Il decimo appuntamento con

LA TEORIA DEI GIOCHI

Giochi con potenziale

di **Fioravante Patrone**

FIORAVANTE PATRONE, curatore di questa rubrica sulla Teoria dei giochi, è docente presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Genova ed è stato direttore del "Centro Interuniversitario per la Teoria dei Giochi e le sue Applicazioni".

Alzi la mano chi non ha mai sentito parlare del *dilemma del prigioniero*! Aspettate un momento, però, prima di sbuffare e passare ad altro. Prometto che lo vedremo in un'ottica diversa dal solito.
Un po' di pazienza è comunque necessaria perché non posso non dire, pur se molto sinteticamente, cosa è questo *dilemma*. È un gioco a due giocatori, che in forma strategica è rappresentabile con la seguente tabella:

$I \setminus II$	L	R
T	$c \quad c$	$a \quad d$
B	$d \quad a$	$b \quad b$

I due giocatori (I e II) devono scegliere, contemporaneamente e indipendentemente, fra le due alternative che hanno a disposizione: T, B per I ed L, R per II. Nelle caselle della tabella, sono riportati (a sinistra per I, a destra per II) i *payoff* che i giocatori ottengono in corrispondenza delle loro scelte. Ad esempio, se I sceglie T e II sceglie R, il loro *payoff* è a per I e d per II. Ognuno di loro cerca di massimizzare il proprio *payoff*.

Naturalmente, a, b, c, d sono numeri reali. Fino a questo punto, rispetto a un generico gioco a due giocatori, ciascuno dei quali ha due strategie, abbiamo in più solo il fatto che si tratta di un gioco simmetrico [1]. Otteniamo il *dilemma del prigioniero* se:

$$a < b < c < d.$$

L'effetto di questa ipotesi sui *payoff* è che i giocatori si ritrovano una strategia "ovvia" da giocare: B per I ed R per II. Ciò è dovuto al fatto che $a < b$ e $c < d$ e quindi le strategie indicate sono "dominanti", per usare il linguaggio della Teoria delle decisioni. L'altra condizione sui *payoff* ha come effetto che l'esito derivante da (T,L) sia preferito da entrambi i giocatori all'esito che ottengono: detto in altri termini, il risultato della interazione strategica non è efficiente. Da qui l'interesse riservato al dilemma del prigioniero visto che uno si potrebbe aspettare un esito efficiente, per via delle sottostanti assunzioni di razionalità dei giocatori.
Ma, come promesso, non parleremo di questo. Facciamo invece una decomposizione della tabella come *somma di due tabelle*:

I \ *II*	*L*	*R*
T	0 0	*d-c* *d-c*
B	*d-c* *d-c*	*(d-c)+(b-a)* *(d-c)+(b-a)*

I \ *II*	*L*	*R*
T	*c* *c*	*a-(d-c)* *c*
B	*c* *a-(d-c)*	*a-(d-c)* *a-(d-c)*

Che cosa si nota di interessante? Probabilmente la prima cosa che balza all'occhio è che i *payoff* nel primo gioco sono identici per i due giocatori. Nella seconda tabella, c'è una peculiarità forse ancora più curiosa: i *payoff* che un giocatore ottiene non dipendono dalla sua scelta, ma dipendono dalla scelta che fa l'altro! Si tratta di un gioco che, a seconda di ciò che vogliamo mettere in evidenza, possiamo chiamare:

- *dummy game*, nel senso che per un giocatore non c'è nessuna ragione per scegliere una strategia piuttosto che un'altra;
- gioco di pura *esternalità*: la scelta fatta da un giocatore ha effetto *solo* sull'altro giocatore.

Rispetto alla tematica usuale del dilemma del prigioniero, questo tipo di decomposizione permette di vedere molto chiaramente l'effetto delle *esternalità* nel determinare ciò che avviene nel dilemma del prigioniero [2]. A tal fine, possiamo considerare il seguente caso particolare [3]: $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$.

