LA RUBRICA DI TEORIA DEI GIOCHI

Un utile esercizio sugli spazi vettoriali

di **Fioravante Patrone**

LA VOLTA SCORSA CI SIAMO IMBATTUTI, per la prima occasione in questa rubrica, nei *giochi cooperativi* ed abbiamo discusso di uno dei due concetti di "soluzione" più importanti: il *nucleo*. Stavolta tocca all'altra "soluzione": il *valore Shapley*.

Come detto (cfr. n. 61 della "*Lettera*", cui rinviamo anche per le motivazioni), un gioco cooperativo – tecnicamente, mi occupo della classe dei giochi *a pagamenti laterali* – non è altro che una funzione $v:\mathcal{P}(N)\to R$, dove N è l'insieme dei giocatori e $\mathcal{P}(N)$ è l'insieme delle parti di N, ovvero l'insieme di tutti i sottoinsiemi di N che chiameremo *coalizioni*.
Ricordo anche che si impone, per convenzione, $v(\emptyset)=0$. Come la scorsa volta, per alleggerire la notazione, supponiamo che sia $N=\{1,\dots, n\}$ e continuiamo a concentrare la nostra attenzione sulle *allocazioni*, ovvero gli elementi di R^n.

È possibile riuscire ad associare, sensatamente, ad ogni gioco *una ed una sola* allocazione che possa meritare in qualche modo l'appellativo di essere una "soluzione" del gioco?

È evidente che $\mathcal{G}(N)$, l'insieme di tutti i giochi cooperativi che hanno N come insieme dei giocatori, è uno *spazio vettoriale*.
Non solo: visto che sia $\mathcal{G}(N)$ che R^n sono spazi vettoriali, non potrebbe avere senso pretendere che la funzione $\Phi:\mathcal{G}(N)\to R^n$, che abbiamo implicitamente evocato poco sopra, sia *lineare*? Di certo, nessuno ce lo vieta ma saremo comunque prima o poi chiamati a *giustificare* questa assunzione di linearità (all'interno della interpretazione cui siamo interessati degli oggetti matematici che stiamo manipolando). Procediamo comunque confidando che saremo prima o poi in grado di convincere un buon numero di persone della sensatezza di questa condizione di linearità.

Ma allora, se Φ deve essere lineare, basta definirla su una *base* … Sì, ma che *base*? Qui viene una parte interessante dell'esercizio.
Prima considerazione: siamo su uno spazio vettoriale di dimensione 2^n-1 (i sottoinsiemi di N sono 2^n ed abbiamo la condizione che $v(\emptyset)=0$). Allora possiamo identificare il nostro spazio con R^{2^n-1} ed usare la base canonica di questo spazio per trovare una base di $\mathcal{G}(N)$. Ma sarebbe più carino riuscire a fare due cose: avere una base definita intrinsecamente (cioè senza fare il passaggio appena detto) ed avere una base con un suo *significato* come gioco cooperativo. Beh, una base che soddisfi questi requisiti non è difficile trovarla: sono gli *unanimity games*.

Consideriamo una coalizione T, ovvero un sottoinsieme di N. Il gioco di unanimità associato a T, indicato come u_T, è definito così (per $T\neq\emptyset$):

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } S \supseteq T \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La ragione del nome dovrebbe essere evidente: il gioco descrive una regola di votazione e il requisito, affinché una mo-

L' autore

Fioravante Patrone, curatore di questa rubrica sulla Teoria dei giochi, è docente presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Genova ed è stato direttore del Centro Interuniversitario per la Teoria dei Giochi e le sue Applicazioni.

