatore i potrebbe essere difficilmente correlata a quella che lui ha nei due giochi "addendi".
Possiamo finalmente ricordare il risultato di Shapley.

Teorema 8.1 (Shapley, 1953) *Esiste ed è unica $\Phi : \mathcal{SG}(N) \to \mathbb{R}^n$ che soddisfa gli assiomi 1, 2, 3, 4.*

Naturalmente, dato un gioco $v \in \mathcal{SG}(N)$, il vettore $\Phi(v) \in \mathbb{R}^n$ sarà detto "valore di Shapley" del gioco v. La coordinata i-esima di $\Phi(v)$, cioè $\Phi_i(v)$, indica quanto il valore Shapley assegna al giocatore $i \in N$.

Abbiamo anche a disposizione una formula per Φ:

$$\Phi_i(v) = (\frac{1}{n!}) \sum_{\sigma} m_i^\sigma(v) \text{ per ogni } i \in N$$

Per capire la formula, dobbiamo sapere cosa vuol dire $m_i^\sigma(v)$. L'idea è semplice. Intanto, ricordiamo che $\sigma : N \to N$ è una permutazione. Consideriamo $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$. Dato $i \in N$, ci sarà un certo indice $j \in N$ t.c. $i = \sigma(j)$. Consideriamo allora la coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\}$. E la coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j)\}$.
Essendo $i = \sigma(j)$, abbiamo che i non appartiene alla coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\}$, mentre $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j)\}$ è ottenuta aggiungendo i.
Allora $v(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j)\}) - v(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\})$ è il contributo marginale di i alla coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\}$.
E $m_i^\sigma(v)$ indica esattamente ciò:
$m_i^\sigma(v) = v(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j)\}) - v(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\})$
(dove, come detto, j è l'unico elemento di N per cui $i = \sigma(j)$).

La formula per Φ ha la seguente interpretazione. Supponiamo che i giocatori entrino uno dopo l'altro in una stanza, seguendo l'ordine dato dalla permutazione σ. Ad ogni giocatore, entrando nella stanza, viene dato il suo contributo marginale alla coalizione che già si trovava nella stanza. Visto che non c'è ragione di privilegiare una permutazione rispetto ad un'altra, calcoliamo il valor medio di questi contributi marginali. Da qui la formula (ricordo che $n!$ è il numero di permutazioni su un insieme di n elementi). Si noti come Φ estende l'idea che soggiace all'assioma del "dummy player": sono i contributi marginali a determinare quanto viene assegnato a un giocatore, non solo nel caso speciale in cui egli sia un "dummy player".

La formula data può naturalmente essere usata per calcolare il valore Shapley, però ha il difetto di richiedere una quantità di calcoli enorme, se il numero totale dei giocatori è grande. Si noti che ad esempio è $10! = 3.628.800$ e quindi se abbiamo un gioco con 10 giocatori questo è il numero di addendi della somma che dobbiamo calcolare applicando la formula. Esistono delle formule più efficienti, ma non approfondiremo questa tematica. Cito però almeno quella classica, che richiede un po' meno calcoli di quella vista (s è il numero di elementi di S ed n è il numero di elementi di N):

$$\Phi_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}(v(S) - v(S \backslash \{i\}))$$

Se però il gioco è "piccolo", la prima formula che abbiamo visto ci permette di calcolare il valore Shapley abbastanza facilmente. Vediamo un esempio.

Esempio 8.3 Consideriamo il gioco introdotto nell'esempio 8.1. Cioè: $v(1) = v(2) = v(3) = 0$; $v(1,2) = v(1,3) = 4$; $v(2,3) = 6$; $v(1,2,3) = 20$.
Costruiamo la tabella seguente, dove nella prima colonna mettiamo le varie permutazioni possibili dei tre giocatori, mentre nella colonna "intestata" con i mettiamo i guadagni marginali attribuiti al giocatore i nelle varie permutazioni possibili. Le due ultime righe contengono le somme dei guadagni marginali e poi tali valori divisi per 6 (ovverossia 3!), vale a dire il valore Shapley. Si noti che $\Phi_2 = \Phi_3$, come richiesto dalla proprietà di simmetria.

permutazione	1	2	3
123	0	4	16
132	0	16	4
213	4	0	16
231	14	0	6
312	4	16	0
321	14	6	0
totale	36	42	42
valore Shapley	6	7	7

Per alcuni giochi è possibile determinare il valore Shapley molto più semplicemente, pur di sfruttare caratteristiche specifiche del gioco. Vorrei citare almeno un caso, che è anche il più famoso:

Esempio 8.4 [Gioco dell'aeroporto] Sia dato un aeroporto in cui atterrano differenti tipi di aereo che richiedono una pista di lunghezza differente a seconda delle loro caratteristiche: si vuole determinare come ripartire il costo di costruzione e manutenzione della pista tra gli aerei che la utilizzano.
Prima di tutto, precisiamo che i giocatori saranno gli atterraggi[18] e non gli aerei. Gli atterraggi possono essere raggruppati a seconda della lunghezza di pista necessaria in t sottoinsiemi disgiunti $N_1, N_2, \ldots, N_t$ in modo che gli aerei del sottoinsieme N_i richiedano una pista di costo C_i con $C_i < C_{i+1}$.
Otteniamo un gioco (dei costi) assegnando ad ogni coalizione il costo della pista necessaria all'atterraggio che, fra tutti quelli della coalizione, richiede la pista più lunga, cioè:

$$c(S) = C_{j(S)} \quad \text{dove} \quad j(S) = max\{i|S \cap N_i \neq \emptyset\}$$

Possiamo ottenere un TU-game semplicemente definendo $v(S) = -c(S)$. Si può dimostrare che il valore Shapley di ogni atterraggio corrisponde alla ripartizione dei costi ottenuta nel seguente modo:

- Il costo del primo tratto di pista C_1 è diviso tra tutti gli atterraggi, poiché tutti gli aerei lo utilizzano
- il costo del secondo tratto $(C_2 - C_1)$ è diviso tra gli atterraggi che lo utilizzano, ovverossia quelli di $N_2 \cup N_3 \cup \ldots \cup N_t$
- etc.
- l'ultimo tratto, di costo $C_t - C_{t-1}$, è suddiviso tra gli atterraggi del gruppo N_t che sono gli unici ad usarlo

Naturalmente, le persone giuridiche che pagheranno questi costi saranno le compagnie proprietarie degli aerei che effettuano gli atterraggi.

La regola qui descritta ha il pregio di essere molto meno dispendiosa, in termini di calcoli richiesti, rispetto alla formula generale per il valore Shapley. Per di più ha anche una ovvia interpretazione, che è interessante di per sé: il costo di ogni tratto di pista è equamente ripartito tra tutti e soli gli apparecchi che lo utilizzano. Vale a dire, ciascuno paga solo per il servizio che usa effettivamente. Non solo, ma ognuno contribuisce in ugual misura perché ognuno lo utilizza in ugual misura. Si tratta di un principio generale, applicabile nel caso dei cosiddetti costi (o guadagni) decomponibili.

[18] Più propriamente: gli atterraggi che avvengono in una data unità di tempo, ad esempio un anno (in tal caso, per quanto riguarda i costi di costruzione, verrà considerata la quota annua di ammortamento).

Vorrei fare notare, a conclusione della presentazione del valore Shapley, che non vanno sottovalutate le difficoltà a soddisfare delle proprietà che possano essere considerate di valenza "indiscutibile". Si pensi alla condizione di simmetria ed a quella di efficienza. Se prendiamo un gioco (superadditivo, quindi la condizione di efficienza merita davvero questo nome) quale il gioco di maggioranza, queste due proprietà sono sufficienti a determinarne univocamente la soluzione, che è naturalmente quella che assegna $1/3$ a ciascun giocatore. Naturalmente questa allocazione non può appartenere al nucleo, visto che è vuoto, e quindi essa soffre di una instabilità intrinseca. Quindi, anche condizioni "ovvie" ed apparentemente innocue possono portare a difficoltà.

Aggiungo che la condizione per cui un "dummy player" non riceve nulla di più di quanto non riesca ad ottenere da solo non è altro che un modo minimale di introdurre il principio che quanto uno ottiene dipende dal contributo che è in grado di apportare alla "impresa comune" costituita dal gioco v: "ad ognuno secondo i suoi meriti". Che poi dal combinato disposto di questa condizione e delle altre (in particolare, l'additività) segua che il valore Shapley assegni a ciascun giocatore esattamente il contributo marginale medio è un fatto tecnicamente interessante ed intrigante, ma dal punto di vista dei principi non è l'aspetto più significativo.

Abbiamo visto l'approccio assiomatico classico al valore Shapley. A dire il vero, il sistema di assiomi usato non è identico a quello originariamente proposto da Shapley stesso, ma le differenze sono di "tecnologia matematica", non hanno un importante carattere di sostanza. Un po' come le differenze che esistono fra la simmetria e la condizione di anonimità, o tra diverse formulazioni della condizione di "dummy player" e della proprietà connessa (ad esempio, si può parlare di "null player", che dal nome dovrebbe già far capire cosa significhi). Non voglio dire che questi aspetti siano completamente privi di interesse[19], ma ne colloco sicuramente l'importanza ad un livello subordinato. E' molto più interessante esaminare approcci al valore Shapley radicalmente diversi. Osservazione incidentale: lo stesso tipo di ragioni mi inducono a non indicare come possa essere dimostrato il teorema di Shapley, anche se la dimostrazione usuale richiede l'introduzione di costrutti di un certo interesse. La dimostrazione è comunque disponibile su web. WEB

A mio parere, almeno un paio[20] di altri approcci al valore Shapley devono essere menzionati: l'assiomatizzazione di Young (1988) e l'idea di potenziale di Hart e Mas-Colell (1989). Young ha dimostrato che il valore Shapley è l'unica

[19] Si noti, a questo proposito, che la simmetria è una condizione che riguarda i giocatori di un dato gioco, mentre l'anonimità pone in relazione giocatori di due giochi diversi.

[20] Segnalo anche che vi è una interessante idea di Roth (1977) che collega il valore Shapley all'idea di "utilità attesa" e merita almeno di essere citata.

soluzione Ψ tale che su $\mathcal{SG}(N)$ soddisfi le condizioni di Anonimità, Efficienza e la condizione di Forte Monotonia[21], descritta nell'assioma seguente:

Assioma 8.5 (Forte Monotonia) *Per ogni coppia di giochi $v, w \in \mathcal{SG}(N)$ e per ogni giocatore $i \in N$ per cui si abbia*

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq w(S \cup \{i\}) - w(S) \quad \textit{per ogni coalizione } S \subseteq N,$$

si ha:

$$\Psi_i(v) \geq \Psi_i(w)$$

La caratterizzazione assiomatica di Young è a mio parere molto significativa perché va al cuore di un problema: mette chiaramente in evidenza che il valore Shapley è *determinato* dai contributi marginali di un giocatore (se ho due giochi, v e w, in cui i contributi marginali di un giocatore sono identici, per una soluzione che rispetti anche il *solo* assioma di Forte Monotonia si avrà che quanto questa soluzione assegna a questo giocatore è lo stesso in ciascuno dei due giochi). Uno può ritenere che una assunzione di questo tipo non sia ragionevole, magari per via del contesto specifico in cui si trova a cercare di applicare una procedura allocativa, ma certo è difficile negare che sia una condizione significativa. Un altro pregio della caratterizzazione di Young è che non fa ricorso esplicito, diretto, alla condizione di additività (la quale ovviamente vale, visto che comunque si ottiene il valore Shapley!). Il che ci potrebbe indurre ad essere meno scettici sull'uso del valore Shapley, per lo meno per quanto riguarda le perplessità derivanti dalla condizione di additività.

Un approccio completamente diverso è stato proposto da Hart e Mas-Colell: si tratta di caratterizzare il valore Shapley mediante l'idea di *potenziale*. Essi hanno mostrato che si può trovare una funzione $P = P(N, v)$, definita per ogni gioco v definito su un qualsiasi insieme di giocatori, con le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} D^i P(N,v) & = & P(N,v) - P(N \backslash \{i\}, v) \\ \sum_{i \in N} D^i P(N,v) & = & v(N) \end{cases}$$

e tale per cui $P(\emptyset) = 0$ (quest'ultima è una condizione di normalizzazione).

Non solo, hanno anche dimostrato come una siffatta funzione sia *unica* ed inoltre che $D^i P(N, v)$ non è altro che il valore Shapley del gioco v per il giocatore i.

Per chi abbia un poco di confidenza con la fisica, dovrebbe essere chiaro il perché del nome "potenziale" assegnato alla funzione P. Infatti, l'espressione $D^i P(N,v) = P(N,v) - P(N \backslash \{i\}, v)$ può essere vista come una sorta di versione

[21]Spesso questa assiomatizzazione viene descritta su $\mathcal{G}(N)$, ma è valida anche su $\mathcal{SG}(N)$, come provato in Young (1988).

discreta della "derivata" rispetto alla variabile i, ed il fatto che essa non sia altro che il valore Shapley per il giocatore i nel gioco v, ci dice che appunto il 'valore Shapley, che ad ogni gioco v associa un *vettore* con n coordinate, lo si può ottenere dalla funzione *scalare* P che ad ogni gioco associa un singolo numero. Esattamente come nella teoria della gravitazione classica il campo gravitazionale (ad ogni punto associa una forza, ovvero un vettore) può essere ricavato (calcolando le derivate parziali) a partire dal potenziale gravitazionale (che ad ogni punto associa uno scalare, ovvero un numero).

Ho voluto dilungarmi sul valore Shapley per rendere evidente un aspetto importante della TdG: si affronta un dato problema da punti di vista diversi, a volte molto diversi. E' come se guardando da prospettive diverse si fosse in grado di mettere in evidenza profondità del concetto e connessioni che non sarebbero altrettanto evidenti se si usasse un unico angolo visuale. Ad esempio, la monotonia ci permette di vedere che la condizione di additività può essere sostituita da condizioni che possono essere più accettabili, ma che l'hanno come conseguenza inevitabile. Questo fatto può essere, per così dire, confortante, anche perché la condizione di additività, oltre alle critiche più o meno fondate alla idea "in sé", ha anche un ruolo evidentissimo (per chi abbia avuto un poco di training matematico) di condizione "ad hoc" per poter lavorare bene sulla struttura di spazio vettoriale che hanno i TU-games. Il fatto che si possa giungere al valore Shapley per altre vie, meno sospettabili di usare proprietà "ad hoc", può rendere più accettabile questa idea di soluzione. Non solo, ma sistemi assiomatici diversi possono avere un grado diverso di "accettabilità immediata" o pregi particolari di fronte ad un problema applicativo concreto. Ad esempio, in una analisi effettuata sulla ripartizione dei costi per l'uso dell'infrastruttura ferroviaria (di cui parlerò più diffusamente nel capitolo 9), la condizione di additività aveva un appeal particolare, in quanto permette una naturale decomposizione dell'infrastruttura in sue varie componenti e sembra ragionevole che i costi imputati a ciascuno per l'uso delle varie componenti vengano sommati fra loro: tutto ciò corrisponde, tecnicamente, a scrivere il dato gioco (di costo) come somma di vari giochi e quindi l'additività della soluzione era un fatto pregevole.

Per quanto riguarda le nuove prospettive aperte dall'affrontare il valore Shapley da diverse angolazioni, vorrei evidenziare un paio di aspetti relativi all'approccio di Hart e Mas-Colell, oltre a quanto già osservato a giustificazione del termine "potenziale", che trovo affascinante.

Uno, è l'accento posto sul problema della coerenza della soluzione. Si immagini di avere un gioco v e di avere determinato il suo valore Shapley. Si supponga ora che alcuni dei giocatori chiedano di "lasciare il gioco", portando con sé la "dote" costituita da quanto il valore Shapley assegna a ciascuno di loro. E' immediatamente evidente che "quanto resta" non è altro che un nuovo TU-game, solo che ha un numero ridotto di giocatori ed è naturale[22] immaginare che il payoff per una coalizione S che prima conteneva qualcuno dei giocatori “usciti dal gioco” non sia altro che il payoff originario della coalizione, detratta la dote che hanno portato via i giocatori “usciti”. Per questo nuovo TU-game con un numero ridotto di giocatori, potremo calcolare il suo valore Shapley: a questo punto per ciascuno dei giocatori presenti sono disponibili due numeri, ovvero il “vecchio” valore Shapley e quello “nuovo”. Sarebbe confortante se questi due numeri fossero uguali. Ebbene, così è. Questa è la condizione di coerenza che emerge in modo naturale dall'approccio di Hart e Mas-Colell.

La condizione di coerenza è stata ampiamente utilizzata in caratterizzazioni assiomatiche di vari giochi (cooperativi e non cooperativi: ad esempio, l'equilibrio di Nash è stato caratterizzato da Peleg e Tijs (1996) usando in modo essenziale la proprietà di coerenza). La condizione di coerenza può essere legata ad una problematica più vasta: cosa avviene di una soluzione per un TU-game quando cambia il numero di giocatori coinvolti (ed i $v(S)$ cambiano di conseguenza in modo “ragionevole”)? D'altra parte, pur se la condizione di coerenza è un'idea importante, ha anche una sua intrinseca debolezza: può non essere ovvio, scontato, quale sia il gioco “ridotto” (cioè con un giocatore in meno) cui applichiamo la condizione di coerenza. Quindi si apre lo spazio per ulteriori approfondimenti: in effetti, con una appropriata definizione di cosa sia un gioco “ridotto” si possono caratterizzare altre soluzioni.

