

Il valore Shapley per giochi cooperativi: un gioiello dalle mille sfaccettature

Fioravante PATRONE

DIPTeM
Università di Genova

Seminario del Dipartimento di Informatica, VR, 18/10/2005

Sommario

Il valore Shapley

Preliminari: giochi cooperativi a utilità trasferibile

Gli assiomi di Shapley

Altri assiomi per il valore Shapley

Alcune applicazioni

Componenti di costo

Indici di potere

Reliability theory

Microarray games

Conclusioni

Bibliografia

Definizioni di base

Definizione formale:

- ▶ Abbiamo un insieme finito N di **giocatori**.
- ▶ Ad ogni gruppo di giocatori, cioè ad ogni **coalizione** $S \subseteq N$, è associato $v(S) \in \mathbb{R}$
- ▶ Quindi un gioco cooperativo a **utilità trasferibile** è $v : \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ (con $v(\emptyset) = 0$)

Interpretazione: come interpretiamo $v(S)$?

- ▶ Somma dei valori di utilità (trasferibile) che i giocatori di S ottengono.
- ▶ “Soldi” che S è in grado di ottenere.
- ▶ S è in grado di vincere o perdere. Caso in cui $v(S) \in \{0, 1\}$

Definizioni di base

- ▶ **Superadditività**

$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ per S e T disgiunte.

- ▶ **Allocazione**

semplicemente un elemento x di \mathbb{R}^N .

- ▶ **Pre-imputazione**

una allocazione x tale che $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ (per gioco superadditivo ha a che fare con l'efficienza).

- ▶ **Imputazione**

oltre a pre-imputazione, anche **razionalità individuale**:
 $x_i \geq v(\{i\})$.

Si può arrivare all'idea di **nucleo** aggiungendo condizioni di "razionalità intermedia": $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ per ogni S .

I 4 classici assiomi in $\mathcal{SG}(N)$.

Dato N , $\mathcal{SG}(N)$ è la classe di tutti i giochi *superadditivi* aventi N come insieme dei giocatori.

Vogliamo $\Phi : \mathcal{SG}(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$.

- ▶ **Efficienza:** per ogni gioco v , $\Phi(v)$ è una pre-imputazione.
Ovvero: $\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = v(N)$
- ▶ **Simmetria:** $\Phi_i(v) = \Phi_j(v)$ se, scambiando i con j , il gioco v non cambia
- ▶ **Null player:** $\Phi_i(v) = 0$ se il contributo di i è nullo.
Ovvero, se:
 $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ per ogni S
- ▶ **Additività:** $\Phi(v + w) = \Phi(v) + \Phi(w)$

Commenti agli assiomi.

Efficienza e simmetria (o **anonimità**) sono condizioni “ovvie”.

L'assioma del “null player” (caso particolare del “**dummy player**”) dice che il valore Shapley distribuisce il “bottino” tenendo conto dei contributi dei singoli.

Additività: accettabile? Perplexità di Luce e Raiffa (1957)

Matematicamente, funge:

- ▶ Unanimity games sono una base per $\mathcal{G}(N)$.
- ▶ Per unanimity games i primi 3 assiomi determinano il valore Shapley.
- ▶ Con l'additività estendiamo a tutto $\mathcal{G}(N)$.
- ▶ Si passa poi facilmente a $\mathcal{SG}(N)$, se si vuole.

Avvertenze.

- ▶ L'allocazione risultante non è detto sia stabile (fuori dal nucleo: **guanti**; nucleo vuoto: gioco di **maggioranza semplice**).
- ▶ Efficienza senza superadditività è richiesta che può essere stupida. Sapere se uno è obbligato a stare nella grande coalizione.
- ▶ Gli assiomi possono non essere categorici su sottoinsiemi di $\mathcal{SG}(N)$.

Esempio: additività su giochi semplici, cioè $v(S) \in \{0, 1\}$.

Rimpiazzare con **trasferimento**:

$$\Phi_i(v \vee w) + \Phi_i(v \wedge w) = \Phi_i(v) + \Phi_i(w), \forall i \in N.$$

Altri sistemi assiomatici

- ▶ Alvin Roth prende sul serio l'idea di **valore atteso**.
- ▶ Peyton Young evidenzia le **radici marginaliste** del valore Shapley.
- ▶ Sergiu Hart e Andreu Mas Colell introducono l'idea di **coerenza** e di **potenziale**.
- ▶ Anche Moretti *et al.* giustificano assiomaticamente il valore Shapley per i **microarray games**.

Gioco dell'aeroporto.

Ognuno paga per le componenti (stampanti, fax, fotocopiatrici, etc.) che usa.

La spesa di ogni componente è divisa in parti uguali fra gli utilizzatori.

Caso famoso: gioco dell'aeroporto.

Aerei di tipo diverso richiedono pista di atterraggio di lunghezza diversa.

Ogni banda di lunghezza è pagata in parti uguali (tot per ogni atterraggio) solo dagli aerei che la usano.

Generalizzazione: infrastructure cost games.

Idea: nel gioco dell'aeroporto i costi non dipendono dal numero degli utenti.

Se invece dipendono, ipotesi semplice: una parte di costo è proporzionale al numero di utenti.

Classe di giochi introdotta in EuROPE-TRIP.

Per allocare ai “transport operators” i costi per l'uso della infrastruttura ferroviaria.

Ancora disponibile semplice formula per il valore Shapley

Indici di potere.

- ▶ **Gioco semplice:**
 $v(S) \in \{0, 1\}$
- ▶ **condizioni:**
 $v(N) = 1$ e $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$
- ▶ indice di potere di **Shapley-Shubik**
semplicemente il valore Shapley per giochi semplici.
- ▶ **attenzione!** ricordare: assiomi non categorici
usare assioma **trasferimento** invece di additività
- ▶ alternativa: indice di **Banzhaf**
il caso della contea di Nassau (Long Island)

Reliability theory.