zione passi, è che essa ottenga il consenso *unanime* di tutti i membri del gruppo T.
Se consideriamo la classe di tutti i sottoinsiemi non vuoti di N, essa ci offre esattamente 2^n-1 elementi e quindi è candidabile ad essere una base per $G(N)$. Per lo meno, soddisfa il requisito indispensabile relativo alla cardinalità. Non è difficile fare una verifica diretta del fatto che abbiamo una famiglia di vettori linearmente indipendenti. Oppure possiamo provare che generano tutto $G(N)$. Questo esercizio ha un certo interesse, in quanto ci permette di trovare quali sono i coefficienti che esprimono un generico gioco in termini di questa base.
Mi limiterò a fare un esempio e ad esprimere il *gioco dei guanti*, nel caso di soli tre giocatori, come combinazione lineare di giochi di unanimità.
Stiamo assumendo, per la precisione, che i proprietari del guanto destro siano 1 e 2 mentre 3 ha il guanto sinistro. Pertanto, il nostro gioco v è dato da: $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{1,2\}) = 0$, $v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 1$. Abbiamo la seguente formula (di agevole verifica):

$$\begin{aligned} v &= 0 \cdot u_{\{1\}} + 0 \cdot u_{\{2\}} + 0 \cdot u_{\{3\}} + 0 \cdot u_{\{1,2\}} \\ &+ 1 \cdot u_{\{1,3\}} + 1 \cdot u_{\{2,3\}} + (-1) \cdot u_{\{1,2,3\}}. \end{aligned} \tag{1}$$

La formula, nel caso generale, è $v = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T u_T$, con

$\lambda_T = \sum_{S \subseteq T} (-1)^{t-s} v(S)$, dove t ed s stanno ad indicare la cardinalità di T ed S, rispettivamente.

Bene, abbiamo una base (ed anche una famiglia di giochi cooperativi *significativa*). Come facciamo a definire Φ in modo accettabile sugli *unanimity games*?

Prima considerazione: la *simmetria*. Non si vede come possiamo pensare di *discriminare* tra di loro gli elementi di T. Quindi Φ dovrebbe assegnare lo stesso valore a tutti gli elementi di T.
Apro una piccola parentesi. La condizione di simmetria corrisponde a un principio elementare di giustizia: tutti sono uguali, tutti hanno gli stessi *entitlements*, a meno che non vi siano ragioni per giustificare una deviazione da questo principio (ragioni di efficienza, di merito, di solidarietà umana, ecc.). Ora, con le super-scarne informazioni che abbiamo, una qualsiasi discriminazione fra i giocatori che stanno dentro T sarebbe puramente arbitraria.
Domanda: centra quanto è stato detto in questa parentesi? Sembra far riferimento ad una interpretazione di tipo *normativo*, al punto di vista di un "arbitro". E dal punto di vista *predittivo*? Ci permette di predire cosa otterranno decisori "razionali"? Sì, la condizione data "regge" tranquillamente entrambe le interpretazioni.

Quindi Φ dovrebbe assegnare lo stesso valore ad ogni elemento di T. Indichiamo con α questo valore. Ma anche gli elementi di $N \backslash T$ sono tutti uguali fra loro! Allora, Φ assegnerà lo stesso valore ad ognuno dei giocatori di $N \backslash T$: indichiamo con β tale valore.

Riusciamo a sostituire a α e β dei numeri "in carne ed ossa"? Beh, per toglierne di mezzo almeno uno, c'è una strada ben nota: *normalizziamo* (o, "fissiamo la scala", *et similia*). Ad esempio, potremmo richiedere che la somma dei vari Φ_i, al variare di $i \in N$, valga 1 (non dimentichiamoci che

Spazi vettoriali

Uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ è un insieme V dotato di due operazioni: una *somma* tra due suoi elementi (non necessariamente la consueta addizione) e una *moltiplicazione* di un elemento di V per uno scalare, (cioè un elemento di $\mathbb{R}$). Inoltre, queste operazioni soddisfano le consuete *proprietà* formali.
A prescindere da qualunque interpretazione, gli elementi di uno spazio vettoriale si dicono *vettori*.
Forse, il più immediato esempio di spazio vettoriale è dato da $\mathbb{R}^2$ (rispetto alla consueta somma tra coppie di numeri reali e al loro prodotto per un numero reale) o, in generale, da $\mathbb{R}^n$.
Dati alcuni vettori $x^1, x^2, \ldots, x^s \in V$, questi si dicono *linearmente indipendenti* quando (con le operazioni permesse in V) nessuno di loro è combinazione lineare dei rimanenti.