Un altro punto interessante che emerge dall'approccio via “potenziale” è conseguenza diretta del fatto che il valore Shapley per il giocatore i nel gioco v è $D^iP(N,v)$. Ora, per la determinazione univoca di $P(N,v)$ (che ci serve in quanto è $D^iP(N,v) = P(N,v) - P(N\backslash\{i\},v)$), abbiamo bisogno di conoscere solo il gioco v (in effetti, ci servono anche tutti i suoi “sottogiochi”, ma questa informazione è già tutta contenuta in v). Questo fatto potrebbe sembrare poco rilevante, ma osservo che le altre due caratterizzazioni assiomatiche che abbiamo visto ci richiedono di imporre la validità degli assiomi su classi piuttosto “ampie” di giochi. Io ho introdotto entrambe le assiomatizzazioni sulla classe $\mathcal{SG}(N)$. Questa scelta non è obbligata: ad esempio, entrambe le assiomatizzazioni restano valide se si suppone che gli assiomi valgano sulla classe $\mathcal{G}(N)$. Oppure, si può fare riferimento alla classe $\mathcal{G}$ di “tutti” i giochi superadditivi, nello stile della assiomatizzazione originaria di Shapley (si noti che la classe $\mathcal{SG}(N)$ indica tutti i giochi superadditivi *che hanno N come insieme dei giocatori*, dove questo insieme N si assume “fissato”). Non è casuale lavorare su classi “ampie” di giochi: per assiomi assolutamente cruciali come quello di additività o come l'assioma di monotonia forte[23], è fondamentale permettere

[22]Ma non certo “obbligatorio”. Vale la pena di immaginare ragioni per cui *non* debba essere necessariamente così.

[23]Stesso discorso vale, nel contesto dei problemi di contrattazione, per l'assioma di

a questi assiomi di estrinsecare la loro forza operando, appunto, su una ampia classe di giochi. Anticipo qui che, ad esempio, l'assioma di additività *non* permette di caratterizzare il valore Shapley (congiuntamente alle condizioni di simmetria, efficienza e "dummy") sulla classe dei cosiddetti giochi semplici (ce ne occuperemo un poco in dettaglio in seguito), il che mostra come possa essere rilevante la scelta della classe di giochi sulla quale si presuppone che operino gli assiomi adottati. Dobbiamo allora forse considerare negativamente questi assiomi che operano in modo "trasversale" su una classe di giochi? Non necessariamente, però essi pongono un problema: se io devo, ad esempio, assegnare un valore ad un gioco, potrebbe essere inappropriato che questo valore possa dipendere da quanto ampia sia la classe dei giochi su cui si lavora. Anche perché, se uno è seriamente interessato ad aspetti applicativi, può emergere un problema. Supponiamo di voler risolvere un problema di allocazione di costi usando la strumentazione teorica offerta dalla TdG: se, in particolare, siamo interessati ad usare il valore Shapley, potrebbero sorgere dei dubbi sulla sensatezza nell'applicazione di questo strumento in quanto la classe dei problemi a cui pensiamo di applicarlo può individuare una famiglia di TU-games *significativamente più ristretta* della classe costituita, ad esempio, da tutti i giochi superadditivi. Un esempio molto semplice in questo senso lo abbiamo visto nel contesto dei problemi di contrattazione: la classe degli insiemi che otteniamo come "immagine" di tutte le possibili strategie correlate utilizzabili in un gioco finito in forma strategica è un sottoinsieme proprio della classe dei sottoinsiemi convessi e compatti di $\mathbb{R}^2$ (infatti, otteniamo i soli *poliedri* compatti e convessi). Un altro esempio, sulla stessa falsariga, è dato dal caso in cui uno fosse interessato soltanto alla classe dei giochi semplici, come già anticipato poco sopra. Il fatto che la caratterizzazione di Hart e Mas-Colell richieda, per poter essere messa in opera, solo la conoscenza del gioco v e dei suoi sottogiochi, è quindi un risultato di non poco interesse.

Osserviamo come, anche volendo rimanere nel contesto delle soluzioni più classiche e più usate, vi sarebbero da citare altri concetti di soluzione, ma non è possibile farlo per un problema di congruenza tra la finalità di questo libro e lo spazio disponibile. Ricordo comunque almeno che, oltre alla soluzione originariamente proposta da von Neumann e Morgenstern (già citata), c'è una categoria di soluzioni che va dal "bargaining set[24]" fino al nucleolo, passando

indipendenza dalle alternative irrilevanti.

[24]Osservo come il bargaining set formalizzi un aspetto che vorrei ricordare, non tanto per dare un'idea di questa soluzione, quanto per mettere in evidenza una debolezza nella idea di nucleo. Si pensi al gioco di maggioranza e al fatto che la allocazione $(1/3, 1/3, 1/3)$ non sta nel nucleo. Perché non ci sta? Perché, ad esempio, la coalizione $\{1, 2\}$ può "obiettare" rispetto a questa spartizione, visto che i suoi giocatori sono in grado di ottenere di meglio "da soli". Ma la storia non finisce qui, come l'idea di nucleo invece implicitamente suggerisce: in effetti, alla *obiezione* della coalizione $\{1, 2\}$ il giocatore 3 può rispondere con una *contro-obiezione*, alleandosi per esempio con 1, etc. Quindi, non è poi così ovvio che si debba

attraverso il 'kernel". Rinvio a testi specializzati chi volesse saperne di più, sia su questo che su altri aspetti dei giochi cooperativi: Owen (1968), Driessen (1988), Myerson (1991), Osborne e Rubinstein (1994) e Peters (1997). Ricordo inoltre come esista una letteratura importante che si colloca, per così dire, a metà strada fra i giochi cooperativi e quelli non cooperativi: mi sto riferendo al problema della *formazione* delle coalizioni, che è in questo momento oggetto di intensa ricerca. Per questo, segnalo il sito web del "Coalition Theory Network": http://www.feem-web.it/ctn/index.html.

Vorrei chiudere questo capitolo occupandomi un poco di una importante *sottoclasse* di giochi cooperativi, i cosiddetti *giochi semplici*. Un TU-game viene detto semplice se, per ogni coalizione S, il valore assunto da $v(S)$ è 0 oppure 1. A volte si aggiunge la condizione che sia $v(N) = 1$, cosa che faccio anch'io. Una interpretazione estremamente diretta dei giochi semplici è che il valore 1 significa che la coalizione S è "vincente", mentre 0 ci dice che è "perdente". Possiamo, ad esempio, pensare ad una situazione in cui le regole di votazione dicono quali sono i gruppi di giocatori in grado di far passare una mozione (o una legge, o di assumere una decisione). Da questo punto di vista, l'esempio classico è offerto dal Consiglio di Sicurezza dell'ONU. Abbiamo che N è composto da 15 Stati, dei quali 5 sono USA, Russia, Francia, Regno Unito e Cina (i "membri permanenti"[25]) ed i restanti 10 sono scelti periodicamente dall'Assemblea Generale (eletti per turni biennali non immediatamente rinnovabili). Per essere approvata, una mozione deve ottenere il consenso di almeno 9 membri e non deve essere soggetta al veto di nessuno dei membri permanenti. E' immediato quindi che le coalizioni "vincenti" (nel senso che sono in grado di fare approvare una mozione) devono contenere tutti i membri permanenti ed almeno altri 4 fra gli altri Stati. Un altro esempio "classico" riguarda una S.p.A.: le coalizioni vincenti sono quelle costituite da decisori che, sommando le loro quote, raggiungono la maggioranza assoluta. Altro esempio, più semplice, è quello di una organizzazione deliberante in cui le decisioni debbano essere prese a maggioranza assoluta dei membri (o con una qualche forma di maggioranza qualificata). In questo caso, le coalizioni vincenti sono quelle il cui *numero* di giocatori è tale da soddisfare le condizioni "statutarie" vigenti (un esempio dettagliato è fornito dal "gioco di maggioranza" presentato nell'esempio di pagina 194).

Vale la pena di notare come l'interpretazione dei giochi semplici che li con-

---

scartare l'allocazione $(1/3, 1/3, 1/3)$ solo perché c'è chi può obiettare! Ben diverso sarebbe il discorso se non vi fosse possibilità di controbattere a questa obiezione. Il bargaining set vuole proprio tenere conto di queste considerazioni.

[25] Permanenti fino a un certo punto... Al tempo in cui Shapley e Shubik (1954) hanno introdotto questa applicazione, c'era la Unione Sovietica e la cosiddetta "Cina Nazionalista"; tra l'altro, allora il numero complessivo dei membri del Consiglio di Sicurezza era pari a 11 e la maggioranza richiesta era pari a 7.

nette a "regole di votazione" non sia l'unica. Una differente interpretazione potrebbe essere di natura medica. Considerata una malattia, possiamo individuare i giocatori come i "sintomi" e l'assegnazione del valore 1 ad un gruppo di sintomi potrebbe voler dire che la presenza di quel gruppo di sintomi ci garantisce che siamo in presenza di quella malattia (anche se questo appena descritto rappresenta senza dubbio una iper-semplificazione del problema effettivo di diagnosticare la presenza di una malattia! Osservo, d'altronde, che la "malattia" potrebbe anche riguardare un problema di malfunzionamento di un calcolatore, o di un macchinario: vedi ad esempio la trattazione della "reliability theory" in Ramamurthy (1990)).

Perché dedicare spazio a giochi semplici? Per almeno due ragioni, che adesso vediamo.

Il primo motivo ha a che fare con l'interpretazione di un TU-game. Dovrebbe essere evidente che il passaggio dai TU-games alla sottoclasse dei giochi semplici comporta un mutamento importante: la interpretazione che abbiamo dato dei $v(S)$[26], in termini di "utilità trasferibile" o (più biecamente) di "soldi", non è più proponibile. Vale la pena, quindi, chiedersi se le precedenti considerazioni fatte a sostegno dei concetti di soluzione che abbiamo visto possano considerarsi valide a fronte di questa nuova interpretazione.

Faccio solo un breve esempio, in riferimento al nucleo, per focalizzare il tipo di problematiche (non intendo suggerire che siamo di fronte ad un problema particolarmente difficile). Il nucleo individua una classe di allocazioni che godono di una significativa proprietà di stabilità. Ma *cosa* allochiamo? Non certo denaro! Forse "potere"? Può essere: potremmo immaginare che "frazioniamo" il potere (di far passare una mozione, ad esempio) fra i giocatori, tenendo conto in qualche modo di loro possibili diverse possibilità di aggregarsi per fare passare una mozione. Sembra "reggere", almeno in prima approssimazione, una tale interpretazione. E' plausibile che la si debba cambiare quando si passa ad un'altra interpretazione, come ad esempio quella di carattere medico che ho indicato prima (vedasi anche le considerazioni relative ai "microarray" nel prossimo capitolo). Riassumo tutto ciò con un invito ad essere vigili quando si applicano (o si vedono applicare) i giochi semplici, in quanto molte considerazioni fatte nei TU-games incorporano la visione "economicistica" da cui gran parte della TdG trae alimento. Può esservi il rischio di trasferire, per inerzia o pigrizia che dir si voglia, motivazioni e considerazioni ad un contesto improprio.

Il secondo punto, come ho già accennato in precedenza, è di carattere formale. Abbiamo visto che il valore Shapley può essere caratterizzato, su $\mathcal{SG}(N)$, dai quattro assiomi di anonimità, efficienza, "dummy player" ed ad-

[26]Da un punto di vista formale, un TU-game non è null'altro che l'elencazione ordinata dei 2^n numeri $v(S)$, al variare di S fra i sottoinsiemi di N

ditività. Ora, è ovvio che queste quattro proprietà valgano anche per i giochi semplici superadditivi, visto che sono una sottoclasse di $\mathcal{SG}(N)$. Non è però affatto vero che questi assiomi *caratterizzino* il valore Shapley sulla classe dei giochi semplici superadditivi. Il lettore è invitato, dal problema 48, a costruire lui stesso un esempio di "soluzione" diversa dal valore Shapley che gode delle quattro proprietà. Si può facilmente individuare dove stia la difficoltà: l'assioma di additività non ha nessun mordente sulla classe dei giochi semplici, in quanto la somma di due giochi semplici non è un gioco semplice (si ricordi la condizione, che abbiamo imposto, che $v(N) = 1$).

Naturalmente nulla ci vieta di continuare ad utilizzare il valore Shapley sulla classe dei giochi semplici. Ma dobbiamo essere consapevoli che la caratterizzazione assiomatica classica (di Shapley) *non determina* il valore Shapley sulla sottoclasse dei giochi semplici. Va da sé che sono state trovate altre caratterizzazioni assiomatiche del valore Shapley per la classe dei giochi semplici. Il lettore interessato può consultare su questo testi specializzati, come Roth (1988).

Chiudo osservando che il valore Shapley, ristretto ai giochi semplici, è stato proposto come *indice di potere* (idea avanzata da Shapley e Shubik (1954)). A dire il vero, vi è un altro "indice di potere": l'indice di Banzhaf (o di Banzhaf-Coleman: i testi originari sono Banzhaf (1965) e Coleman (1971)), che rivaleggia con il valore Shapley. Può essere interessante notare cosa avviene nel caso, citato, delle S.p.A. Come è noto, spesso si assiste alla presenza di gruppi di controllo che assumono, di fatto, il "governo" di una S.p.A. pur senza possedere la maggioranza assoluta delle azioni, sfruttando il fatto che il resto dell'azionariato è "polverizzato". Consideriamo allora un esempio ipotetico: una azienda ha emesso 300 azioni, delle quali 100 sono possedute da un azionista, mentre le rimanenti 200 sono possedute (una ciascuno) da altrettanti azionisti. Ebbene, se calcoliamo il valore Shapley di questo "grande azionista", otteniamo che esso vale circa 0.5 (per la precisione, 100/201), nonostante possieda solo 1/3 delle azioni. Quindi, l'uso del valore Shapley come indice di potere per giochi semplici offre una qualche possibilità interpretativa di ciò che viene normalmente osservato[27]. Stesso discorso vale, comunque, anche per l'indice di Banzhaf. Come livello di significatività superiore, sarebbe interessante poter valutare quale fra i due indici offra una migliore stima del "potere" dei singoli azionisti. Segnalo, in questa direzione, un interessante studio di Leech (2002), che cerca inoltre di dare un significato specifico di cosa si possa intendere per "potere" in questo contesto.

Il maggior numero di applicazioni degli indici di potere si è avuto nella

[27]Senza farsi troppe illusioni di realismo: osservo come il valore Shapley non tenga minimamente conto di problemi di comunicazione che certamente rendono i "piccoli azionisti" ancora più deboli di quanto stimato.

valutazione di quello che è, per l'appunto, il potere[28] di fare approvare una mozione in un consesso decisionale, in particolare laddove vi siano aspetti istituzionali che rendono non banale questa valutazione. Ciò può avvenire per la presenza di un consesso multicamerale, oppure per la presenza di membri con potere di veto (vedasi il già citato Consiglio di Sicurezza dell'ONU), o dotati di "pacchetti" di voti di diversa consistenza (esempio: il Consiglio dell'Unione Europea, più comunemente noto come Consiglio dei ministri).

[28]Si parla di potere, per così dire, astratto, cioè riguardante la struttura delle istituzioni, non le posizioni, preferenze, ideologie dei loro componenti in carne ed ossa.

Capitolo 9

Case study

In questo breve capitolo mi soffermerò su alcuni casi particolari (tre, per la precisione), scelti in modo piuttosto arbitrario. L'intento è quello di mostrare, per così dire, la TdG "al lavoro".

Pur se arbitraria, la scelta è stata fatta tenendo conto di alcuni fattori: la mia conoscenza dell'argomento; la scelta di problemi che non richiedessero una "tecnologia matematico-formale" eccessiva; la condizione che evidenziassero alcune problematiche nell'applicazione della TdG. In ogni caso, la visione offerta in questo capitolo sarà estremamente parziale, come avviene ogniqualvolta ci si occupa dello "studio di casi".

I primi due argomenti scelti rientrano nella classe dei problemi di allocazione di costi. Si tratta di una problematica pervasiva, che si presenta ogni qualvolta ci si trova di fronte a situazioni in cui più soggetti partecipano congiuntamente a sostenere i costi di una attività che, per vari motivi[1], non offre dei criteri ovvi di ripartizione dei costi complessivamente sostenuti.

Come può essere applicata la TdG ad un problema di allocazione di costi?

Possiamo premettere una considerazione: se stiamo parlando di allocazione di costi, possiamo pensare di trovarci all'interno di una organizzazione (più o meno rigidamente strutturata), che cerca un modo ragionevole, equo, praticabile, per distribuire i costi fra le varie componenti dell'organizzazione (possono essere persone fisiche o giuridiche, singoli o sotto-unità organizzative), cercando anche, se possibile, di fare in modo che il metodo utilizzato abbia effetti di stimolo per la collaborazione.

Questa osservazione è importante, perché serve a comprendere come lo strumento tecnico della TdG che è stato più spesso applicato per affrontare i problemi di "cost allocation" siano i giochi cooperativi: quando si parla di

[1] Ad esempio, perché non esiste un mercato. Oppure perché i criteri di spartizione non sono fissati per legge. O non vi è una tradizione consolidata. Osservo che questi citati sono esempi di vari possibili "quadri istituzionali" che ci offrono già la soluzione o un metodo di soluzione del problema di allocazione dei costi.

allocazione di costi in senso stretto, siamo tipicamente di fronte, come detto, ad una organizzazione (una azienda con le sue divisioni, un ateneo coi suoi dipartimenti, un consorzio che gestisca una strada privata, etc.). La ripartizione dei costi avviene quindi tipicamente attraverso un accordo (esplicito o tacito), che possiamo ragionevolmente ritenere vincolante. Il fatto che esso corrisponda, tra l'altro, ad una allocazione dei costi della "grande coalizione" dipende, oltre che dalle modalità specifiche dell'accordo stesso, anche dalla maggiore o minore possibilità che le componenti delle organizzazioni hanno di "svincolarsi", di "secedere". Se consideriamo le divisioni di un'azienda, o i dipartimenti in un ateneo, abbiamo una pratica impossibilità da parte delle sottounità di svincolarsi, anche se possono adottare dei comportamenti caratterizzati da vari gradi di conflittualità. Noto anche come, ad esempio nel caso di un consorzio per la gestione di una strada privata, le possibilità di secessione sono notevoli prima che la strada venga costruita, mentre dopo si riducono drasticamente.

