Tragedia dei commons

Aspetti analitici elementari

Appunti a cura di
Fioravante PATRONE
http://www.diptem.unige.it/patrone/default.htm

Indice

1 Il gioco e l'equilibrio di Nash **2**

2 L'inefficienza dell'equilibrio di Nash **4**

Nota preliminare

La "tragedia dei commons" indica un fenomeno pervasivo e di notevole interesse. Chi fosse interessato ad approfondire questa tematica può leggere l'articolo originale di Garrett Hardin (*The Tragedy of the Commons*, Science, **162**, pp. 1243-1248, 1968), facilmente reperibile gratuitamente in rete, oppure le parti ad essa dedicate nel libro di Prajit K. Dutta (*Strategies and Games: Theory and Practice*, MIT Press, 1999).

Lo scopo di questi appunti è ben diverso: mostrare come un modellino ragionevole della tragedia dei commons offra l'occasione per interessanti esercizi di "analisi I".

1 Il gioco e l'equilibrio di Nash

La tragedia dei commons la modellizziamo come un gioco in forma strategica (a due giocatori, per semplicità; si può fare, senza alcuna essenziale difficoltà aggiuntiva, anche nel caso di n giocatori).

Un gioco in forma strategica è $G = (X, Y, f, g)$. Dove X e Y sono insiemi non vuoti ed $f, g : X \times Y \to \mathbb{R}$. Un equilibrio di Nash per G è una coppia $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ tale che:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \quad \forall x \in X \quad (1)$$

$$g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \quad \forall y \in Y \quad (2)$$

Nel nostro caso[1], $X = Y = [0, \infty[$;
$f(x, y) = x\phi(x + y) - Cx$
$g(x, y) = y\phi(x + y) - Cy$.

Assumiamo che sia $C > 0$. Sulla funzione ϕ facciamo le seguenti ipotesi ($\phi : [0, \infty[\to \mathbb{R}$):

H1 ϕ è continua

H2 ϕ è strettamente decrescente

H3 ϕ è debolmente concava

H4 $\phi(0) = A$, con $A > C$.

Esercizio 1 Dimostrare che, nelle ipotesi precedenti, esiste ed è unico $M \in \mathbb{R}$ t.c. $\phi(M) = 0$

Esercizio 2 (Più facile...) Dimostrare quanto chiesto con la ipotesi aggiuntiva che ϕ sia derivabile su $[0, \infty[$.

Occupiamoci ora di trovare equilibri di Nash del gioco (ammesso che ce ne siano!).

Esercizio 3 Provare che $(0, 0)$ non è un equilibrio di Nash

[1] Come detto nella nota preliminare, scopo di questi appunti non è una discussione approfondita della tragedia dei commons, quindi sorvolo sulle molte problematiche che stanno dietro alla modellizzazione utilizzata. Mi limito ad osservare che, nel contesto "classico" dei commons intesi come terreno da pascolo aperto all'uso comunitario, la x (rispettivamente: la y) rappresenta il numero di "pecore" che il giocatore I (rispettivamente: II) porta al "pascolo". La costante C rappresenta il costo unitario di una "pecora", mentre *phi* rappresenta il ricavo unitario

Esercizio 4 Provare che, se il gioco dato ha equilibrio, allora esso è in $]0, M[\times]0, M[$

Ammettendo che si possa restringere la ricerca di equilibri di Nash a $]0, M[\times]0, M[$, per semplificarci la vita supporremo che:

H5 ϕ è derivabile (su $[0, \infty[$).

In questo modo, possiamo intanto vedere se ci sono punti che soddisfino la ben nota condizione necessaria di massimo. Infatti, la condizione (1) ci dice che la funzione *di una variabile reale* $x \mapsto f(x, \bar{y})$ ha in $\bar{x}$ un punto di massimo globale (e pertanto locale). Allora nel punto $\bar{x}$ si annullerà la derivata prima di tale funzione, che non è altro (per definizione) che la derivata parziale di f rispetto alla variabile x. Ovviamente discorso analogo vale per g e quindi otteniamo le seguenti condizioni necessarie affinché $(\bar{x}, \bar{y}) \in]0, M[\times]0, M[$ sia un equilibrio di Nash:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad (4)$$

Che, tenendo conto di come sono definite f e g, diventano:

$$\phi(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{x}\phi'(\bar{x} + \bar{y}) - C = 0 \quad (5)$$

$$\phi(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{y}\phi'(\bar{x} + \bar{y}) - C = 0 \quad (6)$$

Sottraendo membro a membro, otteniamo:

$$(\bar{x} - \bar{y})\phi'(\bar{x} + \bar{y}) = 0 \quad (7)$$

Esercizio 5 Dimostrare che $\phi' < 0$ in $]0, M[$.

Grazie a quanto affermato in questo esercizio possiamo "semplificare" l'equazione (7) che diventa:

$$(\bar{x} - \bar{y}) = 0 \quad (8)$$

Otteniamo quindi che $\bar{x} = \bar{y}$ e quindi il nostro sistema si riduce a:

$$\phi(2\bar{x}) + \bar{x}\phi'(2\bar{x}) - C = 0 \quad (9)$$

Se definiamo $h(x) = \phi(2x) + x\phi'(2x)$, possiamo osservare come $h(0) = A$, $h(M/2) = \phi(M) + (M/2)\phi'(M) < 0$. La continuità di h ci permette di poter usare il "teorema degli zeri" e dedurre che vi è un elemento in cui h si annulla.