Una *base* di uno spazio vettoriale V è un insieme di vettori di V linearmente indipendenti e tale che ogni altro vettore di V può essere espresso come loro combinazione lineare. Ad esempio, in $\mathbb{R}^2$ una base è quella costituita dai due vettori $e^1=(1,0)$ ed $e^2=(0,1)$: infatti e^1 ed e^2 sono linearmente indipendenti e ogni vettore $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ può essere espresso come loro combinazione lineare $((x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = xe^1 + ye^2)$. Questa base è detta *base canonica* per $\mathbb{R}^2$.

Una funzione f tra due spazi vettoriali, $f{:}V \to V^1$, è detta *lineare* quando è *additiva* e *omogenea*, ossia verifica le seguenti relazioni:

$$(\forall x,y \in V \text{ e } k \in \mathbb{R});$$
$$f(x+y) = f(x) + f(y);$$
$$f(kx) = kf(x).$$

I N T E R V E N T I

21

I coni

Un *cono* è un sottoinsieme C di uno spazio vettoriale V tale che, se $x \in C$ allora anche $kx \in C$, $\forall k \in \mathbb{R}^+$.
In $\mathbb{R}^2$, dove possiamo "vedere" la precedente definizione, un cono è un sottoinsieme del piano che contiene tutte le semirette (uscenti dall'origine) passanti per i suoi punti.
In $\mathbb{R}$ il primo quadrante è un esempio di cono. Un altro esempio è fornito dai punti del primo quadrante compresi tra un asse e la bisettrice $y = x$. Un altro esempio di cono (non convesso) è costituito dai punti dei due assi cartesiani.
Si dimostra che condizione necessaria e sufficiente perché un cono C sia *convesso* è che $x,y \in C$ implichi $x+y \in C$.

stiamo parlando degli *unanimity games*, per cui è del tutto naturale usare il valore 1). Tutto ciò ha perfettamente senso se siamo disponibili ad assumere che la Φ abbia una opportuna proprietà di *omogeneità*. Cioè, se moltiplico i $\nu(S)$ per una costante λ, è ragionevole richiedere che i valori di Φ_i siano loro stessi moltiplicati per λ? Sembra una proposta ragionevole e quindi non mi perderò in troppe considerazioni "sofistiche" (però chi legge dovrebbe provare a trovare qualche ragione *contra*).

Riusciamo a trovare un'altra "àncora", in modo da fissare definitivamente il valore della Φ? Un'idea ci sarebbe: in un gioco di unanimità u_T, diamo 0 a quelli che stanno fuori da T. Dopotutto sono inutili, non valgono nulla!

Interessante, finalmente si rompe la simmetria. Però ci vogliono buone ragioni per farlo. L'idea di fondo è che si vuole collegare, in qualche modo, il valore che $\Phi(\nu)$ assegna ad i al "contributo" che arreca all'accrescimento del valore della ν. Si noti, però, che nulla giustifica l'accezione *positiva* con la quale abbiamo usato il termine *valore*. Potremmo interpretare i $\nu(S)$ in termini di *dis-valore*, anziché di valore (o, volando basso, in termini di costi anziché di guadagni).
Allora, ai giocatori che sono irrilevanti, nel senso che non fanno minimamente cambiare il valore di v, sia che stiano dentro una coalizione sia che ne escano (o che evitino di entrarci), assegniamo un valore nullo.

Non ci compromettiamo, pertanto, nel dare loro qualcosa (di positivo ma, ribadendo quanto detto poche righe sopra, neanche di negativo). Legittima come assunzione? Non è detto, ad esempio esistono i "diritti di cittadinanza". Visto che non può essere addebitato ad uno il fatto di essere venuto al mondo, non sembra una cosa strana che comunque usufruisca di una fettina del PIL, anche se magari non è minimamente in grado di contribuirvi. Vorrà dire che, nelle applicazioni di questa teoria, in particolare laddove volessimo usare la Φ, dobbiamo stare attenti a che non siano coinvolte (ad esempio) questioni come quella che ho appena menzionato.