Il primo caso che descriverò riguarda la suddivisione dei costi per la raccolta dei Rifiuti Solidi Urbani (RSU) all'interno di un consorzio di Comuni che si sia costituito appunto con questo scopo[2]. Questo è un ottimo esempio di problema per il quale la TdG, ed in particolare l'uso dei giochi cooperativi ad utilità trasferibile appaiono appropriati per affrontare il problema.

Innanzitutto, come detto prima, abbiamo una organizzazione. Non solo, ma va notato che i criteri da usare per la ripartizione dei costi sono fissati tipicamente a livello di Statuto o di Regolamento del Consorzio, e comunque sono oggetto di un accordo che vincola i membri del Consorzio. E' quindi soddisfatta quella che è una condizione "da manuale" per l'utilizzazione dei giochi cooperativi: la possibilità per i giocatori di sottoscrivere accordi vincolanti.

Un altro aspetto di rilievo entra in gioco: l'unità di valutazione dei costi è, naturalmente, di carattere monetario (euro). Ciò che è significativo è che possiamo, con buona ragione, assumere che i giocatori (che naturalmente saranno i Comuni, nel nostro caso) abbiano una stessa scala di valutazione per i soldi. Se può essere difficile trovare una scala di valutazione unica quando individui singoli si trovano ad esprimere le loro preferenze monetarie, è difficile immaginare[3] che per un Comune la scala di valutazione possa essere significativamente diversa da quella di un altro, proprio per la loro natura di soggetti rappresentativi di una comunità di individui.

Va osservato come questo tipo di problema abbia il pregio di avere i contorni ben definiti. Non solo: le metodologie adottate da vari consorzi si prestano bene ad una analisi comparativa, data l'omogeneità del problema. Proprio questa omogeneità dovrebbe riflettersi nel fatto che i metodi utilizzati si ispi-

[2]Al tempo in cui è stata effettuata la ricerca da cui queste note derivano, circa un terzo della raccolta degli RSU passava attraverso una organizzazione di tipo consortile.

[3]Ma non impossibile, naturalmente!

rino agli stessi principi ("assiomi"), o che per lo meno non manifestino profonde differenze, da questo punto di vista.

Il grosso problema che emerge, volendo applicare la TdG per ricavare criteri di allocazione dei costi, è che non sembra ovvio quanto possano valere i vari $c(S)$, cioè i costi per le varie coalizioni S, tranne nel caso in cui la coalizione S coincida con N, ovverossia l'insieme di tutti i giocatori, cioè l'insieme di tutti i Comuni del Consorzio. E' evidente che, alla chiusura del bilancio annuale, saranno disponibili il complesso delle spese sostenute (inclusi gli ammortamenti, accantonamenti, etc...), e quindi $c(N)$. Come facciamo a conoscere $c(S)$? Occorrerebbe che, in un mondo alternativo, si fosse costituito il consorzio dei Comuni appartenenti ad S, e che quindi fosse disponibile a fine anno il loro bilancio. Al di là dell'accenno scherzoso all'uso dei "mondi possibili" tipico della semantica in uso nelle logiche della conoscenza, siamo di fronte comunque ad una problematica tipica quando si voglia usare il metodo scientifico nell'ambito delle scienze sociali: le possibilità di "riprodurre l'esperimento", o comunque le possibilità di misurare "grandezze" che riteniamo rilevanti, possono essere molto ridotte.

Se non abbiamo nessuna informazione su $c(S)$, non abbiamo altra alternativa che dividere $c(N)$ in parti *uguali* fra i Comuni[4]. A meno che non facciamo riferimento a criteri di divisione dei costi che usino altra informazione, estranea a quanto abbiamo di rilevante per la TdG[5]. Un criterio di questo genere, molto usato in questo tipo di Consorzi, consiste nel dividere i costi fra i vari Comuni in modo proporzionale al numero di abitanti. Questo è un esempio di ciò che intendevo dire, riferendomi a criteri "esterni".

Volendo, possiamo comunque ricondurre questo criterio di ripartizione "entro la teoria" dei TU-game. Possiamo pensare che una *stima* dei costi dovuti a un gruppo di Comuni sia quello di assumere che essi siano proporzionali al numero di abitanti. Volendo fare due conti algebrici, possiamo chiamare $\alpha = \frac{c(N)}{P(N)}$ ed assumere che sia $c(S) = \alpha P(S)$, dove $P(S)$ indica la popolazione di un gruppo S di Comuni.

Se adottiamo questa interpretazione, ci troviamo di fronte ad un gioco cooperativo a pagamenti laterali con una struttura particolarmente semplice:

[4] Naturalmente si può trovare strana questa idea. Perché Tortona e Pontecurone dovrebbero pagare tanto uguale? La risposta può essere, molto banalmente, che stiamo sbagliando a considerare i Comuni come giocatori. Ma se siamo convinti che il modello trovato sia corretto, l'unico modo accettabile per individuare una spartizione è proprio quello di dividere in parti uguali. D'altro canto, c'è una naturale alternativa per quanto riguarda i giocatori: i singoli cittadini. Nulla da eccepire. Tra l'altro, alla fine, saranno i cittadini a sostenere i costi (mediante una tassa, od una tariffa). Qui, tuttavia, vogliamo concentrare l'attenzione sui soggetti giuridici che sono: 1) tenuti a fornire il servizio; 2) abilitati a costituire il Consorzio e ad assumere le decisioni connesse a questa scelta.

[5] Ovviamente potremmo avere anche sbagliato nella scelta del modello. Vedasi, a questo proposito, quanto detto nella nota precedente.

si tratta di un gioco *additivo*, nel senso che $c(S \cup T) = c(S) + c(T)$ ogni qual volta sia $S \cap T = \emptyset$. Il fatto che il gioco sia additivo, ha l'effetto che tutta una serie di soluzioni che, in genere, offrono allocazioni diverse, vengono a coincidere. Ad esempio, il nucleo di un gioco additivo è ridotto ad un solo punto, che viene a coincidere col valore Shapley. Ma non solo le due più note soluzioni per giochi TU coincidono: questo vale per molte altre. Infine, questa allocazione privilegiata non è altro che la ripartizione dei costi in modo proporzionale alla popolazione dei vari comuni.

Non occorre farsi ingannare dall'apparente banalità di quanto abbiamo appena detto: in questo modo abbiamo ricondotto un criterio che sembrava ignorare completamente la TdG ad una applicazione standard dei TU-game. D'altro canto, questa introduzione "a forza" della TdG passa attraverso una ipotesi, che i costi siano proporzionali alla popolazione, che rappresenta una forte distorsione della realtà: in questo modo ignoriamo i costi fissi, che non solo ci sono, ma addirittura sono probabilmente la ragione più importante per la creazione di un consorzio! Mentre un consorzio è giustificato proprio in forza dei risparmi che si possono avere nella gestione di questa attività (in termini formali, ci aspettiamo che c sia subadditiva, ovvero: $c(S \cup T) \leq c(S) + c(T)$ per coalizioni disgiunte).

Un discorso analogo potrebbe essere fatto per spiegare come mai in alcuni Consorzi si effettui la ripartizione dei costi in proporzione alla quantità di rifiuti prodotta. Semplicemente si sta usando un'altra approssimazione per i $c(S)$, la quale condurrà di nuovo ad un gioco cooperativo additivo, come nel caso in cui il parametro usato sia la popolazione. Vi sono un paio di considerazioni che varrebbe la pena di fare. Una è che da certi punti di vista l'uso del parametro "rifiuti prodotti" è una approssimazione migliore dei costi variabili, mentre non lo è per quanto riguarda i costi fissi (tanto è vero che certi consorzi usano un "mix" di questi due criteri, con percentuali variamente fissate). L'altra considerazione è che questa seconda approssimazione, pur se ancora rozza, comporta dei costi addizionali[6] che possono non essere trascurabili: occorre quanto meno un sistema di pesatura che valuti le quantità di RSU conferite per lo smaltimento da parte dei singoli Comuni. Si noti anche che alcuni Consorzi comprendono Comuni di dimensioni molto piccole, per cui un singolo camion compattatore si trova a raccogliere rifiuti da vari Comuni (per ovvie ragioni di efficienza): quindi, abbiamo un ulteriore sottoproblema di stima (aspetto che d'altronde emerge anche usando il criterio della popolazione: in Comuni a forte vocazione turistica la semplice verifica delle liste dell'anagrafe può introdurre delle distorsioni intollerabili, e quindi anche qui si pone un problema di stima della "effettiva" popolazione servita). Ultimo commento: da dati che erano

[6] Rispetto a quelli trascurabili di una verifica fatta all'anagrafe, qualora si utilizzi l'approssimazione basata sulla popolazione.

stati resi disponibili da vari consorzi, compaiono scostamenti significativi, nella applicazione di un criterio anziché un altro: differenze dell'ordine del 20-30% non erano affatto infrequenti.

Volendo evadere da queste gabbie costituite da grossolane approssimazioni, una strada possibile sarebbe quella di un'accurata analisi e controllo delle varie voci di costo. Si tratta di un impegno non indifferente, ma che comunque è fattibile (come testimoniato da realtà che l'hanno effettivamente messo in opera, ad esempio la ASMT di Tortona). Si possono così monitorare i costi associati ai vari servizi, sia quei costi direttamente addebitabili ai singoli Comuni, sia i vari tipi di costi congiunti: ad esempio, possono essere stimati direttamente i costi dovuti alla percorrenza dei camion/compattatori, permettendo così di assegnare non solo i costi diretti quali la benzina, i lubrificanti, il costo di personale (autisti ed eventuali ausiliari per la raccolta), ma anche quelli indiretti di manutenzione dei veicoli. Simile discorso vale per i costi di personale: il suo costo in parte sarà addebitabile direttamente ai singoli Comuni, mentre ad esempio personale amministrativo può essere imputato o come servizio congiunto per tutti i Comuni, oppure come servizio che può essere ripartito in modo proporzionale all'uso (si pensi al personale addetto alla manutenzione degli automezzi).

Se pure questa metodologia di analisi dei costi è praticabile, non va trascurato il fatto che essa stessa costituisce un costo aggiuntivo per il Consorzio.

Troviamo così, già in questo "semplice" esempio dei Consorzi per la raccolta degli RSU, un paio di temi che si incontrano tipicamente laddove si vogliano applicare i TU-game a problemi di allocazione di costi. Uno è che ci si trova di fronte ai "soliti ignoti", ovverossia i $c(S)$ che raramente possiamo assumere davvero come dati: spesso risulta difficile stimarli. Connesso a questo, se possiamo ritenere che la conoscenza dei $c(S)$ e, quindi, la possibilità di applicare la ricca dotazione concettuale che è fornita dalla TdG, ci permette di effettuare una ripartizione "più giusta" dei costi fra i giocatori, emerge in tutta evidenza un "trade-off" fra la ricerca di una maggiore "giustizia" ed i costi che questo comporta.

Può essere allora utile cercare di considerare attentamente questi costi aggiuntivi, e vedere se esistano possibilità di contenerli. Ad esempio, nel caso di cui sto parlando, potrebbe essere preziosa una stima ragionevole dei costi che si possa ottenere con non troppo sforzo. Vorrei segnalare, a questo proposito, che proprio nell'ambito di un progetto di ricerca sui Consorzi per gli RSU di cui mi ero occupato, è stato sviluppato un modello (da Moretti (2004)) che permette di avere una buona stima, sulla base del recupero di alcuni dati essenziali (tipo: numero di cassonetti utilizzati e loro dislocazione, numero e tipo di compattatori usati, strutturazione urbanistica dei Comuni, etc.) che possono essere ricavati agevolmente mediante un questionario da compilare da parte dei singoli Comuni. L'accordo fra i costi dedotti in questo modo ed i costi ottenuti là dove era stata fatta un'analisi accurata, si è rivelato molto buono.

Non mi inoltro nella discussione di quale potrebbe essere il metodo più opportuno di divisione dei costi: mi limito ad osservare come l'evidenza osservativa disponibile[7] mostrasse criteri di suddivisione molto "semplicistici". Come già detto, essi fondamentalmente si riducevano ad una ripartizione proporzionale alla popolazione o alla quantità di rifiuti prodotta (o ad un mix fra i due), anche se c'era qualche caso di "zonazione" che poteva essere interpretato come tentativo di approssimare in modo più accurato la funzione dei costi.

Non ci è stato quindi possibile trovare evidenze osservative dell'uso di criteri riconducibili a "soluzioni" proposte dalla TdG. Contrariamente a quanto è capitato ad Aadland e Kolpin (1998). Essi hanno analizzato i metodi in uso per la ripartizione dei costi per la manutenzione di canali di irrigazione, riuscendo a ricondurli a due principi fondamentali: un criterio (average cost sharing) di proporzionalità ed uno (serial cost sharing) di fatto riconducibile all'uso del valore Shapley.

Ritornando ai "nostri" consorzi, naturalmente si potrebbero proporre dei criteri, ispirandosi alla TdG. Nella ricerca fatta, relativa ai Consorzi per RSU, in realtà non abbiamo formulato nessuna proposta (neppure a livello teorico), in quanto non era questo il fine che ci proponevamo con l'indagine. Volendo comunque esprimere qualche considerazione sul lato propositivo, osservo che non si deve pensare che il compito dell'esperto di TdG sia quello di indicare quale sia "la" soluzione da applicare. Ciò che è realmente utile è la "expertise", che permette di analizzare il problema e valutare quali sono i principi rilevanti, e quindi evitare l'uso di criteri di ripartizione dei costi che siano fondati su ragioni arbitrarie (per esempio, "aritmetiche").

Per quanto mi riguarda, ciò che ho imparato è che in un problema di allocazione di costi può essere davvero significativo analizzare il trade-off che si crea tra una maggiore "giustizia" nella suddivisione dei costi, ed i costi addizionali che comporta questa esigenza, che richiede una migliore conoscenza dei costi: tutto ciò ci ha spinto a proporre, in Moretti e Patrone (2004), i TUIC-games, un modello "ampliato" di TU-game, che permettesse di considerare effettivamente il trade-off sopra citato.

Un elemento di raccordo fra il primo "caso" ed il secondo è proprio dato dall'aspetto del reperimento dei dati, che senza dubbio può rappresentare uno scoglio contro il quale si vanno a infrangere i tentativi di applicare strumenti analitico-formali di TdG. Anche in un un altro progetto di ricerca, in cui ci proponevamo di analizzare come si potessero addebitare ai singoli "transport

[7]Mi riferisco agli Statuti o Regolamenti di Comuni che avevamo avuto a disposizione, o perché pubblicamente disponibili in rete, o perché gentilmente inviatici dai Consorzi.

operators" i costi per l'uso dell'infrastruttura ferroviaria[8], una difficoltà rilevante che abbiamo avuto è stata quella di ottenere delle stime sufficientemente accurate e "fungibili" dei costi (di costruzione, mantenimento e rinnovo) delle varie "componenti" della infrastruttura ferroviaria: binari, linea aerea, sistemi di segnalamento e sicurezza, etc.

Osservo come l'aver decomposto i costi nella somma di varie componenti renda possibile l'utilizzazione effettiva del valore Shapley, in quanto per il suo calcolo si può convenientemente sfruttare per l'appunto la sua proprietà di additività. Un problema significativo nella applicazione del valore Shapley è dato dalla possibile complessità computazionale: occorre ricordare che, in generale, per calcolare una soluzione (ad esempio, il valore Shapley, ma vale anche per altre soluzioni) di un gioco occorre tenere conto del valore assunto da tutte le coalizioni, il cui numero cresce molto rapidamente all'aumentare del numero dei giocatori.

Nel nostro caso, i "giocatori" erano rappresentati dai treni che utilizzano l'infrastruttura ferroviaria nell'arco di un anno: eravamo quindi di fronte ad un numero molto grande di "giocatori". Per mitigare e, di fatto, superare le difficoltà di calcolo, abbiamo effettuato ciò che può essere considerata una approssimazione lineare della funzione di costo. Più in dettaglio, una volta deciso di esprimere il costo come somma dei costi delle varie componenti, era per queste che dovevamo ottenere una stima dei costi. Soffermiamoci, per fissare le idee, su una di loro, quella relativa ai binari (costi di costruzione, manutenzione e rinnovo). Abbiamo assunto che la componente "binari" potesse essere classificata, secondo il livello "qualitativo", in un numero finito di tipologie diverse.

A questo punto, data una "coalizione", cioè un gruppo S di treni, abbiamo supposto che $c(S)$ fosse esprimibile come somma di due addendi[9]:

- una parte del tutto analoga al cosiddetto "gioco dell'aeroporto", ovvero costi (esempio: ammortamento dei costi di costruzione; certe parti dei costi di manutenzione ed adeguamento) che sono "fissi", nel senso che dipendono solo dalla massima "qualità" della componente richiesta anche da un solo treno di S, non dal numero degli utilizzatori

- una parte che è proporzionale al numero degli elementi (cioè, treni) di S,

[8] Il progetto di ricerca era connesso alla liberalizzazione del trasporto ferroviario, previsto da varie direttive europee. In particolare, la direttiva n. 440 del 1991 prevedeva la separazione fra il "gestore della infrastruttura ferroviaria" ed i "transport operators", ovvero quelli che, per così dire, gestiscono i treni. Il gestore della infrastruttura è tenuto a garantire l'accesso ai transport operators che ciò richiedano. Viene superata quindi la struttura "monolitica" (o "verticalmente integrata", come dicono gli economisti) rappresentata ad esempio, per l'Italia, dalle FF. SS.: si pone quindi (fra gli altri) il problema di fare pagare ai "transport operators" i costi derivanti dall'uso della infrastruttura ferroviaria.