Ma possiamo anche garantire che questo punto è unico. Per semplificarci la vita, aggiungeremo anche l'ipotesi che:

H6 ϕ sia derivabile due volte (su $[0, \infty[$).

A questo punto, le ipotesi fatte ci permettono di provare che h è una funzione derivabile, e otteniamo: $h'(x) = 2\phi'(2x) + \phi'(2x) + 2x\phi''(2x)$. Tenendo conto che $\phi' < 0$ (come notato precedentemente) e che $\phi'' \leq 0$ (per la assunzione di debole concavità), ne segue che h' è strettamente negativa. Pertanto h è strettamente decrescente e quindi lo "zero" è unico.

Bene, a questo punto siamo sicuri che vi è un solo punto che soddisfa le condizioni necessarie per essere un equilibrio di Nash. Ma lo sarà? Certo, la funzione $x \mapsto f(x, \bar{y})$ è una funzione debolmente convessa e quindi se un punto annulla la derivata prima di questa funzione è un punto di *massimo globale.*

Esercizio 6 Provare questa affermazione. Cioè, data una funzione derivabile su $]0, \infty[$ che sia concava, se in un punto si annulla la derivata prima allora tale punto è un punto di massimo globale.

Esercizio 7 Riscrivere il modello nel caso di n giocatori e riprodurre (convenientemente adattati) i risultati sopra ottenuti.

2 L'inefficienza dell'equilibrio di Nash

Bene, a questo punto sappiamo che il gioco dato ha uno ed un solo equilibrio di Nash. Ci proponiamo ora di dimostrare che il risultato che ne deriva è *inefficiente*. Ovvero, proveremo che è possibile trovare una alternativa che dà un risultato migliore ad *entrambi* i giocatori.

Consideriamo la seguente funzione: $k(x) = x\phi(x) - Cx$. In termini di *interpretazione*, stiamo considerando una situazione in cui vi sia un unico decisore che può scegliere il valore di x ottimale (nel senso che rende massimo il suo guadagno, espresso appunto da k).

Per le ipotesi fatte prima, sappiamo che k è derivabile due volte. Facciamo un po' di calcoli.

$k'(x) = \phi(x) + x\phi'(x) - C$.
$k''(x) = 2\phi'(x) + x\phi''(x)$.

Ora, $k'(0) = A - C > 0$ e $k'(M) = M\phi'(M) - C < 0$.

Poiché $\phi' < 0$ e $\phi'' \leq 0$, $k''(x) < 0$. Quindi k' è strettamente decrescente. Possiamo quindi dedurre anche in questo caso che vi è uno ed un solo "zero" per k. Cioè, esiste ed è unico $\hat{x}$ tale che $k'(\hat{x}) = 0$.

Ma $k'' < 0$, quindi k è concava e quindi (vedasi le considerazioni fatte nella sezione precedente) il punto $\hat{x}$ è un punto di massimo assoluto per k.

Domandiamoci finalmente se la scelta che deriva dall'equilibrio di Nash è efficiente. Poiché la quantità scelta da ciascun giocatore è la stessa, ovvero $\bar{x}$, cerchiamo di capire se la quantità totale $2\bar{x}$ sia ottimale. Cioè se coincida con $\hat{x}$. Ovviamente ciò può avvenire solo se $2\bar{x} = \hat{x}$, visto che la quantità ottimale è unica. Per vedere che non lo è, sarà sufficiente calcolare la derivata prima di k nel punto $2\bar{x}$ e verificare che non è uguale a zero.

$k'(u)_{|_{u=2\bar{x}}} = \phi(2\bar{x}) + 2\bar{x}\phi'(2\bar{x}) - C =$
[ricordiamo che, dalla ricerca dell'equilibrio di Nash, sappiamo che $\phi(2\bar{x}) + \bar{x}\phi'(2\bar{x}) = C$]
$= C - \bar{x}\phi'(2\bar{x}) + 2\bar{x}\phi'(2\bar{x}) - C = \bar{x}\phi'(2\bar{x})$.

Ma sappiamo che $\bar{x} \neq 0$ e che $\phi' < 0$. Quindi, $k'(u)_{|_{u=2\bar{x}}} < 0$.

Poiché $k'(\hat{x}) = 0$ e k' è strettamente decrescente, ne segue che $\hat{x} < 2\bar{x}$. Quindi la quantità $\bar{x}$ è strettamente maggiore della quantità ottimale $\hat{x}$.

Sarebbe meglio per *entrambi* i giocatori scegliere quindi la quantità $\hat{x}/2$ anziché $\hat{x}$.

Esercizio 8 Assumere che la funzione ϕ sia così definita:

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{A}{M}(M - x) & \text{per } x \in [0, M] \\ 0 & \text{per } x > M. \end{cases}$$

Ritrovare, facendo i calcoli espliciti, i risultati ottenuti per via qualitativa in queste note.