Allora, per tornare al nostro problemino tecnico, è fatta! È evidente che in u_T il contributo dei giocatori che non stanno in T è nullo. Pertanto possiamo dire che $\beta = 0$. Ma quindi anche α è determinato, dalla condizione di normalizzazione: $\alpha = 1/t$ dove t è il numero di elementi di T.
Bene, la linearità ci dà Φ su tutto $\mathcal{G}(N)$. Ovviamente, per questo è stato importante (fin dal titolo) che $\mathcal{G}(N)$ sia uno *spazio vettoriale*.

Vorrei fare, a questo proposito, una breve digressione. Ribadisco che possiamo "leggere" i nostri giochi indifferentemente sia come *giochi di valore* che come *giochi di costo*. In altre parole, se $\nu(S)$ indica un *valore* (qualcosa cui assegniamo una connotazione *positiva*), allora saremo contenti quanto più è grande $\nu(S)$ e, di conseguenza, al giocatore i farà piacere avere un $\Phi(i)$ quanto più elevato possibile.

Nella accezione tradizionale, $\nu(S)$ rappresenta un guadagno o ha comunque una accezione positiva (si veda quanto detto per gli *unanimity games*).
In questa ottica, sono interessanti i giochi *superadditivi*, ovvero quelli per cui: $\nu(S) + \nu(T) \geq \nu(S \cup T)$ per ogni S, T tali che $S \cap T = \emptyset$.
Anzi, anni fa, si usava richiedere sempre questa condizione quando si parlava di un gioco *cooperativo* (con ν interpretata in termine di valore: per un gioco *di costo*, la proprietà interessante era la *subadditività*).
Occorre fare attenzione: come già qualcuno avrà notato, la condizione di superadditività è una condizione *unilaterale*. Infatti, $S\mathcal{G}(N)$, la classe dei giochi superadditivi su N, non è uno spazio vettoriale! È, comunque, un *cono convesso* e quindi la condizione di additività continua ad essere significativa. In effetti, nelle presentazioni classiche, gli assiomi visti si introducono su $S\mathcal{G}(N)$. Ci sono dei "dettagli tecnici" da sistemare, rispetto a $\mathcal{G}(N)$ – ne farò un cenno dopo – ma la strada è in discesa.

Curiosamente, il valore Shapley risulta essere il *contributo marginale medio* dei giocatori. Qui *marginale* fa riferimento ad una idea di *derivata*, anche se si tratta naturalmente di una derivata *discreta*.
Non so, filologicamente, da dove derivi questo uso del termine che fa da "sostituto", in Economia, al termine *derivata* (e ai suoi familiari). A me è sempre piaciuto pensare che

sia dovuto all'influsso delle idee di Ricardo sulla natura della rendita ed il ruolo che in essa hanno le terre *marginali*.

E il termine *medio* a cosa fa riferimento? Ad una media aritmetica, fatta su tutte le possibili *permutazioni* dei giocatori, che sono naturalmente $n!$. Da qui, la formuletta:

$$\Phi_i(\nu) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma} m_i^{\sigma}(\nu)$$

dove l'addendo $m_i^{\sigma}(\nu)$ indica il contributo marginale del giocatore i nel gioco ν, data la permutazione σ, cioè $\nu(S(\sigma,i)) - \nu(S(\sigma,i)\setminus\{i\})$. Se immaginiamo che le coalizioni si formino per aggiunta, uno ad uno, dei giocatori, seguendo l'ordine indicato da σ, $S(\sigma,i)$ indica la prima coalizione che contiene σ.

Interessante, senza dubbio. Anche un po' sorprendente. Dopotutto, cosa abbiamo preteso, a proposito di contributi marginali? Ben poco: solo che chi dà un contributo marginale *nullo* riceva un bello zero. Cos'è? Un miracolo della linearità? A dire il vero, la formula trovata perde un poco della sua aura di mistero se si tiene conto del fatto che:

$$\nu = \sum_{\varnothing \neq T \subseteq N} \lambda_T u_T \qquad (2)$$

dove naturalmente gli u_T sono gli *unanimity games*. Ora, in un *unanimity game*, non solo diamo *0* a quelli che non contano nulla, ma effettuiamo una "equa" spartizione del contributo totale fra tutti coloro che stanno in T. In altre parole, teniamo conto del *contributo marginale medio* dei giocatori. L'abbiamo fatto senza dirlo! Era nascosto dietro alle condizioni di simmetria ed efficienza. A questo punto dovrebbe non esserci più mistero.