[9] Quindi, abbiamo usato una seconda volta la proprietà di additività del valore Shapley.

col coefficiente di proporzionalità che dipende da quale sia la "qualità" più elevata richiesta

A dire il vero, il modello era un poco più complicato, ma quanto sopra descritto raccoglie l'essenziale.

Faccio un esempio, per cercare di rendere comprensibile il modello usato. Supponiamo di avere tre diverse "qualità" di binari: A, B, C. Supponiamo che la parte "fissa" del costo (in una qualche unità di conto monetaria, e su un dato arco di tempo, per esempio potremmo pensare a costi annuali) del binario di qualità, rispettivamente, A, B, C, sia $h_A = 200$, $h_B = 300$ e $h_C = 500$. Assumiamo inoltre che il coefficiente di proporzionalità sia, sempre per A, B, C: $k_A = 5$, $k_B = 6$ e $k_C = 8$. Nella tabella 9.1 indichiamo i costi per alcuni esempi di coalizioni.

coalizione S				costi per la coalizione S		
numero treni di tipo			totale	airport	parte	TOTALI
A	B	C	treni	game	proporzionale	
70	60	0	130	300	$6 \cdot 130$	1080
10	0	100	110	500	$8 \cdot 110$	1380
100	0	10	110	500	$8 \cdot 110$	1380
100	0	0	100	200	$5 \cdot 100$	700
101	0	0	101	200	$5 \cdot 101$	705
100	1	0	101	300	$6 \cdot 101$	906
100	0	1	101	500	$8 \cdot 101$	1308

Tabella 9.1: I $c(S)$ per alcune coalizioni, in un "infrastructure cost game"

Per la classe di giochi individuata dai costi relativi a ciascuna singola componente (abbiamo chiamato questi giochi "infrastructure cost games[10]"), abbiamo anche determinato una semplice formula che permette di calcolare agevolmente il valore di Shapley, anche per una coalizione molto grande, in modo da poter fare i calcoli di fronte alle dimensioni realistiche del numero di treni che sono coinvolti in casi reali[11]. Per i dettagli, vedasi Fragnelli *et al.* (1999). Può essere interessante notare come una simile classe di giochi emerga in ap-

[10] Purtroppo i miei colleghi hanno voluto fare i seriosi, e abbiamo così abbandonato il termine originario di "glass games" che avevo proposto durante un soggiorno, piacevole come sempre, a Santiago de Compostela, ospite di Ignacio. Quel termine, che proveniva da un esempio che avevo escogitato e che riguardava la gestione dei bicchieri in una struttura ricettiva, lasciava un'aura di mistero (cosa c'entrano i bicchieri, o il vetro, con le ferrovie?) che così si è persa.

[11] Un esempio analogo, in cui l'aspetto computazionale emerge in modo rilevante è offerto dall'analisi di Doll (2004), relativa ai costi per il sistema stradale.

plicazioni di economia sanitaria (divisione di costi di carattere chirurgico in presenza di code: vedasi Gonzalez ed Herrero (2004)).

Domanda: l'idea di usare il valore Shapley era dovuta *essenzialmente* a ragioni di carattere computazionale? Certo, non nego che questo aspetto sia stato di un certo rilievo (anche perché volevamo giungere a dei valori "numerici" effettivamente utilizzabili): ciò non toglie che abbiamo esaminato anche altre soluzioni ed abbiamo anche valutato sotto quali condizioni il nucleo fosse non vuoto[12]. Ritornando, comunque, alla domanda, osservo che (al di là di condizioni "ovvie", quali la anonimità e l'efficienza[13]) l'aver decomposto il gioco dato in somma di giochi più semplici rende naturalmente importante il valore Shapley in quanto esso gode della proprietà di additività. Oltre a questo, il fatto che esso assegni ad ogni treno il suo "contributo marginale medio" ai costi è un ulteriore punto a favore di questa soluzione, in quanto tiene conto del "contributo" dei singoli treni al costo complessivo d'esercizio e quindi corrisponde all'idea di attribuire i costi a chi ha la "responsabilità" di averli generati.

Vorrei fare comunque una osservazione, per mettere in evidenza come possano esserci delle "trappole" nascoste là dove uno non se lo immagina. Il valore Shapley ha una proprietà curiosa, che può introdurre una componente di arbitrarietà in questo contesto (ed in altri...). Nel considerare il problema di divisione dei costi, vi è una unità di misura temporale "naturale"[14] che è ovviamente l'anno: ovvero, i costi vengono conteggiati su base annuale e quindi vengono ripartiti sulla base dei treni circolanti in un anno (ricordo che i "giocatori" sono i treni). Ma se per caso pensassimo di usare come unità temporale, ad esempio, due anni, occorre tenere conto di una caratteristica del valore Shapley che presumo uno non si aspetti. Si immagini che i due anni abbiano la stessa struttura dei costi e gli stessi identici treni usufruiscano della infrastruttura: ebbene, contrariamente a quanto uno si potrebbe aspettare, il valore Shapley non assegna affatto ad un treno il doppio del costo che gli assegna su base annuale! Cosa che può essere verificata con un esempio minimale, usando i dati (peraltro fittizi...) della tabella 9.1. Supponiamo vi siano due soli treni, uno di tipo A ed uno di tipo B che usano l'infrastruttura in un anno. Abbiamo così due giocatori se consideriamo l'arco di tempo di un

[12]Per un "infrastructure cost game", che il nucleo sia non vuoto non è scontato. Esso è infatti somma di un "airport game", per il quale il nucleo è tipicamente non vuoto, e della parte "proporzionale al numero dei giocatori", per la quale il nucleo è tipicamente vuoto. I nostri risultati si trovano in Norde *et al.* (2002).

[13]Il discorso sull'efficienza è meno ovvio di quanto si possa ritenere. Di fatto, i "transport operator" non coprono integralmente i costi. Possiamo tuttavia immaginare che venga fissata una percentuale di copertura dei costi, e quindi fare riferimento ai "numeri" ottenuti in questo modo per quanto riguarda l'efficienza.

[14]Lo metto fra virgolette, anche perché la sua naturalezza deriva in realtà da considerazioni socio-storico-economiche.

anno, ed invece quattro se consideriamo due anni. Se si usa il valore Shapley su un anno, il treno A dovrà pagare 105.5, mentre se si fanno i calcoli su due anni, dovrà pagare 105.667 ogni anno (i dettagli dei calcoli sono disponibili
WEB sulla pagina web, dove vengono proposti anche altri esempi, con scarti più significativi).

Chiudo questo capitolo con un ultimo esempio di applicazione dei giochi cooperativi ad un contesto radicalmente diverso.

Anche se tratterò molto sinteticamente questo caso, intendo comunque proporlo perché mostra le potenzialità di applicazione della TdG in una sfera ben lontana dall'economia[15]. Mi riferisco ad una tecnologia recente, di carattere genetico, applicata alla diagnostica medica: si tratta dei cosiddetti "microarray".

Cercheró di dare una descrizione, anche se inevitabilmente rozza, di questa tecnologia che rappresenta, al momento attuale, uno dei temi più caldi della ricerca biomedica. Si supponga di effettuare un test su due gruppi di individui: un gruppo ha una malattia M, mentre l'altro è sano. La tecnologia dei microarray permette di ottenere dati relativi ad un gran numero di geni contemporaneamente (possiamo assumere, ad esempio, che si tratti di 5000 geni, anche se le tecniche attuali permettono un ordine di grandezza maggiore). I dati che si ottengono possono riguardare (ad esempio) la cosiddetta "espressione genica" in termini di produzione di proteine, cioè possono dare una informazione numerica sul "livello di attività" dei singoli geni, misurando la quantità di mRNA[16] ad essi corrispondente presente nella cellula. Se la malattia è di origine genetica, ci si può aspettare che gli individui malati presentino un diverso pattern di espressione genica rispetto a quelli sani.

E' possibile condensare l'informazione relativa all'espressione genica, per ogni singolo individuo malato, in una lista di 0 ed 1, decidendo di attribuire valore 1 ad un gene "sovraespresso", sulla base di un confronto con i livelli di attività dello stesso gene in individui sani, avendo prefissato una soglia opportuna[17].

Ora, è possibile "leggere" l'informazione così ottenuta come informazione relativa ad un TU-game. Identifichiamo i giocatori con i geni ed assegniamo

[15] E, come le più belle cose, incluso il piacere di lavorare con i due Stefani (Moretti e Bonassi), è nato in modo assolutamente casuale, imprevisto. Così come è successo con la durevole collaborazione in atto (su ben altri argomenti) con Ariel Dinar, nata da una chiacchierata ad un tavolino di bar...

[16] E' lo RNA messaggero, che ha il compito di intermediario tra l'informazione codificata nei geni contenuti nel DNA e le proteine, costituenti fondamentali delle cellule e dei tessuti.

[17] La fissazione della soglia presenta un notevole grado di arbitrarietà e va trattata con molta attenzione. Aggiungo inoltre che può essere significativo anche un livello di attività del gene inferiore alla "norma": si parla, naturalmente, di geni "sottoespressi": si può quindi fare una analisi che tenga conto più generalmente di geni "anormalmente espressi".

ad ogni "coalizione" (ovvero, gruppo di geni) un valore pari a k/n, dove n è il numero di individui del nostro campione di malati, mentre k è il numero di individui (fra questi) per i quali l'insieme dei geni che hanno ottenuto un valore pari ad 1 è contenuto nella coalizione. Quale è l'idea sottostante questa definizione? E' che la malattia sia causata da un gruppo di geni, i quali per motivi vari (loro assenza, mutazioni, interferenza di altri geni con la loro attività) manifestano un pattern di espressione genica diversa rispetto a quella "normale". La complessità della tecnologia, con conseguenti errori di carattere sperimentale, la presenza di fattori specifici individuali ed altro impediranno di ottenere risultati di semplice ed immediata interpretazione[18]. Se non avessimo questa difficoltà (e se la ipotesi interpretativa formulata è corretta), dovremmo avere un gioco con una coalizione che ottiene il valore 1, assieme a tutte le altre coalizioni che la contengono, mentre tutte le altre dovrebbero avere valore 0. Stiamo quindi cercando di costruire un gioco che dovrebbe costituire una sorta di approssimazione di quello teoricamente previsto.

Vediamo un esempio, con ben pochi dati (sia geni che campioni) rispetto ai numeri standard che troviamo utilizzando questa metodologia, per vedere direttamente come sia costruito il gioco. Prendiamo una matrice che riassume sia l'informazione sperimentale che le nostre decisioni in merito alle "soglie" usate: abbiamo pertanto la tabella 9.2 costituita di 0 ed 1, nella quale gli "1" indicano che il gene corrispondente è anormalmente espresso nel campione.

Il gioco che otteniamo è tale per cui $N = \{g_1, g_2, g_3\}$, con $v(\{g_1, g_2\}) = v(\{g_2, g_3\}) = 1/3$ e $v(\{g_1, g_2, g_3\}) = 1$. Per tutte le altre coalizioni S si ha $v(S) = 0$.

geni \ campioni	c_1	c_2	c_3
g_1	0	1	1
g_2	1	1	1
g_3	1	0	1

Tabella 9.2: Geni normalmente ed anormalmente espressi

Se qualcuno ritiene che questo approccio sia semplicistico (mi riferisco all'approccio, non alla tabellina che è naturalmente "semplicistica"), sono d'accordo. In realtà quanto appena descritto non rappresenta altro che i primi risultati di un progetto di ricerca (in collaborazione con Bonassi dell'IST, ed

[18]Tanto è vero che in questo settore di ricerca, letteralmente "esploso" negli ultimi anni, vengono utilizzate varie metodologie di analisi dei dati: tecniche statistiche, come il clustering (ma anche tecniche di "ripulitura" dei dati sperimentali), reti neurali, "Support Vector Machines", etc.

il cui "motore" principale è Moretti) che è in fase sostanzialmente iniziale: vedasi Moretti *et al.* (2004). Tanto è vero che stiamo cercando altre strade per "definire" il gioco a cui applicare i concetti appropriati, per cui il modello qui presentato potrebbe essere obsoleto al momento in cui state leggendo queste note. D'altronde, questo è il destino della ricerca scientifica: è solo una questione di tempo...

Detto questo, vediamo come abbiamo cercato di utilizzare lo strumento della TdG. Connessa alla trasformazione in "gioco" dei dati, è l'idea di utilizzare il valore Shapley come misura della importanza (intesa come "potere" di indurre la malattia) dei vari geni. Dopo avere introdotto il valore Shapley in generale nel capitolo precedente, e dopo averne giustificato la sua applicazione nel contesto "ferroviario" appena visto, non applicheremo certamente questo metodo in modo acritico. Possiamo giustificarne il suo uso per analizzare i "microarray"? La risposta è che ci sono dei buoni motivi, anche perché possiamo fornire una caratterizzazione assiomatica del valore Shapley, basata sull'idea di "partnership di geni", che a noi pare convincente in questo contesto. Una "partnership" è un gruppo S di geni che ha la seguente proprietà: non c'è alcun insieme T di geni (contenuto propriamente in S) il quale contribuisca a modificare il numero atteso di attivazioni della malattia da parte di geni fuori di S. Imponendo tre condizioni connesse all'idea di partnership (PM: monotonia della partnership; PR: razionalità a livello di partnership; PF: fattibilità a livello di partnership), una condizione che esplicita la "pari dignità" dei campioni utilizzati ed una condizione classica ("dummy player property") che a nostro parere è sensato assumere in questo contesto, otteniamo che il valore Shapley è l'unico concetto di soluzione puntuale che le soddisfi, sulla classe dei giochi che abbiamo chiamato "microarray games" e che coincidono con quelli ottenibili a partire da una qualsiasi matrice di 1 d 0 rappresentanti i geni che sono rispettivamente anormaalmente espressi o no. La classe dei "microarray games" ha una struttura particolarmente semplice che ci permette inoltre di calcolare effettivamente il valore Shapley per un gioco (un po' come succedeva nel caso dei treni). Se questa condizione non fosse stata soddisfatta, il nostro approccio non sarebbe stato in grado di fornire risultati "quantitativi" e quindi avrebbe perso interesse rispetto allo specifico contesto applicativo cui siamo interessati. Invece, risulta agevole calcolare il valore Shapley anche in casi, come quelli che brevemente descriverò sotto, in cui sono coinvolti oltre 6000 geni, ovvero giocatori: osservo che se avessimo un generico gioco con un tale numero di giocatori, avremmo $2^{6000} = 1,5 \cdot 10^{1806}$ coalizioni e quindi nessuna speranza di poter calcolare il valore Shapley.

Indico qui il risultato dell'applicazione del nostro metodo a un caso, scelto fra i più noti in letteratura e per il quale erano disponibili i dati. I risultati ottenuti sono promettenti.

Il caso riguarda lo studio di tessuti normali e tumorali di colon, analizzati da Alon *et al.* (1999). I geni coinvolti nel loro studio sono 6500 ed i campioni da loro utilizzati sono 62: 40 di questi provengono da tessuto tumorale ed i rimanenti 22 da tessuto normale. Fra i dieci geni che ottengono il valore Shapley più alto nei calcoli da noi fatti, quattro risultano, dalla letteratura scientifica, essere associati col cancro del colon ("vasoactive intestinal peptide" o VIP, "membrane cofactor protein" o MCP, "gelsolin", "DNA-apurinic or apyrimirimidinic site lyase (HUMAN)").

Chiudo il capitolo con alcune brevi osservazioni riepilogative. Innanzi tutto, i casi presentati mostrano come la TdG non sia applicabile come una "macchinetta": occorre tenere conto delle specificità dei problemi. Se si esce fuori dall'uso accademico, inoltre, emerge che sono cruciali aspetti quali la reperibilità dei dati e l'effettiva computabilità delle soluzioni proposte. Infine, ogni applicazione che non sia di routine può portare a delle novità interessanti (a volte, anche a delle novità teoriche): segno di una scienza tutto sommato ancora relativamente giovane. Ciò che emerge nettamente è che il contributo più interessante dell'esperto di TdG è una "expertise" generale, più che nell'applicazione diretta di tecniche più o meno sofisticate (e mi conforta, su questo, il parere concorde di colleghi che stimo).

Capitolo 10

Conclusioni temporanee

Abbiamo visto la parte "di base" e più classica della TdG. Ciò significa che sono state ignorate tematiche e settori anche molto rilevanti. Non è stato, ad esempio, dedicato alcuno spazio al cosiddetto "mechanism design", nonostante sia uno dei campi che io trovo più affascinanti della TdG. Cosa sia il "mechanism design" è presto detto: si tratta di capire quale sia la "game form" da scegliere[1] se si vogliono ottenere certi risultati da parte di "decisori interagenti".

Esempio banale: se avete da vendere un quadro e non sapete la valutazione del quadro da parte dei potenziali acquirenti, potete ricorrere ad un'asta. Ma *quale* asta? Un'asta "in busta chiusa", come si fa per gli appalti più classici? Ma al primo o al secondo prezzo (vedasi il capitolo 5)? O un'asta "inglese" (quelle col banditore ed il martelletto)? Ma siamo sicuri che davvero organizzare un'asta sia la soluzione migliore? Perché non potrebbe convenire fare come il fruttivendolo, cioè fissare il prezzo desiderato di vendita e vedere se qualcuno si fa avanti per acquistarlo? Insomma, quale è la "game form" che vi conviene utilizzare affinché voi possiate ottenere il risultato migliore (che potrebbe essere riuscire a "spuntare" il prezzo più alto possibile, oppure un "mix" tra questo e le chance di riuscire effettivamente a venderlo: insomma, sta a voi sapere quale sia il vostro obiettivo, o meglio, le vostre preferenze), ipotizzando che abbiate davanti a voi dei decisori razionali ed intelligenti (quanto lo siano, sta a voi ipotizzarlo, naturalmente cercando di fare assunzioni le più realistiche possibili), dei quali però non conoscete alcuni parametri essenziali (per citarne uno: non sapete quale è la loro valutazione del quadro, ma avete magari al più una qualche informazione di carattere statistico).