I \ *II*	*L*	*R*
T	0 0	1 1
B	1 1	2 2

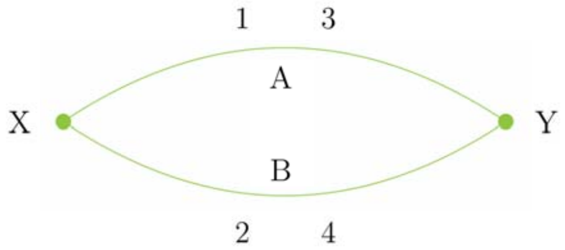
I \ *II*	*L*	*R*
T	3 3	0 3
B	3 0	0 0

Si vede allora come la scelta di *B* faccia sì che, nella prima tabella, il *payoff* di *I* aumenti di *1*, indipendentemente dalla scelta di *II*. Questa stessa scelta ha l'effetto, contemporaneamente, di diminuire di *3* il *payoff* di *II* nella seconda tabella. Si noti che, nella prima tabella, i *payoff* sono identici per i due giocatori e quindi la scelta di *B* ha anche un effetto di esternalità positiva per *I*: fa aumentare di *1* anche il suo *payoff*. Peccato che, alla fine di questi conti, il bilancio sia negativo per entrambi i giocatori.
Abbandoniamo ora il dilemma del prigioniero, osservando come la decomposizione fatta non dipenda dalle disuguaglianze che abbiamo posto per avere il gioco arcifamoso. Vale per ogni gioco descritto dalla tabella da cui siamo partiti (serve solo la simmetria). Volendo estendere questa idea oltre questi casi particolarmente semplici (anche se interessanti), siamo condotti all'idea di *gioco con potenziale*.
Limitandoci al caso di due giocatori, ricordo che un gioco in forma strategica è $G = (X, Y, f, g)$ dove X ed Y sono due insiemi – gli spazi delle strategie a disposizione rispettivamente del giocatore *I* e *II*) – mentre f e g sono funzioni a valori reali, definite su $X \times Y$. Diremo che il gioco *ammette potenziale* se esiste una funzione $\mathrm{P} : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathbb{R}$ tale che si abbia (per ogni valore delle variabili coinvolte):

$$P(x', y) - P(x'', y) = f(x', y) - f(x'', y)$$
$$P(x, y') - P(x, y'') = g(x, y') - g(x, y'').$$

La funzione P viene detta *potenziale*. L'analogia con la Fisica non si limita al fatto che ci permette di sostituire due funzioni (un campo vettoriale) con una (un campo scalare): si verifica facilmente come, nel caso in cui X ed Y siano finiti, i giochi con potenziale siano caratterizzati dal fatto che una versione discreta [4] della "circuitazione" sia sempre nulla. Non solo: ci sono delle caratterizzazioni, se X ed Y sono intervalli di $\mathbb{R}$, che usano le ben note "derivate in croce". E, guarda caso, un potenziale è determinato solo a meno di una costante.
Una proprietà interessante dei giochi con potenziale è che, se gli spazi di strategie X ed Y sono finiti, essi hanno equilibri di Nash *in strategie pure*. Basta notare che un punto di massimo per P, che esiste certamente sull'insieme finito $X \times Y$, è anche un equilibrio di Nash per il gioco G, il che si verifica semplicemente usando la definizione di potenziale. Da qui, anche, un modo semplice per *escludere* che un gioco (con spazi di strategie finiti) abbia potenziale: basta verificare che il gioco non abbia equilibri in strategie pure. Per esempio, il gioco del *pari o dispari* e la *morra cinese* (ovvero: sasso – carta – forbice) sono tra questi.
Dovrebbe essere evidente che la proprietà di avere potenziale è una proprietà "eccezionale", nel senso che, riempiendo a caso [5] una tabella, la probabilità che si ottenga