Ne viene fuori anche un insegnamento interessante: abbiamo introdotto delle proprietà "senza volere". Non era così evidente che le condizioni di simmetria e di "normalizzazione" nascondessero questo pilastro dell'impianto teorico dell'Economia neoclassica!

[…] se qualcosa può andar storto, andrà storto!

Ritorniamo un momento sui giochi *superadditivi*, per due osservazioni. La prima è che la condizione di normalizzazione può essere letta come condizione di efficienza. Termine che prefigura una interpretazione "positiva" dei $\nu(S)$ e che è del tutto improprio da usare se si lavora nella classe $\mathcal{G}(N)$. Basta pensare a un gioco per cui $N=\{1,2\}$ e $\nu(\{1\})=\nu(\{2\})=1$, $\nu(\{1,2\})=0$. Il *valore Shapley* assegna *0* a ciascun giocatore, per via del requisito di normalizzazione (e simmetria). Visto che ognuno dei due giocatori può ottenere *1* "standosene da solo", il risultato non sembra essere molto "efficiente". O si ritiene che, nel contesto in cui si vogliono applicare, ci sia un "obbligo" per i giocatori a "stare assieme" (ma allora la si deve chiamare in modo diverso), o altrimenti neanche si comprende perché ci dovrebbero interessare così tanto le pre-imputazioni, cioè le allocazioni tali che $\sum_{i\in N} x_i = \nu(N)$.

Il *valore Shapley* soddisfa questa condizione, per effetto della "normalizzazione" e della linearità.

La seconda osservazione è che, nella formula (2), per un gioco superadditivo ν può ben capitare che alcuni dei coefficienti λ_T siano negativi, nonostante che gli u_T siano essi stessi superadditivi. Questo è il dettaglio tecnico che avevo anticipato. Il nostro *gioco dei guanti* calza a pennello con quanto abbiamo detto: nella formula (1), abbiamo un coefficiente negativo.
$S\mathcal{G}(N)$ è un *cono poliedrale* (definito da un numero finito di disequazioni lineari) ed ha quindi un numero *finito* di generatori, diciamo ν_γ (con $\gamma \in \Gamma$). Ogni gioco in $S\mathcal{G}(N)$ può quindi essere espresso come $\nu = \sum_{\gamma\in\Gamma} \lambda_\gamma \nu_\gamma$ con i coefficienti λ_γ tutti non negativi.
Tuttavia, come ν_γ non possiamo prendere gli *unanimity games* (ce ne servono di più di 2^n-1). Noto ancora una cosa piacevole: in $S\mathcal{G}(N)$, il *valore Shapley* è una imputazione, ovvero soddisfa anche la condizione: $\Phi_i(\nu) \geq \nu(\{i\})$ per ogni $i \in N$.

Chiudo il discorso tornando sul *gioco dei guanti*. Grazie alla linearità, possiamo sfruttare la formula (1), oltre al fatto che il *valore Shapley* vale *1/2* per i giocatori membri di T quando T ha due elementi e invece *1/3* nel caso $T=\{1,2,3\}$. Otteniamo che il valore Shapley vale *1/6* per i giocatori 1 e 2 (i possessori di un guanto destro) e *4/6* per 3 (l'unico possessore di un guanto sinistro). Come si vede, i possessori di un guanto destro sono "svantaggiati", trovandosi dal "lato sbagliato" del mercato. Tuttavia, il loro svantaggio è meno drastico di quanto non preveda la nozione di *nucleo* (la volta scorsa, abbiamo visto che attribuiva loro un bello *0*).
Noticina finale: visto che il *nucleo* per il gioco dei guanti è un *singleton* e visto che il *valore Shapley* è diverso dall'unico elemento del *nucleo*, ne segue che neanche nella classe dei giochi *superadditivi* si riesce a garantire che il *valore Shapley* appartenga al *core*. Quindi, le due più importanti soluzioni per i giochi cooperativi danno indicazioni *divergenti*. Della serie: se qualcosa può andar storto, andrà storto! ■