

Essere d'accordo di non essere d'accordo

Fioravante PATRONE
Dipartimento di Ingegneria della Produzione,
Termoenergetica e Modelli Matematici
P.le Kennedy - Pad D
16129 Genova - ITALY
patrone@diptem.unige.it

http://www.diptem.unige.it/patrone	homepage
http://tdg.dima.unige.it	web teaching
http://www.citg.unige.it/citg.htm	web server "CITG"
http://www.scallywag.it	web page del gruppo Scallywag

1 Concetti di base

Il (giustamente) famoso risultato di Aumann (Robert J. Aumann [1976]: Agreeing to Disagree, *Annals of Statistics*, 4, 1236-1239) può essere descritto semi discorsivamente nel modo seguente.

Abbiamo un evento E , sottoinsieme di un dato insieme di eventi elementari Ω . Possiamo anche assumere, senza togliere nulla di essenziale, che Ω sia un insieme finito e che gli eventi elementari, ovvero gli elementi di Ω , siano equiprobabili. Ad esempio, potremmo avere due dadi, uno giallo ed uno verde. Che, come è lecito aspettarsi, lanceremo. . . Allora un modello molto naturale per rappresentare questa situazione è dato dall'insieme Ω che contiene tutte le possibile coppie ordinate di numeri da 1 a 6. Cioè: $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 1), \dots, (6, 6)\}$ (per fissare le idee, assumerò la convenzione che il primo numero indichi il risultato del dado giallo ed il secondo quello del dado verde). Sempre per restare su questo esempio, potrebbe essere $E = \{(1, 1), (2, 3), (2, 6), (3, 1)\}$. Vista la semplicità dell'esempio, se abbiamo due individui con un minimo di sale in zucca possiamo ritenere scontato che essi assegnino probabilità $4/36$, ovvero $1/9$ al fatto che l'evento E si verifichi (più precisamente, al fatto che dal lancio dei due dadi venga una coppia di numeri che appartiene ad E). Nel gergo di chi si occupa di queste cose, questa probabilità viene di solito indicata come la "prior" dei due individui.

Supponiamo che i dadi vengano lanciati. Se questi due individui non sono in grado di osservare il lancio dei dadi, essi continueranno ad attribuire probabilità pari ad $1/9$ al fatto che si sia verificato l'evento E . Se invece possono osservare il risultato, molto banalmente essi attribuiranno probabilità 1 oppure 0 all'evento E a

seconda che il risultato appartenga oppure no ad E . Ad esempio, se il risultato del dado giallo è 2 e quello del dado verde è 6, la probabilità assegnata all'evento E è pari ad 1.

Le cose cominciano a farsi più interessanti se assumiamo che i due individui possano fare una osservazione parziale del risultato. Ad esempio, che il primo individuo possa osservare il risultato del dado giallo ed il secondo quello del dado verde. Per far prima, d'ora in poi farò riferimento all'individuo R ed all'individuo B (devo dire cosa intendo?). Allora, se il risultato è stato $(2, 6)$, l'individuo R assegnerà probabilità $1/3$ ad E , mentre per l'individuo B la probabilità che l'evento E si sia verificato sarà stimata pari a $1/6$. Perché? Vediamo il caso di R . Egli, avendo osservato 2 dall'uscita del dado giallo, sa che l'evento elementare che si è verificato è uno fra $\{(2, 1), (2, 2), \dots, (2, 6)\}$. Visto che 2 elementi di E sono contenuti in questo insieme, il rapporto fra casi favorevoli e casi possibili è $2/6 = 1/3$. Da qui la sua stima. Si noti, per chi sappia di queste cose, che non abbiamo fatto altro che calcolare la probabilità condizionata (all'osservazione fatta) dell'evento E .

Come si vede, le stime dei due individui (quelle che in gergo vengono dette le "posterior") sono diverse. Niente di strano. Hanno ricevuto dei *segnali* che convogliano una informazione parziale e *diversa* rispetto a quale sia l'evento elementare che si è verificato.

Cosa succede se i due individui, dopo avere fatto queste osservazioni parziali, possono parlarsi? Se entrambi hanno interesse al fatto che la stima di ciascuno di loro sia la più accurata possibile, è evidente che hanno tutto l'interesse a mettere in comune l'informazione parziale che ciascuno di loro ha ricevuto. Tra l'altro, in questo caso, mettendo assieme le due informazioni parziali ottengono una descrizione completa dell'evento elementare che si è verificato.