Insomma, un problema interessante e "challenging". Se poi si pensa che i titoli di Stato vengono venduti mediante un'asta, si capisce come l'utilizzazione di una tipologia non adeguata di asta potrebbe rappresentare una perdita

[1] Da parte di qualcuno che ha il potere di farlo, entro un dato insieme di possibilità

considerevole per il pubblico erario. Abbiamo presente, come esperienza temporalmente vicina, il caso delle aste per le concessioni relative ai telefonini di terza generazione (gli UMTS), che in alcuni Paesi sono state aggiudicate a prezzi molto elevati (tanto che si discute se crisi avutesi in questo settore, si pensi ad esempio alla British Telecom, non siano state innescate dal fatto che queste imprese hanno dovuto pagare un prezzo "eccessivo" per ottenere le concessioni), mentre in altri sono state un fallimento notevole per quanto riguarda il prezzo finale di aggiudicazione.

Il "revenue equivalence theorem", cui è stato dedicato un poco di spazio nel capitolo 5, può essere collocato in questo contesto di "mechanism design": mostra come, da un certo punto di vista e sotto opportune ipotesi, non sia rilevante la scelta della specifica game form, per quanto riguarda il risultato atteso da parte del "banditore". Ma il "mechanism design" non si ferma solo alle problematiche relative alle aste: ad esempio, le condizioni che definiscono gli equilibri correlati possano essere visti come un caso particolare di condizioni di "incentive compatibility", che rappresentano una delle idee chiave nel contesto del "mechanism design". Il già citato Myerson (1991) offre un'eccellente introduzione al riguardo.

All'idea di mechanism design possiamo ricondurre, almeno in parte, la legislazione anti-trust: se ai "giocatori", ovvero le imprese di un settore (ad esempio, quello assicurativo), viene lasciata la possibilità di sottoscrivere accordi vincolanti (ovvero, realizzare accordi "di cartello") esse potrebbero ottenere profitti più elevati di quanto non possano ottenere se obbligate a "giocare" non cooperativamente un gioco di oligopolio[2]. Non ci si stupisca se sembra che la legislazione anti-trust aspiri ad ottenere risultati inefficienti: stiamo parlando qui di efficienza/inefficienza per i "giocatori" (le imprese), il che non ci deve far dimenticare che ciò va a scapito degli attori non menzionati, segnatamente i consumatori.

Per riprendere il discorso su ciò che questo libro ignora, posso citare i giochi dinamici e differenziali, la problematica del learning, gli stessi giochi evolutivi ai quali è stato fatto solo un breve cenno, i giochi con infiniti giocatori. Questi ultimi sono stati essenziali, ad esempio, per modellizzare e dimostrare la cosiddetta "congettura di Edgeworth". Si tratta di provare che la "curva dei contratti" (per usare la terminologia per l'appunto di Edgeworth) si contrae e "converge" verso una allocazione di equilibrio nelle cosiddette "economia replicate". Per ottenere questo risultato è stato utile avere a disposizione un modello che potesse rendere in termini formali l'idea che in un mercato di concorrenza perfetta un singolo agente non dovrebbe avere potere di influenzare i prezzi: un modo molto conveniente per farlo prevede l'uso di modelli con

[2]Ricordo che nel semplice modello di oligopolio che abbiamo visto nel capitolo 2 l'esito di equilibrio non è efficiente.

infiniti giocatori.

Ancora, su quello che in questo libro manca: Non ho introdotto le affascinanti problematiche connesse ai "fondamenti" della TdG, ovvero il tentativo di formalizzare le condizioni che giustificano l'idea di equilibrio di Nash, per le quali si utilizzano strumenti tipici della logica (in particolare le cosiddette "logiche modali"). Uno che se ne intende, ovvero Binmore (1997), non molto tempo fa diceva, a proposito della situazione dei fondamenti della TdG, che: "the foundations of Game Theory are now in such a mess". Anche tenendo conto del suo gusto per il paradosso questa sua affermazione segnala che presumibilmente c'è ancora parecchio da lavorare su queste problematiche.

Anche la prospettiva storica è assente, in questo libro, al di là di alcuni riferimenti episodici. Mentre la conoscenza della genesi storica dei concetti, le motivazioni interne o le sollecitazioni esterne che hanno contribuito alla loro formulazione, al loro successo, aggiungono uno spessore particolare, prezioso, alla conoscenza di una disciplina. Anche l'abbandono di certe strade può essere illuminante: come ricordato nel capitolo 8, lo studio delle soluzioni di von Neumann e Morgenstern per i giochi cooperativi è stato di fatto abbandonato[3]. Sul versante "positivo", ovvero sull'affermarsi di un concetto, stanno ragioni che non sempre sono da considerare positivamente. E' innegabile che un ruolo chiave per l'affermarsi dell'equilibrio di Nash come "soluzione" per un gioco non cooperativo l'ha avuto il teorema di esistenza provato, per l'appunto, da Nash: non sono affatto convinto che ciò abbia rappresentato un bene per la TdG, perché di fatto ciò ha permesso l'affermarsi di taluni approcci, magari più semplicistici ma che potevano "appoggiarsi" su questo tipo di risultato, a scapito di altri tentativi più complessi e problematici. Per altro verso, nel contesto dei giochi cooperativi, un concetto di soluzione come il nucleolo[4] sconta, rispetto al valore Shapley, un problema di maggiore diffcoltà computazionale, mentre, ovviamente, non dovrebbe essere questo il principale[5] discrimine per quanto riguarda la "scelta" di una soluzione rispetto ad un'altra.

Per chi fosse interessato ad una introduzione alla storia della TdG, segnalo che in rete c'è quella famosissima di Walker:
`http://william-king.www.drexel.edu/top/class/histf.html`

Altri riferimenti utili sono Weintraub (1992), Dimand e Dimand (1996) (è previsto un secondo volume, forse in uscita nel 2006) e Greif (2002). Un

[3]Come sempre, affermazioni di questo genere non sono completamente vere, ma certo al momento non rappresentano uno dei temi affrontati con maggior frequenza dai ricercatori.

[4]E' un concetto di soluzione che non abbiamo discusso, anche per difficoltà tecniche sottostanti la sua definizione.

[5]Non dobbiamo neanche sottovalutare "idealisticamente" questo aspetto, però. Nel capitolo dedicato ai "case studies" l'aspetto della "computabilità effettiva" di una soluzione emerge non casualmente.

interessante contributo, non propriamente storico, ma di natura critica sui rapporti fra TdG ed economia, è Kreps (1990). Cito anche un mini-classico: la voce "Game Theory" scritta da Aumann (1986) per il dizionario Palgrave, in quanto la sintesi che egli fa della disciplina è articolata attraverso fasi del suo sviluppo.

Nel capitolo 3 (vedi pagina 49) abbiamo posto, con accenti critici, il problema della verifica osservativo-sperimentale. Non posso certo dire che questo aspetto sia assente dalla TdG. Basterebbe citare i nomi di Roth, Güth, Vernon Smith, con i loro laboratori, e le connessioni con la cosiddetta economia sperimentale. Né sono meno significativi gli sforzi compiuti alla ricerca di evidenze osservative (oltre al già citato Aadland e Kolpin (1998), è doveroso menzionare anche Roth (1990)). Vi sono tuttavia degli ostacoli significativi, nel voler trovare delle conferme sperimentali[6] alle previsioni della teoria.

In particolare, emergono difficoltà da parte dei soggetti, sia nel riuscire a porsi "nei panni" degli altri, sia nell'effettuare ragionamenti "complessi" (tipo quelli richiesti dalla eliminazione iterata di strategie fortemente dominate). Ci si trova quindi di fronte a soggetti che tipicamente si allontanano in modo significativo dal classico decisore razionale ed intelligente, e quindi ci si trova di fronte alla difficoltà di individuare il corretto modello e livello di "razionalità limitata" che ho già discusso nel capitolo 6 e su cui non ritorno.

Vi è poi una obiezione "generale" nei confronti della TdG sperimentale: la TdG effettua una poderosa semplificazione della realtà (sia del contesto in cui il decisore opera, sia del decisore stesso) e quindi per le sue verifiche sperimentali ha bisogno di creare un ambiente molto controllato. Col risultato che questo ambiente può risultare artificioso[7], tanto da porre in dubbio la significatività degli esperimenti rispetto alle condizioni concrete in cui i decisori si trovano ad operare.

A tutto questo si può aggiungere la scarsa attenzione di una fetta consistente di coloro che si sono occupati o si occupano di TdG (penso in particolare a molti economisti), per il lato della verifica osservativo-sperimentale della teoria[8].

Non posso tacere, da ultimo, una considerazione relativa ai "meccanismi ed

[6]Al di là delle difficoltà usuali della teoria economica, il cui rapporto con il metodo sperimentale è, quanto meno, difficile. Possiamo anche ricordare che, secondo qualcuno, gli esperimenti dovrebbero avere il ruolo, semmai, di confutare una teoria.

[7]Ad esempio, i soggetti vengono posti in cubicoli in cui essi si trovano di fronte a uno schermo, con la possibilità di poter comunicare solo tramite una tastiera. Per di più, magari dovendo fare delle scelte su un problema astratto che non li appassiona. Forse anche con l'unica finalità di impegnarsi quanto basta per ottenere il compenso previsto per la partecipazione all'esperimento.

[8]In parte da collegarsi ad un diverso "statuto epistemico" della scienza economica rispetto alle scienze sperimentali classiche, le "hard sciences".

incentivi" che caratterizzano la struttura della ricerca, in particolare di quella accademica. E' molto più produttivo ("ceteris paribus"), in vista della carriera accademica, dedicarsi a lavori di tipo teorico, che non occuparsi dell'interfaccia fra la teoria e il lato "osservativo-sperimentale". Pertanto, quest'ultimo aspetto viene di fatto scoraggiato. Anche per questo motivo, per dare cioè una piccola spinta nella direzione che ritengo giusta, ho cercato di promuovere i convegni "Game Practice"[9], ed ho io stesso cercato di confrontarmi con delle problematiche "applicate" per le quali non ho ricevuto alcuna formazione specifica[10], per di più "buttando a mare" nello stesso tempo quasi tutto il mio piccolo patrimonio di conoscenze matematiche avanzate[11].

E' difficile, direi impossibile, sulla base di quanto scritto in questo libro, farsi un'idea della prospettiva di fronte alla quale si trova questa disciplina. E, forse, a molti lettori questo non interesserà, se cercavano un "primo contatto" con la TdG. Qualcosa vorrei comunque dire. Anche perché credo sia emerso in modo piuttosto evidente che il paradigma classico del decisore razionale ed intelligente non è in grado di dare una risposta adeguata e sufficientemente generale alla problematica delle decisioni interattive. Non è certo trascurabile il fatto che nessuna delle proposte di soluzione per giochi non cooperativi introdotte nel capitolo 3 è pienamente soddisfacente.

Questa affermazione potrebbe essere distorta per il fatto che in un testo introduttivo non vengono discussi strumenti d'analisi sofisticati. Questa potrebbe essere una osservazione pertinente, se si fosse in una fase di sviluppo "ordinario" della TdG, in cui gli strumenti vengono man mano affinati per dare risposte a modelli via via più sofisticati. La situazione è ben diversa. Gli sviluppi che sono in corso, e che sono più significativi, riguardano tentativi di seguire strade di tipo diverso per modellizzare situazioni di interazione strategica.

La "scorciatoia" tentata, utilizzando il modello di decisore razionale ed intelligente, non è stata in grado di fornire una descrizione adeguata di quanto avviene nelle circostanze reali. Due sono i problemi fondamentali: uno è l'insufficiente capacità prescrittiva delle idee di soluzione disponibili, l'altro è che il paradigma di decisore razionale ed intelligente non è affatto detto che rappresenti il modello ideale per descrivere decisori "in carne ed ossa" (con ciò

[9] Il primo si è tenuto a Genova nel 1998. Poi ne sono seguiti altri, con cadenza biennale: Valencia 2000, Hilvarenbeek 2002, Elche 2004, con in mezzo Alessandria, 2002, dedicato all'ambiente. Per il 2006 vi sarà un convegno a Saragozza, su ambiente, sviluppo e risorse naturali.

[10] Sono un autodidatta, come mi qualificherebbe un matematico che conosco, il quale, chissà perché, attribuisce una connotazione negativa a questa caratteristica.

[11] Il che mostra come sia difficile organizzare e pianificare la ricerca, e quanto siano forti i rischi di interventi inefficaci.

non mi riferisco al fatto ovvio che non vi sia una corrispondenza diretta tra questo modello e le situazioni reali, ma al fatto che non è detto neppure che esso costituisca una "buona approssimazione", una felice semplificazione).

Come detto, i concetti di soluzione che sono stati proposti non sono in grado di fornire una adeguata predizione del comportamento dei decisori. Ciò avviene principalmente perché l'esito previsto dalla teoria non è sufficientemente determinato. Come è risultato evidente fin da semplici esempi introdotti nel capitolo 3, vi è una indeterminazione di tipo essenziale su quello che la teoria può proporre. Il forte interesse che vi è stato, per un certo numero di anni, per il tema dei "raffinamenti" dell'equilibrio di Nash, al di là dei caratteri di "moda"[12], ha rappresentato il tentativo di restringere l'eccessiva quantità di equilibri che emergono da classi molto importanti di giochi, quali i giochi ripetuti e i giochi ad informazione incompleta. Come già detto altrove, comunque, questo tentativo non è stato in grado di offrire una risposta adeguata.

Molto significativi sono stati gli sviluppi che possiamo genericamente inquadrare nel contesto dello "allentamento" dei requisiti di razionalità ed intelligenza, dei quali abbiamo visto qualcosa nel capitolo 6. I giochi evolutivi, l'analisi della dinamica dell'interazione fra giocatori a razionalità limitata (automi a stati finiti, decisori che utilizzano strategie "miopi", meccanismi di tipo "adattativo", etc.) hanno dato dei contributi rilevanti su temi molto significativi quali: la nascita di convenzioni, di norme, di istituzioni ed il loro mantenersi; la dinamica dell'apprendimento in contesti di interazione ripetuta; la "convergenza" o meno di comportamenti derivanti da assunzioni deboli di razionalità verso soluzioni previste da idee più forti di razionalità.

Il quadro della situazione è quello per cui si assiste ad una proliferazione di approcci e di risultati, che corrispondono al tentativo di aprire o proseguire strade diverse da quelle classiche, senza che però si sia ancora individuata una possibile modellizzazione alternativa che abbia alcune proprietà desiderabili:

- sia largamente applicabile

- richieda la conoscenza di un numero adeguato di parametri che possono effettivamente essere misurati o stimati

- fornisca delle previsioni verificabili, ed esse siano sufficientemente coerenti rispetto alle osservazioni fatte in situazioni riconducibili alle assunzioni fatte

[12]Vi sono molte ragioni per cui nello sviluppo scientifico si creano delle "mode". Ragioni "buone": se spunta un'idea nuova, un approccio diverso, un ricercatore ne vuole esplorare le potenzialità ed i limiti; ragioni "cattive": è più facile "piazzare" (pardon: pubblicare) un contributo scientifico e pertanto avere maggiori chance di migliorare il proprio status, se ci si colloca dentro il "mainstream" ed in particolare, come per i giornalisti, se si riesce ad essere "sulla notizia".

E' fin troppo ovvio immaginare dove stanno le difficoltà. Una volta accettata l'inadeguatezza del modello classico[13], ci si può occupare di decisori che siano a razionalità "molto bassa" (piante, animali dal sistema nervoso non particolarmente sviluppato, automi o "agenti informatici" da noi costruiti). In questo contesto ci si riesce a muovere piuttosto bene, ma non ritengo che questa strada offra (al momento) "la" soluzione. Le vere difficoltà stanno nelle "terre di mezzo", ovvero se si vuole descrivere un decisore in grado di mettersi (ma solo in modo *imperfetto*) nei panni di un altro. E la difficoltà sta nel tracciare i confini: se uno pensa a come ha preso decisioni in un contesto di interazione, si rende conto che in molti casi il suo cervello ha lavorato davvero a basso regime, ma ricorderà anche situazioni in cui si è creato una rappresentazione raffinata della situazione, è stato capace di inventiva, ha dato fondo alle sue doti di immaginazione, alle sue risorse culturali o deduttive. Non è affatto facile escogitare un modello che "funzioni" e che sia allo stesso tempo in grado di rappresentare questa enorme varietà di complessità.

Credo che vada comunque dato atto alla TdG di avere svolto, e di continuare a svolgere, un ruolo molto importante per il pensiero economico e in generale per le scienze sociali: con la sua essenziale componente matematico-formale obbliga ad una accuratezza nella specificazione delle assunzioni che permette di porsi domande molto precise, di vedere gli effetti causati da variazioni nei parametri del modello[14], e quindi alcune delle difficoltà che la TdG incontra possono essere attribuite alle difficoltà dei problemi che è in grado di porsi, grazie al suo linguaggio ed apparato formale molto sviluppati. Naturalmente, c'è sempre la contropartita: la stessa potenza del linguaggio formale può indurre a forzare la realtà dentro i confini di ciò che con tale linguaggio può essere trattato. Per fare un esempio semplice, basta notare come possa essere pericoloso non tenere in debito conto il fatto che le interazioni strategiche sono tipicamente caratterizzate da contorni non sempre ben delineati, da regole non rigide, mutevoli, da incertezze talvolta molto rilevanti.