- ▶ **Semi-coherent structure:**

$f : B^n \rightarrow B$, con $B = \{0, 1\}$
monotona, $f(\mathbf{0}) = 0$, $f(\mathbf{1}) = 1$

- ▶ **dizionario:**

componenti = giocatori

componenti irrilevanti = dummy player

path set = coalizione vincente

cut set = coalizione di blocco

etc.

Esperimento di microarray: risultati e discretizzazione.

Microarray expression data from **disease** samples

	s1	s2	s3
g1	4.2	20	12
g2	1.1	9.8	1.6
g3	7	2.4	6.1



Discretized matrix

	s1	s2	s3
g1	0	1	1
g2	1	1	1
g3	1	0	1

Microarray expression data from **normal** samples

	s1	s2	s3
g1	4.1	6.3	2.7
g2	4.2	7.8	2.1
g3	5	3.5	0.5



cutoffs

<	>
2.7	6.3
2.1	7.8
0.5	5



Microarray games.

Microarray TU game:

- Players are genes;
- games with $[0-1]$ characteristic function;
- on each sample:
 - If a coalition has value **1** then that coalitions activates the disease;
 - If a coalition has value **0** then that coalition does not activate the disease.

EXAMPLE:

Microarray discr. data

	s1	s2	s3
g1	0	1	1
g2	1	1	1
g3	1	0	1

The corresponding $[0, 1]$ -game

$\langle \{g1, g2, g3\}, v \rangle$:

$v(\{g1, g2\}) = v(\{g3, g2\}) = 1/3$

$v(\{g1, g2, g3\}) = 1$ and

$v(S) = 0$ for each other different coalition S .

The Shapley value is: $(5/18, 8/18, 5/18)$.

Valore Shapley per microarray games.

- ▶ Applicazione del valore Shapley per trovare chi siano i geni più rilevanti.
- ▶ Perché il valore Shapley?
- ▶ Una nuova caratterizzazione assiomatica, che tiene conto delle specifiche caratteristiche della situazione.
- ▶ Rilevanza di un approccio via TdG: dare la giusta enfasi all'interazione fra geni.

Dati sperimentali.

Selezione di dati da microarray ottenuti da Alon *et al.* (1999) su cellule del colon.

Analizzati **2000 geni**, e 62 campioni di cellule (40 tumorali e 22 normali)

Risultati su dati sperimentali.

I cinque geni con il valore Shapley più alto:

Nome del gene	valore Shapley ($\times 10^{-3}$)
H.sapiens mRNA for GCAP-II/ /uroguanylin precursor	3.83
Nucleolin	3.56
Gelsolin precursor, Plasma	3.34
DNA-(Apurinic or apyrimidinic site) Lyase	3.23
Human vasoactive intestinal peptide (VIP)	3.21

Geni scritti in blu: è noto che sono coinvolti in processi tumorali.

Conclusioni

- ▶ Il valore Shapley è **pervasivo**. (Land-Gefeller, kick-out . . .)
- ▶ Spesso è **facile da calcolare**.
- ▶ Ha applicazioni **impreviste**, ma non assurde, dati i semplici e universali presupposti da cui parte.

- ▶ Modesti suggerimenti
 - ▶ Integrare varie discipline.
 - ▶ Guardare con occhi diversi.

Lecture consigliate I

-  A.E. Roth (editor):
The Shapley value.
CUP, 1988.
-  R.D. Luce, H. Raiffa:
Games and Decisions.
Wiley, 1957.

Bibliografia I



L.S. Shapley:

A Value for n -Person Games.

in *Contributions to the Theory of Games*,

curatori: H.W. Kuhn e A.W. Tucker

Annals of Math. Studies, **28**

Princeton University Press, Princeton (NJ),

307–317, 1953.

Bibliografia II



L.S. Shapley, M. Shubik:

A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System.

American Political Science Review, 48:787–792, 1954.



J.F. Banzhaf:

Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis.

Rutgers Law Review, 19:317–343, 1965.

Bibliografia III



A.E. Roth:

The Shapley value as a von Neumann-Morgenstern utility.
Econometrica, 45:657–664, 1977.



H.P. Young:

Monotonic Solutions of Cooperative Games
International Journal of Game Theory, 14:65–72, 1985.



S. Hart, A. Mas-Colell:

Potential, Value, and Consistency
Econometrica, 57:589–614, 1989.

Bibliografia IV



K.G. Ramamurthy.

Coherent Structures and Simple Games.

Kluwer, Dordrecht, 1990.



R.E. Barlow, F. Proschan:

Importance of System Components and Fault Tree Events.

Stochastic Processes and Their Applications, 3:153–172,
1975.

Bibliografia V



V. Fragnelli, I. García-Jurado, H. Norde, F. Patrone, S. Tijs:
How to Share Railways Infrastructure Costs?
in *Game Practice: Contributions from Applied Game Theory*,
curatori: F. Patrone, I. García-Jurado, S. Tijs
Kluwer, Dordrecht, 1999.

Bibliografia VI



U. Alon, N. Barkai, D.A. Notterman, K. Gish, S. Ybarra,
D. Mack, A.J. Levine:

*Broad patterns of gene expression revealed by clustering
analysis of tumor and normal colon tissue probed by
oligonucleotide arrays*

Proc. Natl. Acad. Sci. USA 96, 6745–6750, 1999.



S. Moretti, F. Patrone, S. Bonassi:

The class of Microarray games and the relevance index for
genes.

preprint DIMA, 2004.