Quindi, di fronte a questa completa libertà di comunicazione, il caso ridiventa banale. Supponiamo allora che le possibilità di comunicare siano anch'esse ristrette (come ristrette sono le capacità di osservazione di entrambi). Più precisamente, supponiamo che i due tizi possano solo comunicarsi la loro *stima delle probabilità*, ovvero le loro "posterior". Ebbene, il risultato di Aumann ci garantisce che questa informazione addizionale avrà l'effetto (miracoloso?) di rendere *uguali* le loro posterior. Dopo, s'intende, un processo di revisione che presuppone intelligenza da parte dei due individui. E, se necessario, la condivisione delle revisioni parziali cui saranno giunti.

Insomma, è impossibile, per i due individui, essere d'accordo sul fatto di avere stime discordanti della probabilità dell'evento E . Si noti, però, che per ottenere questo risultato è *essenziale* che sia *conoscenza comune* fra i due individui il fatto che R osserva il dado giallo e B quello verde. Cioè, il signor R non solo sa che lui stesso osserva il dado giallo, ma sa anche che B osserva quello verde, e sa anche che B sa entrambi i fatti, e sa anche che B sa che lui sa che... Insomma, ogni affermazione di questo genere deve essere vera.

Dedicherò il paragrafo seguente ad illustrare vari casi, sempre riferentesi a questo esempluccio di due dadi.

Prima, però, un cenno ad una conseguenza interessante di questo risultato. Come abbiamo visto sopra, con $E = \{(1, 1), (2, 3), (2, 6), (3, 1)\}$, se il risultato è $(2, 6)$, la “posterior” per R è $1/3$ e per B è $1/6$. Ma allora sia R che B potrebbero accettare una scommessa in cui R dà 1 euro a B se l’evento E è falso e riceve (sempre da B) 3 se E è vero. Ovvio: il guadagno atteso per R è pari a: $2/3 \cdot (-1) + 1/3 \cdot (3) > 0$ e lo stesso fatto vale per B (il suo guadagno atteso è $5/6 \cdot (1) + 1/6 \cdot (-3) > 0$). Noto come le somme coinvolte siano piccole, per cui è abbastanza plausibile che entrambi i giocatori adottino il criterio del guadagno atteso per valutare la vantaggiosità o meno di una scommessa.

Ma se B propone ad R questa scommessa, ed è conoscenza comune il fatto che R osserva il dado giallo e B quello verde, l’intelligenza di R dovrebbe indurlo a riflettere! Questa è l’essenza di un famoso risultato (il “no trade theorem” di Milgrom e Stokey), che è conseguenza diretta del teorema di Aumann.

2 Dadi gialli e dadi verdi

Ribadisco che in tutti gli esempi che seguono ci occupiamo del lancio di due dadi, uno giallo ed uno verde. Abbiamo un decisore che vede l’esito del dado giallo (e solo di quello) ed un altro che vede l’esito del dado verde (e solo quello). E ciò si assume sia conoscenza comune fra i due decisori.

E’ anche sempre individuato un sottoinsieme E di $\{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\}$, che nei disegni viene evidenziato con i pallini neri. Si assume che sia conoscenza comune fra i due decisori anche chi sia E .

Esempio 1

DADO VERDE				•	•	•
	•	•				
	•					
	DADO GIALLO					

Lo stato vero di natura sia $(3, 2)$ (cioè, il risultato del lancio dei due dadi sia $(3, 2)$). La prior di entrambi, cioè la probabilità che entrambi assegnano al fatto che lo stato

vero sia in E , è $6/36 = 1/6$.

Il decisore R osserva il dado giallo e la sua posterior sarà $1/6$ (si noti che è identica alla prior, d'altronde è ovvio che qualunque informazione lui avesse ricevuto dal lancio del dado giallo non gli sarebbe stato di alcuna utilità).

Il decisore B aggiorna a $1/3$.

Le posterior vengono rese conoscenza comune.

Allora R , sapendo la posterior di B , capisce che ciò che ha osservato B non può essere altro che 2 e quindi deduce che lo stato vero di natura è $(3, 2)$ e quindi assegna probabilità 1 ad E .

B invece non effettua nessun aggiornamento, rimanendo con la stessa posterior $1/3$ che aveva prima.

Le nuove posterior vengono rese conoscenza comune.

R non modifica la sua posterior, che resta 1.

Invece B capisce che lo stato vero di natura deve essere uno fra $(2, 2)$ e $(3, 2)$, entrambi comunque appartenenti ad E , quindi aggiorna la sua posterior a 1.

Le nuove posterior vengono rese conoscenza comune.