un gioco con potenziale è zero. Nonostante ciò, capita di frequente di imbattersi in giochi con potenziale.
Sembra, per esempio, che appaiano con sorprendente frequenza nel contesto delle telecomunicazioni. Anche a me è capitato di inciampare recentemente in giochi con potenziale, in un lavoro [6] dedicato alla modalità di instradamento di flussi di pacchetti IP fra *peer autonomous systems* (AS: possono essere vagamente assimilati agli *internet provider*). La scelta, da parte di un AS *I*, del nodo di frontiera (fra i tanti possibili) con un "peer" AS *II*, per l'instradamento di un flusso di pacchetti che deve "attraversare" lo AS *II*, dà origine a un costo per *I* e ad un costo per *II* (e viceversa). Ciò fornisce immediatamente, ed in modo apparentemente naturale, una decomposizione che ci permette di dire di essere di fronte ad un gioco con potenziale. L'interesse, analogo al caso del dilemma del prigioniero, sarà quello di evitare di avere esiti inefficienti a causa del perseguimento di *policies* troppo *greedy*. Finalità che si può perseguire utilizzando opportunamente un attributo del cosiddetto *Border Gateway Protocol* (BGP) che è specificato, ma spesso disabilitato fra "peer" AS: il MED, *Multiple Exit Discriminator*. È stato particolarmente piacevole verificare che, per tale gioco (di costo), tutti gli equilibri di Nash corrispondono a minimi della funzione potenziale (che è genericamente valido solo nel senso inverso per i giochi a potenziale), semplificazione che faciliterebbe l'implementazione del processo di decisione sui *router* BGP/IP.
Un altro esempio di gioco che ammette potenziale è fornito dal classico modello di oligopolio di Cournot, per lo meno in presenza di costi lineari. Che il gioco ad esso associato abbia potenziale è stato osservato da Slade (1994): i dettagli possono essere trovati in rete [7].
Giochi con potenziale emergono da problemi di *congestione*. Poiché le notazioni tendono a diventare orripilanti, mi limito ad un semplice esempio [8]. Sia *I* che *II* devono andare da *X* ad *Y*, avendo a disposizione entrambi due strade: *A* e *B*. Immaginiamo che il *payoff* per *I* e *II* sia dato da un *tot* (*5*, diciamo) meno il tempo usato per il viaggio, che dipende da quanto è congestionata la strada. I costi di congestione sono indicati in figura (il numero a sinistra vale se solo uno percorre la strada mentre, se entrambi la usano, il tempo necessario è dato dal numero a destra).



La tabella che otteniamo è la seguente:

I \ *II*	*A*	*B*
A	2 2	4 3
B	3 4	1 1

Il gioco ottenuto assomiglia (non a caso) alla *battaglia dei sessi*: ci sono due equilibri di Nash, con *I* che preferisce *(A,B)* e *II* che preferisce *(B,A)*. Siamo infatti di fronte ad un problema di coordinamento, visto che sarebbe meglio usare strade diverse; allo stesso tempo vi è un conflitto poiché le due strade non sono equivalenti. Lascio al lettore, se lo desidera, vedere quale decomposizione si ottenga.

NOTE

[1] La condizione di simmetria non riveste un ruolo essenziale. Serve solo a depurare l'esempio da "distrattori".

[2] Qui ci sarebbero da scrivere trattati, a cominciare dalle difficoltà che incontra il mito della *mano invisibile*, quando si va al di là dei soliti macellai, birrai e fornai.

[3] Ma neanche troppo particolare: nel contesto in cui ci troviamo, è ragionevole assumere un valore puramente "ordinale" dei *payoff*. Quindi, visto che sono soddisfatte le disuguaglianze richieste, stiamo in realtà considerando un "esempio generale".

[4] Mi sto riferendo al fatto che per un campo vettoriale che ammette potenziale, ovvero conservativo, gli integrali di linea lungo una linea chiusa sono nulli. Analogamente, le "derivate in croce" sotto citate si riferiscono al fatto che condizione necessaria perché un campo vettoriale sia conservativo è che sia irrotazionale: in due variabili, ciò significa richiedere che $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$.

[5] Ad esempio, facendo una estrazione a sorte con probabilità uniforme su [0,1].

[6] In collaborazione con "esperti del ramo": G. Maier, A. Pattavina, J.L. Rougier e S. Secci.

[7] All'URL: http://www.cs.tau.ac.il/~mansour/sem-game-02-03/monderer-potential-96.pdf è disponibile il lavoro di Monderer e Shapley (1996).

[8] Come si noterà, ricadiamo nel caso di un gioco due per due, simmetrico. Ciò è dovuto alla scelta di fare, come detto, un esempio particolarmente semplice. C'è un risultato di carattere generale in base al quale i giochi con potenziale coincidono con la classe dei giochi individuata da problemi di congestione. Anzi, è stato il contributo di Rosenthal (1973) sui problemi di congestione ad attirare l'attenzione su questa tipologia di giochi, prima che Monderer e Shapley introducessero esplicitamente (nel 1996) i giochi con potenziale.