Un aspetto sicuramente positivo è l'accumulo, impressionante, di "know-how" per l'analisi di situazioni di interazione strategica, nei più vari e disparati contesti. E' questo complesso di conoscenze il "plus" che la TdG può offrire, "qui ed ora". Assieme alla consapevolezza che questo patrimonio va maneggiato con cura, quando si voglia utilizzarlo per l'analisi di situazioni

[13]Ribadisco come la possibile inefficienza del risultato di interazione strategica fra decisori razionali ed intelligenti costituisca un elemento di pressione selettiva che agisce in direzione opposta rispetto all'affermarsi di caratteristiche dei decisori quali quelle postulate dalla teoria classica. Perché portare a spasso e nutrire un cervello grosso e pesante se con regolette molto semplici succede che ce la si cava meglio che non dopo accurata ponderazione?

[14]Esempio tipico a questo proposito sono i giochi ripetuti: nel capitolo ad essi dedicato, abbiamo potuto vedere ad esempio quanto importasse sapere o no il numero esatto dei round.

concrete.

Forse il lettore si aspettava, da un addetto ai lavori, se non altro per motivi pubblicitari[15], una sorta di glorificazione della TdG, anche sulla scorta dei suoi innegabili successi. Al contrario, per me il fascino della TdG sta proprio nell'avere di fronte a se un mondo da scoprire.

[15] C'è un ovvio problema di conflitto di interessi! Ho degli incentivi a mentire, per il lavoro che faccio.

Capitolo 11

Problemi

Problema 1 (Capitolo 2) Descrivere la parte dell'albero delle decisioni corrispondente alle prime due mosse del bianco e del nero nel gioco degli scacchi.

Problema 2 (Capitolo 2) Un gioco finito a tre giocatori si rappresenta di solito nel modo seguente (occorre che uno dei giocatori non abbia "molte" strategie a disposizione...):

I \ II	L	R
T	$1, 1, 2$	$2, 0, 1$
B	$0, 0, 3$	$0, 1, 5$

S

I \ II	L	R
T	$0, 1, 2$	$0, 0, 0$
B	$0, 2, 1$	$3, 1, 0$

D

III

Questa rappresentazione è chiara? Sapreste indicarne di migliori?

Problema 3 (Capitolo 2) Trovare gli eventuali equilibri di Nash per il gioco del problema precedente.

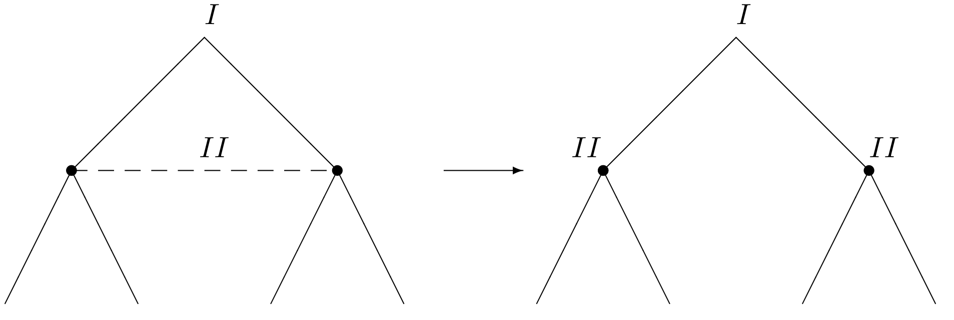
Problema 4 (Capitolo 2) Arrivate ad un semaforo che è rosso.
Sta a voi decidere se passare oppure no. Vi sembra un problema di TdG, o di teoria delle decisioni o non pertinente?
Su cosa fondate la scelta se passare oppure no col rosso?
Le vostre argomentazioni hanno rilievo nella scelta di passare col verde?

Problema 5 (Capitolo 2) Nel capitolo 2 abbiamo visto un esempio di gioco a due giocatori nel quale i giocatori, quando tocca loro giocare, non sanno se sono il primo a giocare oppure il secondo. Descrivete una situazione simile, in forma estesa, con tre giocatori.

Problema 6 (Capitolo 2) Nel capitolo 2, a pagina 13 è detto:
"Possiamo anche osservare che, per il modo in cui è stata fatta la costruzione, la funzione f è una funzione di utilità che rappresenta $\succeq_I$."
Provare questa affermazione.

Problema 7 (Capitolo 2) Nel descrivere il gioco dei fiammiferi ho detto: "perde chi lascia il tavolo vuoto". Perché non ho detto: "perde chi è obbligato a togliere l'ultimo fiammifero"?.

Problema 8 (Capitolo 2) Si considerino i seguenti giochi, descritti in forma estesa (sono stati omessi dettagli non essenziali per il problema):



Si può descrivere verbalmente la caratteristica essenziale del passaggio dal gioco di sinistra a quello a destra dicendo che la informazione a disposizione del giocatore II aumenta, oppure ritenete che ciò sia errato, oppure sia incompleto?

Problema 9 (Capitolo 2) Nel problema precedente il passaggio dal gioco a sinistra a quello a destra potrebbe essere motivato dal fatto che il giocatore II si è procurato un marchingegno elettronico grazie al quale lui può sapere, chiaramente all'insaputa di I, quale mossa abbia fatto quest'ultimo. Vi sembra che il gioco di destra costituisca una rappresentazione accettabile della nuova situazione?

Problema 10 (Capitolo 2) A proposito del "gioco" di Isbell. Quali sono le strategie a disposizione di I? Se voi foste al posto di I, sareste capaci di ottenere un risultato diverso da 0? Potete immaginare situazioni reali di cui il "gioco" di Isbell sia la descrizione?

Problema 11 (Capitolo 3) Si consideri il gioco di tabella 11.1.
Quali sono i suoi equilibri di Nash? Se voi doveste dare un suggerimento al giocatore I, quale consiglio gli dareste?

I \ II	L	R
T	$1, 1$	$0, 0$
B	$0, 0$	$1, 1$

Tabella 11.1: Gioco di puro coordinamento

Problema 12 (Capitolo 3) Si considerino i giochi della tabella 11.2. Si può notare come, qualunque sia la coppia di strategie giocata, i payoff di entrambi i giocatori diminuiscano, nel passaggio dal gioco di sinistra a quello di destra. Voi preferireste "giocare" nel gioco di sinistra o in quello di destra?

I \ II	L	R
T	$100, 100$	$0, 0$
B	$0, 0$	$100, 100$

I \ II	L	R
T	$99, 99$	$-1, -1$
B	$-1, -1$	$98, 98$

Tabella 11.2: Due giochi di coordinamento

E' rilevante la possibilità di "pre-play communication"?

Problema 13 (Capitolo 3) Si consideri il gioco della tabella 11.3. Vi sembra ragionevole scartare, quale risultato di un gioco, un equilibrio di Nash che sia dominato da un altro equilibrio di Nash?

I \ II	L	R
T	$1, 1$	$0, 0$
B	$0, 0$	$0.9, 0.9$

Tabella 11.3: Scelta di un equilibrio di Nash, caso 1

E rispetto ai giochi delle tabelle 11.4 e 11.5?

Problema 14 (Capitolo 3) Dato un gioco finito (X, Y, f, g), diciamo che $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ è un "massimo ombra" per il gioco se $(\bar{x}, \bar{y})$ rende massima sia f che g. Cioè, se:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, y) \quad \text{e} \quad g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(x, y) \quad \forall x \in X, y \in Y$$

Provare che un "massimo ombra" è un equilibrio di Nash; indicare un gioco che non ha "massimo ombra" (e neanche lo ha la sua estensione mista); mostrare almeno un esempio in cui la presenza di un "massimo ombra" non è sufficiente per poter considerare "risolto" il gioco.

I \ II	L	R
T	$1000, 1000$	$0, 998$
B	$998, 0$	$999, 999$

Tabella 11.4: Scelta di un equilibrio di Nash, caso 2

$I \backslash II$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	$(100, 100)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
x_2	$(0, 0)$	$(100, 100)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
x_3	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(99, 99)$	$(0, 0)$
x_4	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(100, 100)$

Tabella 11.5: Scelta di un equilibrio di Nash, caso 3

Problema 15 (Capitolo 3) Discutere le considerazioni seguenti.

> Dipingevo una ringhiera. Alcuni moscerini rimanevano attaccati alla vernice, provocando un danno *a loro* (ovvio...) ma anche *a me* (lavoro fatto meno bene). Quindi si ha un risultato inefficiente (nel senso che è peggiore per entrambi i "giocatori") derivante da un'azione fatta da un "giocatore".
>
> Determinate fondamentale è ovviamente (?) l'incapacità da parte del moscerino di comprendere appieno la situazione (si noti: "non naturale" per lui).
>
> Ma ci sono anche aspetti di natura comunicativa. Ovvero, non avevo a disposizione un canale di comunicazione efficace per segnalare ai moscerini il problema. In realtà, non è che non esistessero dei meccanismi di comunicazione. Avrei potuto intraprendere delle azioni (allontanarli con le mani, sorvegliando se venivano). Ma tale metodo di "comunicazione" era per me troppo dispendioso, impedendomi di portare a termine il lavoro nel tempo che mi sembrava accettabile.

Osservazione: come cambia il problema se l'altro "giocatore" è:
- il vento, che appiccica foglie o detriti alla vernice
- un animale domestico (cane, gatto)
- una persona

Problema 16 (Capitolo 3) Considerare il gioco dei fiammiferi "modificato" ed il metodo di induzione a ritroso ad esso applicato in figura 3.2. Determinare la forma strategica dei giochi che corrispondono ai vari sottogiochi e verificare che le restrizioni delle coppie di strategie di equilibrio a questi giochi sono esse stesse equilibri di Nash.

Problema 17 (Capitolo 3) Applicare il metodo di induzione a ritroso al gioco dei fiammiferi originario, determinandone tutti gli equilibri perfetti nei sottogiochi.

Problema 18 (Capitolo 3) Determinare gli SPE per entrambi i giochi di figura 11.1. Commentare.

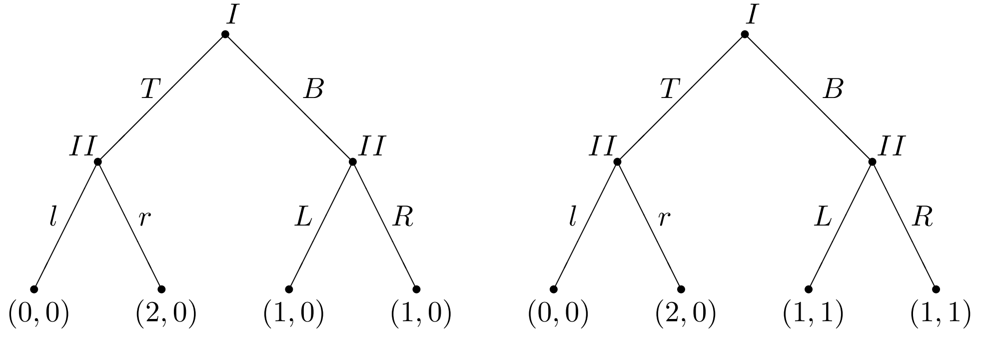


Figura 11.1: Due esempi di SPE problematici

Problema 19 (Capitolo 3) Considerare il gioco di sinistra in figura 11.1. Modificare opportunamente i payoff in modo da ottenere un gioco con un unico SPE il quale sia inefficiente. I due giochi in figura 11.1 hanno la stessa game form?

Problema 20 (Capitolo 3) Il seguente gioco può essere usato per verificare "sul campo" la proprietà di "rettangolarità" per gli equilibri di Nash in un gioco a somma zero.

$R \backslash C$	A	B	C
A	$-1, 1$	$1, -1$	$0, 0$
B	$1, -1$	$-1, 1$	$0, 0$
C	$0, 0$	$0, 0$	$0, 0$

Questo gioco ha due equilibri, uno in strategie miste ed uno in strategie pure, e si verifica subito che li possiamo "mischiare" a piacimento. Verificare che quanto asserito è vero e fornire un esempio che illustri lo stesso fenomeno, ma utilizzando solo strategie pure.

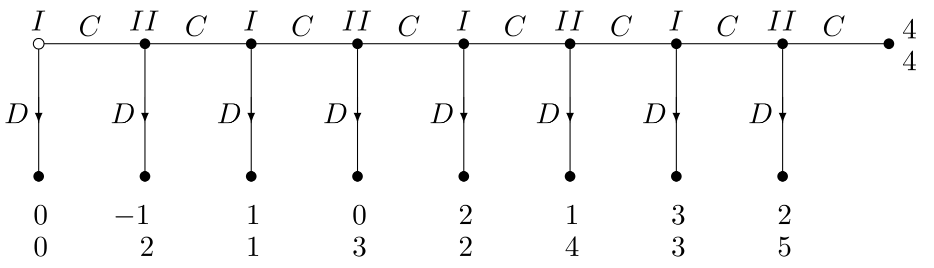
Problema 21 (Capitolo 3) Si consideri il gioco seguente:

I \ II	L	R
T	$1, 1$	$2, 1$
B	$1, 2$	$2, 2$

Chi sono gli equilibri di Nash, in strategie pure ed in strategie miste?

Si osservi che vale la proprietà di rettangolarità. Commentare.

Problema 22 (Capitolo 3) Si consideri il gioco del "centipede" (in figura le "zampette" sono meno di 100...):

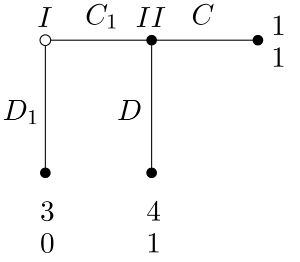


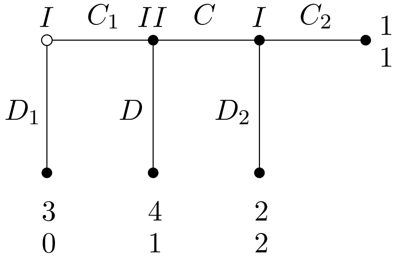
L'induzione a ritroso ci dà un unico equilibrio (perfetto nei sottogiochi) che prescrive ad entrambi i giocatori di giocare sempre D ad ogni nodo. Quindi il gioco termina subito e, in particolare, I ottiene un payoff pari a 0.

La usuale giustificazione della induzione a ritroso sta nell'ipotesi di conoscenza comune della razionalità dei giocatori.

Consideriamo però il penultimo nodo, cioè l'ultimo nodo in cui I si trova a decidere. Egli gioca D in quel nodo proprio per la ipotesi di razionalità del giocatore II. Ma se I si trovasse davvero in quel modo, ciò potrebbe dipendere solo dal fatto che II ha giocato C tutte le volte precedenti! Commentare.

Problema 23 (Capitolo 3) Si considerino i seguenti giochi (il secondo è adattato da Costa e Mori (1994)). Immaginare una "storia" per descrivere questi giochi. Per il gioco di destra, scriverne la forma strategica e trovarne gli equilibri di Nash. Trovarne gli equilibri perfetti nei sottogiochi. Discutere il criterio di dominanza paretiana fra equilibri.





Problema 24 (Capitolo 3) Provare che, in un gioco finito, se $(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio di Nash, allora rimane tale anche per l'estensione mista. Collegare questo risultato al fatto che le strategie miste non vengono utilizzate in problemi di decisione individuale.

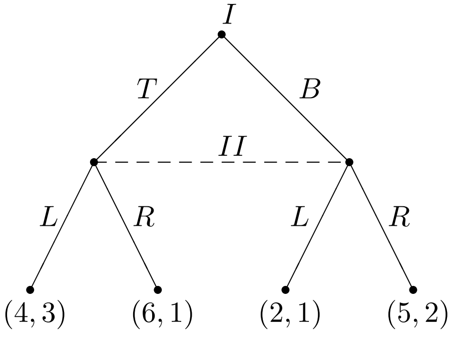
Problema 25 (Capitolo 3) Considerate il gioco:

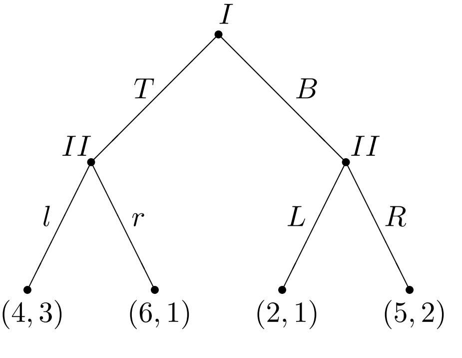
$R \backslash C$	A	B	C
A	$40, 40$	$60, 10$	$10, 40$
B	$10, 60$	$10, 10$	$60, 40$
C	$40, 10$	$40, 60$	$50, 50$

Mettetevi nei panni del giocatore I. Quale strategia scegliereste? Il comportamento dei giocatori in un gioco molto simile a questo è stato studiato, sperimentalmente, da Morgan e Sefton (2002).

Problema 26 (Capitolo 3) A sostegno di quanto affermato discutendo il dilemma del prigioniero (esempio 3.1), definire l'equilibrio di Nash per un gioco senza utilizzare le funzioni di utilità, ma solo le preferenze dei giocatori.

Problema 27 (Capitolo 3) Si considerino i due giochi seguenti:





Descrivere la forma strategica di entrambi i giochi e trovarne gli equilibri di Nash. Perché il giocatore II nel secondo gioco non riesce a sfruttare a suo favore il fatto che in questo, contrariamente al precedente, può osservare la mossa di I?

Problema 28 (Capitolo 3) Si consideri il gioco seguente:

I \ II	L	R
T	$3,2$	$2,2$
M	$1,1$	$0,0$
B	$0,0$	$1,1$

e si osservi come, mediante eliminazione iterata di strategie strettamente[1] dominate, si possa pervenire a risultati diversi a seconda dell'ordine di eliminazione.

Problema 29 (Capitolo 4) Nel dilemma del prigioniero a due stadi, abbiamo osservato che, giocando B ed R al primo stadio, quanto è previsto di fare nei nodi non raggiunti non ha effetto sul payoff. Come mai non succede che siano equilibri di Nash tutti quelli che prevedono di giocare B e R al primo stadio e B_4 e R_4 al secondo stadio? Ad esempio, come mai non è equilibrio la coppia di strategie $(BT_1T_2T_3B_4, RL_1R_2L_3R_4)$, che differisce dall'equilibrio di Nash $(BT_1T_2B_3B_4, RL_1R_2L_3R_4)$ che abbiamo esaminato nel testo solo per la sostituzione di B_3 con T_3?