Nessuno ha ragione per modificare la sua posterior. Quindi restano entrambe uguali ad 1. Si noti che R sa chi è il vero stato di natura, mentre B non lo sa.

Nota 1 Vedere cosa avviene se lo stato vero di natura è $(1, 1)$.

Altro esempio:

Esempio 2 L'evento è:

DADO VERDE					•	•
					•	•
					•	•
					•	•

DADO GIALLO

La prior di entrambi è $8/36$.

Lo stato vero di natura sia $(5, 3)$.

Il decisore R osserva il dado giallo e aggiorna la sua prior a $2/3$. Il decisore B aggiorna a $1/3$.

Le posterior vengono rese CK (cioè, “common knowledge”, ovvero “conoscenza comune”).

R , sapendo la posterior di B , capisce che lo stato vero di natura non può essere né $(5, 1)$, né $(5, 2)$, perché altrimenti la posterior di B sarebbe stata 0. Allora R rivede la sua posterior e assegna (correttamente) probabilità 1 all’evento dato dagli 8 pallini.

Discorso analogo per B .

Esempio 3

DADO VERDE

				•	•
				•	•
				•	•
				•	•
•	•				
•	•				

DADO GIALLO

La prior di entrambi è $12/36$.

Supponiamo che lo stato di natura vero sia di nuovo $(5, 3)$. Allora la posterior di R è di nuovo $2/3$, mentre la posterior di B è $1/3$, come prima.

Vengono rese CK

Naturalmente, questa volta il fatto che la posterior di B sia $1/3$ non dice nulla a R , che non ha ragione di rivedere la sua posterior.

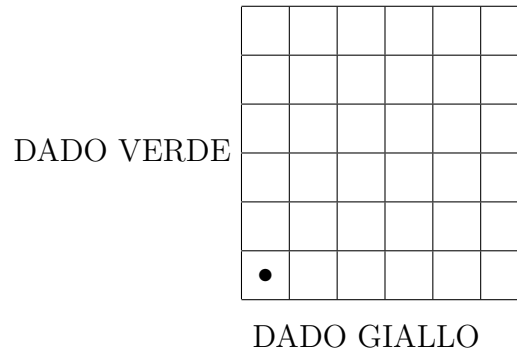
Invece B sa che dal dado verde è uscito 3 e quindi capisce che quindi dal dado giallo deve essere uscito 4 oppure 5 (sennò la posterior di R non potrebbe essere $2/3$). E quindi la sua posterior diventa 1.

Le nuove posterior vengono rese CK.

Ora R , sapendo che B ha modificato la sua posterior e che questa è diventata 1, ne deduce che B non può avere osservato altro che un numero fra 3, 4, 5, 6. E quindi anche lui assegna probabilità 1 al fatto che lo stato vero di natura stia in E .

Notare che, alla fine, R sa che lo stato vero di natura è uno fra $(5, 3)$, $(5, 4)$, $(5, 5)$, $(5, 6)$, mentre B sa che è uno fra $(5, 3)$ e $(6, 3)$

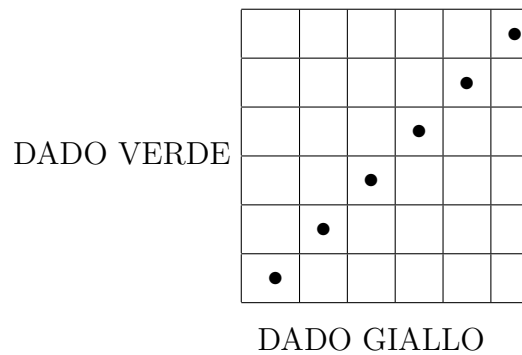
Ancora un altro paio di esempi:

Esempio 4

La prior di entrambi è $1/36$.

Supponiamo che lo stato di natura vero sia $(1, 1)$. Allora la posterior di R è $1/6$, mentre la posterior di B è $1/6$ anch'essa.

Nel momento in cui le posterior vengono rese conoscenza comune, deducono entrambi che lo stato di natura vero è $(1, 1)$ e quindi attribuiscono probabilità 1 all'evento E

Esempio 5

La prior di entrambi è $1/6$. Supponiamo di nuovo che lo stato vero di natura sia $(1, 1)$.

Naturalmente, questa volta l'osservazione del loro dado non dice nulla ai due decisori, che quindi restano con le loro posterior inalterate, identiche alle prior. Si noti che se potessero mettere in comune le informazioni parziali che hanno, dedurrebbero che la probabilità dell'evento è 1 (nello stato di natura dato).