Maqquante strategie

Appunti a cura di
Fioravante PATRONE
http://www.diptem.unige.it/patrone/default.htm
http://dri.diptem.unige.it/

versione del 6 aprile 2011

Indice

Questi brevi appunti solo per mostrare come cresca rapidamente il numero di strategie in un gioco ripetuto. E quante sono in un gioco semplice come il tris.

Fioravante PATRONE	http://www.diptem.unige.it/patrone	homepage
Dipartimento di Ingegneria della	http://tdg.dima.unige.it	web teaching
Produzione, Termoenergetica e	http://www.citg.unige.it/citg.htm	web server "CITG"
Modelli Matematici	http://www.scallywag.it	web page del gruppo
P.le Kennedy - Pad D		Scaλλywag
16129 Genova - ITALY		
patrone@diptem.unige.it	http://dri.diptem.unige.it	Decisori (razionali) interagenti

1 Strategie in un gioco ripetuto

Nel file `http://dri.diptem.unige.it/DP_ripetuto/game_form_DP_BoS_due_stadi_3.pdf`, si trova la forma strategica di alcuni giochi ripetuti. Si tratta di giochi a due giocatori, in cui ogni giocatore nel gioco costituente ha solo due strategie e che durano due turni. Il fatto che le strategie siano 32 può far sospettare che esse crescano molto rapidamente all'aumentare del numero dei turni (o stadi che dir si voglia). Vediamo che infatti così è.

Manteniamo le ipotesi di avere il gioco costituente con due giocatori, ciascuno con due strategie a disposizione.

Se descriviamo il gioco ripetuto in forma estesa, sarà importante individuare quanti siano i nodi decisionali a disposizione di ogni giocatore. A dire il vero, per un giocatore possiamo parlare propriamente di nodo decisionale, mentre per l'altro si tratta di un insieme di informazione che contiene due nodi. Ma, agli effetti della nostra numerologia, non fa nessuna differenza. Ci mettiamo comunque nell'ottica del giocatore I, tanto per fissare le idee.

Abbiamo:

- Un turno di gioco: 1 nodo decisionale e 4 nodi finali
- Due turni di gioco: $1 + 4 = 5$ nodi decisionali (quello di prima più i [quattro] nodi finali di prima) e $4 \cdot 4 = 16$ nodi finali
- Tre turni di gioco: $1 + 4 + 16 = 21$ nodi decisionali (quelli di prima più i nodi finali di prima) e $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ nodi finali
- Quattro turni di gioco: $1 + 4 + 16 + 64 = 85$ nodi decisionali (quelli di prima più i nodi finali di prima) e $4^4 = 256$ nodi finali
- etc.

Ovviamente, visto che ogni giocatore ha due alternative per ogni nodo decisionale, le strategie a disposizione di ciascuno sono:

- Un turno di gioco: 1 nodo decisionale, quindi $2^1 = 2$ strategie
- Due turni di gioco: 5 nodi decisionali, quindi $2^5 = 32$ strategie
- Tre turni di gioco: 21 nodi decisionali, quindi $2^{21} \sim 10^6 \sim 1.000.000$ di strategie (usando l'approssimazione $2^{10} \sim 10^3 \sim 1.000$)
- Quattro turni di gioco: 85 nodi decisionali, quindi 2^{81} strategie
- etc.

Si generalizza facilmente (la dimostrazione per induzione è lasciata al lettore): con n turni, il numero di strategie a disposizione è

$$2^{4^0+4^1+4^2+\ldots+4^{n-1}}$$

Le progressioni geometriche ci dicono che:

$$4^0 + 4^1 + 4^2 + \ldots + 4^{n-1} = \frac{1-4^n}{1-4} = \frac{4^n-1}{3}.$$

Quindi, ad esempio, per 5 turni abbiamo 2^{341} strategie.

2 Strategie nel tris

E il tris? Già che ci siamo, facciamo due conti. Il giocatore I, che inizia il gioco (diciamo quello che mette le crocette, tanto per fissare le idee) quante strategie ha?

Alla prima mossa ha 9 alternative. Poi tocca all'altro, il giocatore II, che ha 8 alternative distinte per ogni scelta fatta da I. Quando ritocca a I, egli ha 7 alternative per ognuna delle $9 \cdot 8 = 72$ situazioni differenti (nodi dell'albero del gioco) in cui si può venire a trovare. E così via. In totale, le strategie a disposizione di I sono:

$$9 \cdot 7^{9\cdot 8} \cdot 5^{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6} \cdot 3^{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}$$

Calcoli simili ci dicono che il numero di strategie a disposizione di II sono:

$$8^9 \cdot 6^{9\cdot 8\cdot 7} \cdot 4^{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5} \cdot 2^{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}$$