Problema 30 (Capitolo 5) Facendo riferimento al gioco descritto in tabella 5.4, verificare l'affermazione che:

> L'analisi di questo gioco a informazione incompleta è del tutto analoga al precedente, e ne consegue un payoff atteso per I pari a p se gioca T e pari a $1-p$ se gioca B. Quindi, se $p > 1/2$ abbiamo un payoff atteso per I pari a p ed un payoff pari a 2 per $II.1$ e pari a 0 per $II.2$.

Problema 31 (Capitolo 5) Il gioco della tabella 5.2 e quello della tabella 5.3 in che misura sono equivalenti? I payoff dei due giocatori rappresentano identiche preferenze oppure no? La struttura delle "migliori risposte" è identica o no?

Problema 32 (Capitolo 5) Fare un modello di gioco in forma estesa che descriva la stessa situazione della figura 5.2, in cui però tocchi muovere prima a II e poi a I.

Problema 33 (Capitolo 5) A proposito della tabella 5.4, descrivere un gioco in forma estesa che rappresenti quella situazione di segnalazione.

[1] Qui sto usando, naturalmente, la terminologia che ho definito nel testo. Va detto, comunque, che in letteratura quelle che io chiamo strategie strettamente dominate sono dette debolmente dominate, mentre il termine strettamente dominate è riservato per quelle che io invece chiamo fortemente dominate.

Problema 34 (Capitolo 5) Si consideri la figura 11.2. In essa sono indicate tre alternative per rappresentare un gioco in forma estesa ad informazione incompleta. Ai nodi finali sono proposte tre alternative per i payoff, indicati per comodità di sintesi su tre distinte righe (i payoff sono scritti verticalmente per banali ragioni "tipografiche"):

- la prima è la stessa identica della figura 5.2
- nella seconda i payoff dei due tipi del giocatore II sono descritti come pertinenti a due giocatori diversi, chiaramente mediante la duplicazione dei payoff per II usati nel caso precedente
- qui, infine, nei nodi finali i payoff riferentesi a un tipo giocatore che non è coinvolto nel gioco in quella parte dell'albero vengono azzerati.

Descrivere la forma strategica in tutti e tre i casi. Quale dei tre approcci vi pare più convincente? In particolare, secondo voi il terzo può essere utilizzato in qualunque gioco finito ad informazione incompleta?

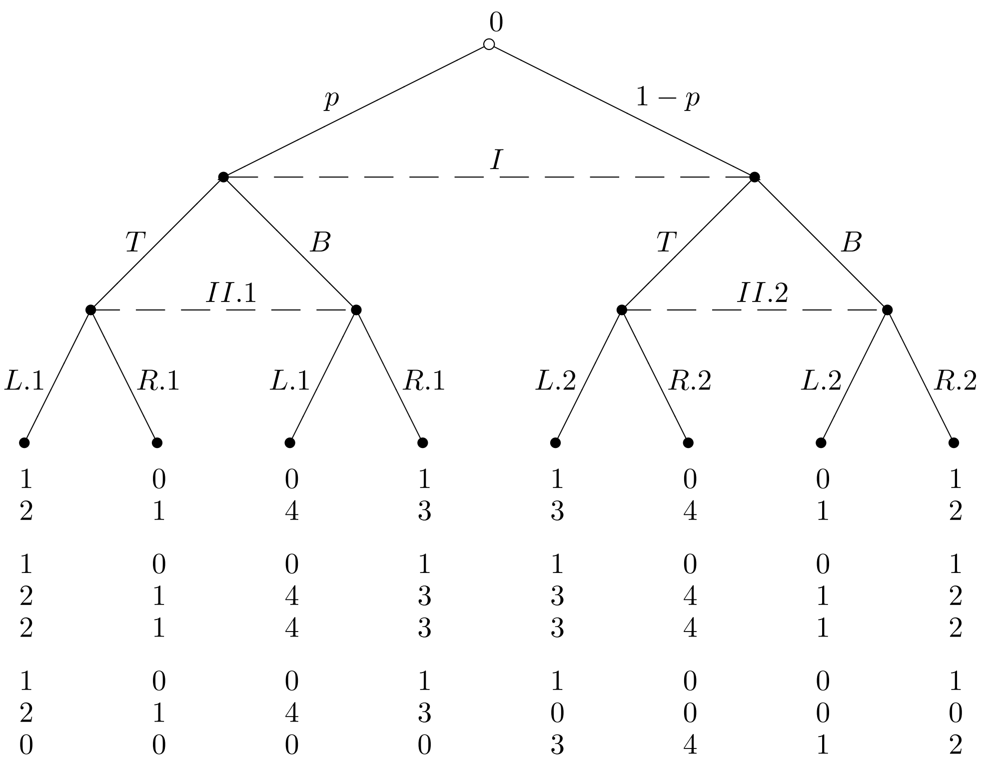


Figura 11.2: Gioco a informazione incompleta descritto in forma estesa

Problema 35 (Capitolo 6) Verificare che il gioco di tabella 11.6 ha un unico equilibrio di Nash (x^*, x^*) per cui x^* non è una ESS.

I \ II	L	C	R
L	$1, 1$	$3, -3$	$-3, 3$
C	$-3, 3$	$1, 1$	$3, -3$
R	$3, -3$	$-3, 3$	$1, 1$

Tabella 11.6: Un gioco senza ESS

Problema 36 (Capitolo 6) Trovare gli ESS di questo gioco:

I \ II	L	R
T	$1, 1$	$0, 0$
B	$0, 0$	$1, 1$

Problema 37 (Capitolo 6) Nella nota di pagina 138 si evidenzia come molti giochi "famosi" siano simmetrici. Come mai avviene questo, secondo voi?

Problema 38 (Capitolo 7) Provare ad effettuare le trasformazioni "geometriche" utilizzate per introdurre la soluzione di Nash per problemi di contrattazione, partendo da $(200/3, \sqrt{100/3})$ come cerchietto "pieno" e "verificare" graficamente che esso viene mappato in se stesso.

Problema 39 (Capitolo 7) Utilizzare gli insiemi di contrattazione S_1 ed S_2 indicati in figura 11.3, assieme all'insieme di contrattazione T individuato, sempre nella stessa figura, dai margini più calcati, per mostrare l'incompatibilità fra la proprietà di monotonia (vedi pagina 161) e quella di efficenza.

Problema 40 (Capitolo 7) Provare a dimostrare che in un qualsiasi modello di contrattazione a due stadi del tipo visto nel capitolo sulla contrattazione c'è sempre un equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi che prevede la "terminazione" entro il primo stadio.

Problema 41 (Capitolo 8) Un TU-game viene detto monotono se, comunque si prendano due coalizioni S e T con $S \subseteq T$, si ha che $v(S) \leq v(T)$. Provare che un gioco superadditivo può non essere monotono e discutere, alla luce di questo fatto, l'idea intuitiva, solitamente connessa alla condizione di superadditività, che "l'unione fa la forza".

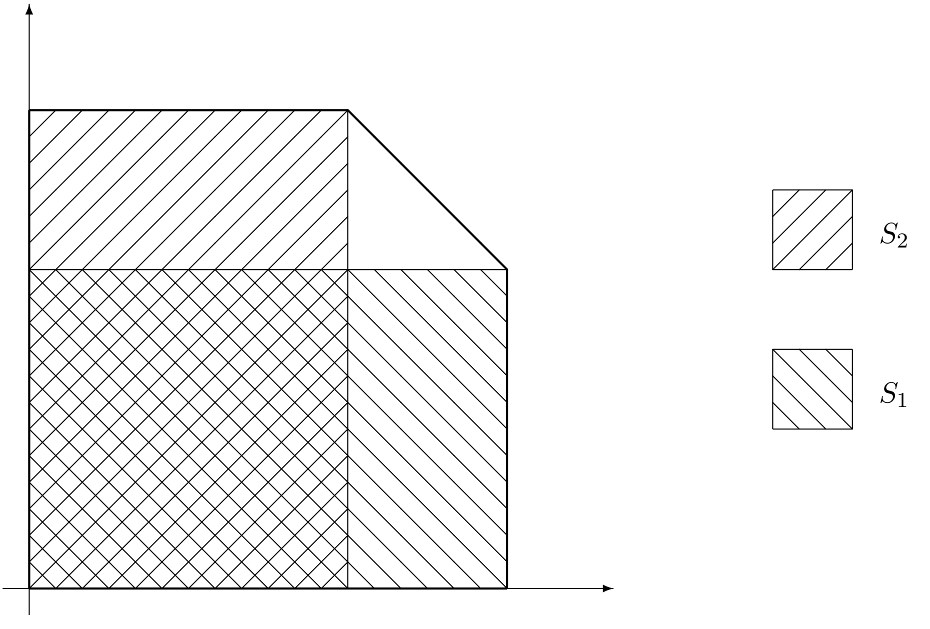


Figura 11.3: Efficienza e monotonia sono incompatibili

Problema 42 (Capitolo 8) Si consideri il gioco di maggioranza semplice (con tre giocatori). Provare che l'unica allocazione soddisfacente efficienza e simmetria è $(1/3, 1/3, 1/3)$. Provare che la sola condizione di simmetria porta ad una allocazione che è instabile oppure irrealizzabile.

Problema 43 (Capitolo 8) Dato che il gioco di maggioranza semplice è un gioco simmetrico, sarebbe sorprendente che la "soluzione" non fosse simmetrica.

Potete immaginare qualche idea diversa di soluzione che possa essere considerata simmetrica e che non abbia i problemi di stabilità che ha il valore Shapley?

Problema 44 (Capitolo 8) Si consideri la seguente variante del "gioco dei guanti". Vi sono cinque giocatori. Il giocatore 1 possiede un guanto sinistro e il giocatore 2 ne possiede 3. I giocatori 3, 4 e 5 hanno un guanto destro ciascuno. Trovare il nucleo di questo gioco e commentare. Si può immaginare una opzione interessante per il giocatore 2?

Problema 45 (Capitolo 8) Quando ho dato la definizione di "valore" (pagina 196) ho assunto, per semplificarmi la vita, che fosse $N = \{1, \ldots, n\}$. Ho ho per caso usato il principio di anonimità per fare questo?

Problema 46 (Capitolo 8) Si può dimostrare che il nucleo di un gioco semplice è non vuoto se e solo se vi sono giocatori con potere di veto. Esprimete in termini formali cosa vuol dire che un giocatore ha "potere di veto". E poi provate a dimostrare l'affermazione precedente.

Problema 47 (Capitolo 8) Fornite una definizione formale di monotonia per un gioco semplice. E' una condizione che ci si può aspettare sia soddisfatta, in genere? Fornite esempi e controesempi, se possibile.

Problema 48 (Capitolo 8) Definire un "valore" sulla classe dei giochi semplici superadditivi che soddisfi i quattro assiomi di anonimità, efficienza, "dummy player" ed additività, ma che sia *diverso* dal valore Shapley. Suggerimento: si consideri un gioco non simmetrico.

Problema 49 (Capitolo 8) In riferimento al cosiddetto "airport game", si consideri un "piccolo aeroporto". Nel quale avvengono ogni anno (!) un atterraggio di un piccolo aereo e uno di uno grande. La pista dura 10 anni e costa 100 milioni se lunga quanto serve per l'aereo piccolo e 200 milioni se va bene per entrambi. Trascuriamo fattori di sconto e "spalmiamo" la cifra occorrente sui dieci anni. Abbiamo allora un gioco con 2 giocatori (un atterraggio di aereo piccolo ed uno di aereo grande), per il quale possiamo calcolare il valore Shapley. Cosa succede se invece consideriamo il gioco su un arco temporale di due anni?

Problema 50 (Capitolo 8) Questo problema è tratto da Osborne e Rubinstein, che lo presentano in una versione più articolata, sotto il titolo "pollute the lake". Abbiamo n aziende "identiche" che utilizzano l'acqua di un lago e dopo l'uso ve la rigettano dentro. Ogni azienda deve sostenere un costo per purificare l'acqua prelevata, in modo da poterla usare, e questo costo è pari a kc, dove k è il numero di aziende che non depurano l'acqua prima di scaricarla nel lago. Il costo per trattare l'acqua è pari a b. Si supponga che $c < b < nc$.

Modellizzando questa situazione come gioco cooperativo, come definireste $v(S)$ per una coalizione S di aziende?

Bibliografia

11.1 Libri consigliati

In questa prima parte dedicata ai riferimenti bibliografici dò alcune indicazioni (personali e parziali) su libri che possono essere utilizzati da chi fosse interessato ad approfondire, a vari livelli, la sua conoscenza della TdG. Premetto (per chi fosse interessato a saperlo...) che i miei 5 libri preferiti sono, in ordine alfabetico: Dutta, Luce e Raiffa, Myerson, Osborne e Rubinstein, Owen.

Per una introduzione abbastanza elementare, vedi:

Davis, M.D. (1970): *Game Theory: A Nontechnical Introduction*, Basic Books, New York (NY, USA), (seconda edizione: 1983, ristampa: 1997 by Dover, Mineola (NY, USA)).

Il titolo dice tutto. Ottimo testo divulgativo.

Lucchetti, R. (2001): *Di duelli, scacchi e dilemmi*, Paravia Scriptorium, Torino.

Un buon testo, con intenti esplicitamente divulgativi.

Straffin, P. (1996): *Game Theory and Strategy*, The Mathematical Association of America, Washington, DC. 1995.

Ottimo testo. Da un autore ben noto per le sue opere didattiche e divulgative.

Buoni manuali, per un primo approfondimento:

Binmore, K. (1992): *Fun and games*, Heath and Company, Lexington (MA, USA).

Un testo piuttosto completo ed anche molto aggiornato. E' un testo ricco, anche se a volte un po' prolisso; Binmore si diverte, inoltre, a "giocare" con le difficoltà matematiche.

Colombo, F. (2003): *Introduzione alla teoria dei giochi*, Carocci, Roma.

Un ottimo testo introduttivo, anche se parziale come contenuti: si privilegia la discussione delle principali soluzioni per i giochi non cooperativi.

Dutta, P.K. (1999): *Strategies and Games: Theory and Practice*, MIT Press, Cambridge (MA, USA).

Un ottimo testo introduttivo, con vari interessanti esempi concreti; utilizza inoltre un apparato formale poco sofisticato. E' fra i miei 5 libri preferiti.

Gibbons, R. (1992): *Teoria dei Giochi*, Il Mulino, Bologna; traduzione (1994) di: *A Primer in Game Theory*, Harvester.

Un buon manuale, con vari interessanti esempi, anche se copre solo una parte della disciplina (non c'è nulla sui giochi cooperativi) ed ha una ottica molto focalizzata sulle "applicazioni" economiche.

Luce, R.D. e H. Raiffa (1957): *Games and Decisions*, Wiley, New York.

Un libro scritto magnificamente. E, come tutti i bei libri, sente meno il problema dell'invecchiamento. E' fra i miei 5 libri preferiti.

A livelli più avanzati sono:

Aumann, R.J. e S. Hart (1992-2002): *Handbook of Game Theory*, North-Holland, Amsterdam, Vol.1: 1992; Vol. 2: 1994; Vol. 3: 2002.

Questo non è un libro, ma una "enciclopedia", in tre volumi (il terzo uscito parecchio dopo). Sono generalmente testi piuttosto avanzati. Può essere utile, ma certamente gli manca l'organicità di un libro. Non solo, ma essendo di fatto una raccolta di surveys, è meno fruibile da chi non sia già addentro alla disciplina.

Costa, G. e P.A. Mori (1994): *Introduzione alla teoria dei giochi*, Il Mulino, Bologna.

Un buon libro, scritto da due economisti. Non parlano di giochi cooperativi. Sono interessanti anche i capitoli "finali" dedicati ad alcune applicazioni.

Fudenberg, D. e J. Tirole (1991): *Game Theory*, MIT Press, Cambridge (MA, USA).

Ottimo testo avanzato, ricchissimo di esempi e motivazioni economiche, mirato allo specialista od aspirante tale.

Hargreaves Heap, S.P. e Y. Varoufakis (2004): *Game Theory: a critical text*, Routledge, Londra.

Esattamente come dice il titolo: una lettura critica della teoria dei giochi. E' una riedizione (molto) rivista di: "Game Theory: A Critical Introduction", pubblicato nel 1995, sempre da Routledge.

Hart, S. (1992): *Games in Extensive and Strategic Form*, in: "Handbook of Game Theory", vol. 1 (curatori: R. Aumann e S. Hart), North-Holland, Amsterdam.

Un ottimo breve testo dove sono descritti i due modelli principali per i giochi non cooperativi: la forma estesa e quella strategica.

Ichiishi, T. (1983): *Game Theory for Economic Analysis*, Academic Press, New York.

Manuale molto "matematico": contiene risultati formali avanzati per giochi cooperativi e non.

Kreps, D.M. (1990): *Teoria dei giochi e modelli economici*, Il Mulino, Bologna; traduzione (1992) di *Game Theory and Economic Modeling*, Oxford University Press, Oxford.

Offre una lettura critica sul contributo della teoria dei giochi al pensiero economico.

Myerson, R.B. (1991): *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge (MA, USA).

Ottimo testo, molto preciso e ben organizzato; meno ricco di esempi economici rispetto a Fudenberg e Tirole, in compenso si occupa anche dei giochi cooperativi. Interessante è la parte dedicata al problema della comunicazione. E' fra i miei 5 libri preferiti.

von Neumann, J. e O. Morgenstern (1994): *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton (NJ, USA); seconda edizione (con in appendice la derivazione assiomatica dell'utilità attesa): 1947; terza edizione: 1953.

Con questo libro nasce la teoria dei giochi. Vale tuttora la pena di leggerlo, anche se certe parti sentono il tempo passato.

Osborne, M. e A. Rubinstein (1994): *A course in Game Theory*, MIT Press, Cambridge (MA, USA).

Eccellente. E' molto aggiornato e molto interessante. Unico difetto: le definizioni sono a volte un po' troppo "elaborate". E' fra i miei 5 libri preferiti.

Owen, G. (1968): *Game Theory*, Academic Press, New York, (seconda edizione: 1982, terza edizione: 1995).

E' stato un ottimo testo, e lo è ancora, anche se un po' si sente che è "datato". Resta comunque un ottimo riferimento, in particolare per i giochi cooperativi. E' fra i miei 5 libri preferiti.

Rasmusen, E. (1989): *Teoria dei giochi ed informazione*, Hoepli, Milano; traduzione (1993) di: *Games and Information*, Basil Blackwell, Oxford.

Molto ricco di esempi. Credo sia utile per "capire" certi aspetti e motivazioni della TdG.

Shubik, M. (1982): *Game Theory in the Social Sciences: Concepts and Solutions*, MIT Press, Cambridge (MA, USA).

Un libro molto interessante, in particolare per chi sia interessato alle applicazioni della TdG alle scienze sociali.

Aggiungo infine alcuni riferimenti per la teoria dell'utilità, la teoria della decisione ed "affini":

Fishburn, P.C. (1979): *Utility Theory for Decision Making*, Krieger, Huntington (NY, USA).

Un'ottima esposizione, fatta da un grande esperto. Ha un taglio molto formale.

French, S. (1993): *Decision Theory*, Ellis Horwood, New York.

Interessante e molto ben leggibile come introduzione (ed oltre) alla teoria delle decisioni, sia nel caso del decisore singolo che in altri contesti.

Hargreaves Heap, S.H., M. Hollis, B. Lyons, R. Sugden, A. Weale (1992): *La teoria della scelta. Una guida critica*, Laterza, Bari; traduzione (1996) di: *The Theory of Choice: A Critical Guide*, Weale e Blackwell, Cambridge (MA, USA).

Viene offerta una esposizione sistematica della teoria della scelta (decisioni individuali, interazione strategica, scelte collettive) con un approccio interdisciplinare.

Kreps, D.M. (1988): *Notes on the Theory of Choice*, Underground Classics in Economics, Westview Press, Boulder (CO, USA).

Molto bello. Rispetto a Fishburn (1979), oltre ad essere meno formale, contiene molte discussioni interessanti e stimolanti.

Kreps, D.M. (1990): *Corso di Microeconomia*, Il Mulino, Bologna; traduzione (1993) di: *A Course in Microeconomic Theory*, Harvester Wheatsheaf, New York.

Come dice il titolo, è un manuale di microeconomia; lo segnalo perché è interessante sia per la trattazione delle preferenze del decisore che per la teoria dei giochi stessa.

Roberts, F.S. (1979): *Measurement Theory with Applications to Decisionmaking, Utility, and the Social Sciences*, Encyclopedia of mathematics and its applications, n. 7, Addison-Wesley, London.

Interessante per la rappresentabilità delle preferenze mediante funzioni di utilità. Vale la pena di leggerlo per vedere questo problema "immerso" dentro a quello più generale della misura di grandezze da un punto di vista teorico. Ad esempio, la misura della massa vista come "funzione" additiva che rispetta particolari proprietà d'ordine.

11.2 Riferimenti citati nel testo

Aadland, D. and V. Kolpin (1998): *Shared Irrigation Costs - An Empirical and Axiomatic Analysis*, Mathematical Social Sciences, **35**, 203-218.

Akerlof, G. (1970): *The Market for Lemons: Qualitative Uncertainty and the Market Mechanism*, Quarterly Journal of Economics, **84**, 488-500.

Alon, U., N. Barkai, D.A. Notterman, K. Gish, S. Ybarra, D. Mack, e A.J. Levine (1999): *Broad patterns of gene expression revealed by clustering analysis of tumor and normal colon tissues probed by oligonucleotide arrays*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **96**, 6745-6750.

Arrow, K.J. (1951): *Social Choice and Individual Values*, Wiley, New York; seconda edizione (con importanti correzioni): 1963; traduzione italiana: *Scelte sociali e valori individuali*, Etas libri, Milano, 1977.

Aumann, R.J. (1964): *Markets with a continuum of traders*, Econometrica, **32**, 39-50.

Aumann, R.J. (1974): *Subjectivity and correlation in randomized strategies*, Journal of Mathematical Economics, **1**, 67-96.

Aumann, R.J. (1976): *Agreeing to Disagree*, Annals of Statistics, **4**, 1236-1239.

Aumann, R.J. (1987): *Game Theory*, in "The new Palgrave Dictionary of Economics", (curatori: J. Eatwell, M. Milgate e P. Newman), Macmillan, Londra, 460-482.

Axelrod, R. (1984): *The Evolution of Cooperation*, Basic Books, New York; traduzione italiana: *Giochi di reciprocità*, Feltrinelli, Milano, 1985.

Banzhaf, J.F. III (1965): *Weighted Voting Doesn't Work: A Mathematical Analysis*, Rutgers Law Review, **19**, 317-343.

Bernoulli, D. (1738): *Specimen theoriæ novæ de mensura sortis, Commentarii academiæ scientiarum imperialis Petropolitanæ*, **5**, 175-192; traduzione in inglese: "Exposition of a New Theory of the Measurement of Risk", Econometrica, *22*, (1954), 23-36.

Binmore, K. (1992): *Fun and games*, Heath and Company, Lexington (MA, USA).

Binmore, K. (1994): *Game Theory and the Social Contract - Vol. 2: Playing Fair*, MIT Press, Cambridge (MA, USA).

Binmore, K. (1997): *Rationality and backward induction*, Journal of Economic Methodology, **4**, 23-41.

Binmore, K. (1998): *Game Theory and the Social Contract - Vol. 2: Just Playing*, MIT Press, Cambridge (MA, USA).

Bischi, G.I., R. Carini, L. Gardini, P. Tenti (2004): *Sulle orme del caos*, Bruno Mondadori, Milano.

Bondareva, O.N. (1963): *Nekotorye primeneniia metodov linejnogo programmirovniia k teorii kooperativenykh igr* (in russo; titolo in inglese: "Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games"), Problemy Kibernet., **10**, 119-139.

Chamberlin, E. (1929): *Duopoly: Value where sellers are few*, Quarterly Journal of Economics, **43**, 63-100.

Coleman, J.S. (1971): *Control of Collectivities and the Power of a Collectivity to Act*, in "Social Choice" (curatore: B. Lieberman), Gordon and Breach, Londra, 269-300.

Davis, M.D. (1970): *Game Theory: A Nontechnical Introduction*, Basic Books, New York (NY, USA), (second edition, 1983, reprinted 1997 by Dover, Mineola (NY, USA)).

de Finetti, B. (1937): *La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, **7**, 1-68.

Dimand, M.A. e R.W. Dimand (1996): *A History of Game Theory. Volume 1*, Routledge, Londra.

Doll, C. (2004): *Fair and Efficient Motorway Charges - A Game Theory Application*, 10^{th} World Conference on Transport Research, Istambul, Turchia.

Driessen, T. (1988): *Cooperative games, solutions and applications*, Kluwer, Dordrecht.

Dutta, P.K. (1999): *Strategies and Games: Theory and Practice*, MIT Press, Cambridge (MA, USA).

Edgeworth, F.Y. (1881): *Mathematical Psychics*, Kegan Paul, Londra.

Fishburn, P.C. (1979): *Utility Theory for Decision Making*, Krieger, Huntington (NY, USA).

Fragnelli, V., I. García-Jurado, H. Norde, H., F. Patrone e S. Tijs (1999): *How to Share Railways Infrastructure Costs?*, in "Game Practice: Contributions from Applied Game Theory" (curatori: F. Patrone, I. García-Jurado e S. Tijs), Kluwer, Dordrecht.

French, S. (1993): *Decision Theory*, Ellis Horwood, New York.

Fudenberg, D. e D.K. Levine (1998): *The Theory of Learning in Games*, MIT Press, Cambridge (MA, USA).

Gibbons, R. (1992): *A Primer in Game Theory*, Harvester, New York (NY, USA); traduzione italiana: *Teoria dei Giochi*, Il Mulino, Bologna, 1994.

Gonzalez, P. e C. Herrero (2004): *Optimal sharing of surgical costs in the presence of queues*, Mathematical Methods of Operations Research, **59**, 435-446.

Greif, A. (2002): *Economic History and Game Theory*, in *Handbook of Game Theory*, Vol. 3, North-Holland, Amsterdam.

Harsanyi, J.C. (1973): *Oddness of the number of equilibrium points: A new proof*, International Journal of Game Theory, **2**, 235-250.

Harsanyi, J.C. (1967-68): *Games with incomplete information played by Bayesian players*, Parts I, II and III, Management Science, **14**, 159-182, 320-334, 486-502.

Harsanyi, J.C. (1977): *Rational behavior and bargaining equilibrium in games and social situations*, Cambridge University Press, Cambridge (MA, USA).

Harsanyi, J.C. e R. Selten (1988): *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*, MIT Press, Cambridge (MA, USA).

Hart, S. e A. Mas-Colell (1989): *Potential, Value, and Consistency*, Econometrica, **57**, 589-614.

Kadane, J. e P. Larkey (1982): *Subjective probability and the theory of games*, Management Science, 28, 113-120.

Kakutani, S. (1941): *A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem*, Duke Math. J., **8**, 457-458.

Kalai, E. e M. Smorodinsky (1975): *Other Solutions to Nash's Bargaining Problem*, Econometrica, **43**, 513-518.

Kohlberg, E. e J.-F. Mertens (1986): *On the Strategic Stability of Equilibria*, Econometrica, **54**, 1003-1037.

Klemperer, P. (2004): *Auctions: Theory and Practice*, Princeton University Press, Princeton (NJ, USA).

Kreps, D.M. (1988): *Notes on the Theory of Choice*, Underground Classics in Economics, Westview Press, Boulder (CO, USA).

Kreps, D., P. Milgrom, J. Roberts e R. Wilson (1982): *Rational Cooperation in the Finitely Repeated Prisoners' Dilemma*, J. of Economic Theory, **27**, 245-252.

Kreps, D.M. e R.B. Wilson (1982): *Sequential Equilibria*, Econometrica, **55**, 1331-1348.

Krishna, V. (2002): *Auction Theory*, Academic Press, San Diego (CA, USA).

Kuhn, H.W. (1953): *Extensive Games and Problems of Information*, in "Contributions to the Theory of Games", n. II, (curatori: H.W. Kuhn e A.W. Tucker), Annals of Math. Studies, **28**.

Leech, D. (2002): *An Empirical Comparison of the Performance of Classical Power Indices*, Political Studies, **50**, 1-22.

Lewis, D.K. (1969): *Conventions: A Philosophical Study*, Harvard University Press, Cambridge (MA, USA).

Maynard Smith, J. (1982): *Evolution and the theory of games*, Cambridge University Press, Cambridge, GB.

Maynard Smith, J. e G.R. Price (1973): *The logic of animal conflict*, Nature, **246**, 15-18.

Milgrom, P.R. e N. Stokey (1982): *Information, trade and Common Knowledge*, J. Econ. Theory, **26**, 17-27.

Moretti, S. (2004): *A Model for Cooperative Inter-Municipal Waste Collection: Cost Evaluation Toward Fair Cost Allocation*, in "Game Practice And The Environment" (curatori: C. Carraro e V. Fragnelli), Edward Elgar, Londra.

Moretti, S. e F. Patrone (2004): *Cost allocation games with information costs*, Mathematical Methods of Operations Research, **59**, 419-434.

Moretti, S., F. Patrone e S. Bonassi (2004): *The class of Microarray games and the relevance index for genes*, preprint.

Morgan, J. e M. Sefton (2002): *An Experimental Investigation of Unprofitable Games*, Games and Economic Behavior, **40**, 123-146.

Myerson, R.B. (1978): *Refinements of the Nash equilibrium concept*, International Journal of Game Theory, **7**, 73-80.

Myerson, R.B. (1979): *Incentive Compatibility and the Bargaining Problem*, Econometrica, **47**, 61-73.

Myerson, R.B. (1991): *Game Theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge (MA, USA).

Nash, J.F.Jr. (1950): *Equilibrium Points in n-Person Games*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **36**, 48-49.

Nash, J.F.Jr. (1950): *The Bargaining Problem*, Econometrica, **18**, 155-162.

Nash, J.F.Jr. (1951): *Non-Cooperative Games*, Ann. of Math., **54**, 286-295.

von Neumann, J. (1928): *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Matematische Annalen, 100, 295-320.

von Neumann, J. e O. Morgenstern (1944): *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton (NJ, USA); seconda edizione (con in appendice la derivazione assiomatica dell'utilità attesa): 1947; terza edizione: 1953.

Neyman, A. (1985): *Bounded complexity justifies cooperation in the finitely repeated prisoner's dilemma*, Economic Letters, **19**, 227-229.

Norde, H., V. Fragnelli, I. García-Jurado, F. Patrone, S. Tijs (2002): *Balancedness of Infrastructure Cost Games*, European Journal of Operational Research, **136**, 635-654.

Norde, H., F. Patrone e S. Tijs (2000): *Characterizing Properties of Approximate Solutions for Optimization Problems*, Mathematical Social Sciences, **40**, 297-311.

Osborne, M. e A. Rubinstein (1990): *Bargaining and markets*, Academic Press, San Diego (CA, USA).

Osborne, M. e A. Rubinstein (1994): *A course in Game Theory*, MIT Press, Cambridge (MA, USA).

Owen, G. (1968): *Game Theory*, Academic Press, New York, (seconda edizione: 1982, terza edizione: 1995).

Pareto, V. (1906): *Manuale di economia politica con una introduzione alla scienza sociale*, Società Editrice Libraria, Milano.

Peleg, B. e S. Tijs (1996): *The consistency principle for games in strategic form*, Internat. J. Game Theory, **25**, 13-34.

Peters, H. (1997): *Cooperative Game Theory*, University of Maastricht, Maastricht.

Pontryagin, L.S. (1962): *Ordinary Differential Equations*, Addison Wesley, Reading (MA, USA).

Radner, R. (1980): *Collusive behavior in non-cooperative epsilon equilibria of oligopolies with long but finite lives*, Journal of Economic Theory, **22**, 121-157.

Raiffa, H. (1982): *The art and science of negotiation*, Harvard University Press, Cambridge (MA, USA).

Ramamurthy, K.G. (1990): *Coherent Structures and Simple Games*, Kluwer, Dordrecht.

Roberts, F.S. (1979): *Measurement Theory with Applications to Decisionmaking, Utility, and the Social Sciences*, Encyclopedia of mathematics and its applications, n. 7, Addison-Wesley, London.

Roemer, J.E (1996): *Theories of Distributive Justice*, Harvard University Press, Cambridge (MA, USA).

Roth, A.E. (1977): *The Shapley Value as a von Neumann-Morgenstern Utility*, Econometrica, **45**, 657-664.

Roth, A.E. (1988), curatore: *The Shapley value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge University Press, Cambridge (MA, USA).

Roth, A.E. (1990): *New Physicians: A Natural Experiment in Market Organization*, Science, 250, 1524-1528.

Rubinstein, A. (1982): *Perfect Equilibrium in a Bargaining Model*, Econometrica, **50**, 97-109.

Rubinstein, A. (1986): *Finite automata play the repeated prisoner's dilemma*, Journal of Economic Theory, **39**, 83-96.

Savage, L.J. (1954): *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York.

Schelling, T. C. (1960): *The Strategy of Conflict.* Harvard University Press, Cambridge (MA, USA).

Selten, R. (1965): *Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit. Teil I: Bestimmung des dynamischen preisgleichgewichts; Teil II: Eigenschaften des dynamischen preisgleichgewichts*, Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, **121**, 301-324 e 667-689.

Selten, R. (1975): *Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games*, International Journal of Game Theory, **4**, 25-55.

Shapley, L.S. (1953): *A Value for n-Person Games*, in "Contributions to the Theory of Games", n. II (curatori: H.W. Kuhn e A.W. Tucker), Annals of Math. Studies, **28**, Princeton University Press, Princeton (NJ, USA), 307-317.

Shapley, L.S. e M. Shubik (1954): *A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System*, American Political Science Review, **48**, 787-792.

Shapley, L.S. e M. Shubik (1969): *On market games*, J. Econ. Theory, **1**, 9-25.

Shubik, M. (1959): *Edgeworth Market Games*, in "Contributions to the Theory of Games", n. IV (curatori: A.W. Tucker e R.D. Luce), Annals of Math. Studies, **40**, Princeton University Press, Princeton (NJ, USA), 267-278.

Spence, A.M. (1973): *Job Market Signalling*, Quarterly Journal of Economica, **87**, 355-374.

Tijs, S. (2003): *Introduction to Game Theory*, TRIM 23, Hindustan Book Agency.

Vickrey, W. (1961): *Counterspeculation, Auctions and Competitive Sealed Tenders.* Journal of Finance, **16**, 8-37.

Weintraub, R.E. (1992): *Toward a History of Game Theory*, Supplemento annuale al volume 24 di History of Political Economy, Duke University Press, Durham.

Yaari, M.E. e M. Bar-Hillel (1984): *On Dividing Justly*, Social Choice and Welfare, **1**, 1-24.

Young, H.P. (1988): *Individual contribution and just compensation*, in "The Shapley value" (curatore: A.E. Roth), Cambridge University Press, Cambridge (MA, USA).

Young, H.P. (1998): *Individual Strategy and Social Structure: An Evolutionary Theory of Institutions*, Princeton University Press, Princeton (NJ, USA).

Indice analitico