LA RUBRICA DI TEORIA DEI GIOCHI

# Storie di guanti

di **Fioravante Patrone**

**L'autore,** e curatore di questa rubrica sulla Teoria dei giochi, è docente presso l'Università di Genova, dove è anche direttore del Centro Interuniversitario per la Teoria dei Giochi e le sue Applicazioni.

**È GIUNTA L'ORA DI OCCUPARCI** di *giochi cooperativi*. Finora questa rubrica è stata popolata di giochi non cooperativi, ma anche quelli cooperativi meritano spazio.
Cosa vuol dire *gioco cooperativo*? Esattamente come nei casi visti nei numeri precedenti, indica una situazione in cui sono presenti un certo numero di decisori in una situazione di interazione strategica. La differenza è che, prima, non ammettevamo la possibilità per i giocatori di sottoscrivere *accordi vincolanti*. Adesso sì. Non è una differenza da poco: il *dilemma del prigioniero*, i suoi problemi e le diatribe che suscita scompaiono quasi del tutto se si dà ai giocatori la possibilità di sottoscrivere un accordo vincolante.
Come si modellizza una situazione in cui c'è questa possibilità? Una strada sarebbe quella di dire: *non è successo niente*. Ovvero, semplicemente e puramente dire che questa possibilità rientra tra le alternative che i giocatori hanno a disposizione e che va trattata nello stesso modo in cui si tratta il caso *non* cooperativo. Si tratterebbe allora di descrivere il processo dinamico, la contrattazione e le discussioni che portano i giocatori a sottoscrivere un accordo vincolante. Come dovrebbe essere evidente, non è per nulla facile fare tutto ciò. La ragione fondamentale sta nella "non strutturazione" della interazione sopra descritta.
Altra strada possibile? Un approccio tipo "*black box*": non ci si interessa vedere cosa succede "dentro" ma semplicemente ci si domanda cosa ne possa venir fuori, dati (in *input*) i parametri rilevanti della situazione.
Da questo punto di vista, il modello formale che si usa è quello di un gioco cooperativo *in forma caratteristica*. Supponiamo che gli *output* possibili siano soldi (bisognerebbe richiedere che si parlasse di *funzioni di utilità*, ma accontentiamoci di assumere che le preferenze dei giocatori siano perfettamente descritte dai soldi che riescono a racimolare). Dato un insieme $N$ di giocatori, per ogni coalizione $S$ di giocatori, ovvero per ogni $S \subseteq N$, indicheremo con $v(S)$ il guadagno complessivo che questa coalizione è in grado di ottenere, basandosi solo sulle sue proprie forze e, naturalmente, stipulando eventualmente accordi vincolanti tra i suoi membri. Così facendo, otteniamo una funzione $v{:}P(N) \to \mathbb{R}$ (imporremo, per convenzione, che $v(\emptyset) = 0$). Ebbene, questa $v$ è tutto quanto useremo per descrivere e analizzare la situazione di interazione strategica fra i giocatori. Un gioco cooperativo, cosiddetto a *utilità trasferibile* (non analizzo qui il perché di questa terminologia), non è altro che una $v$ come sopra descritta.
Se qualcuno ritiene che si tratti di una semplificazione grossolana, è difficile dargli torto. Ma, a favore di questo approccio, sta il fatto che comunque si riescono a dire già molte cose interessanti (e ci si scontra con parecchi problemi).
Una sotto-classe importante di giochi cooperativi è data dai giochi *superadditivi*, ovvero quelli per cui si ha $v(S)+v(T) \geq v(S \cup T)$ per ogni $S$, $T$ con $S \cap T = \emptyset$. Se abbiamo un gioco superadditivo, sembra ragionevole aspettarsi che tutti i giocatori collaborino per ottenere il miglior risultato possibile, che è $v(N)$. Naturalmente, per i giocatori si pone anche il problema di spartirsi il "bottino". Bene, sarà proprio di questo che ci occuperemo.
Per cominciare, chiameremo *allocazione* una qualsiasi spartizione di $v(N)$. Quindi, se supponiamo per semplicità che sia $N=\{1, \ldots, n\}$, una imputazione non è altro che un elemento di $\mathbb{R}^n$. Quali condizioni, quali restrizioni è ragionevole porre su una allocazione affinché possa essere accettabile come soluzione? Una prima restrizione, che corrisponde a quanto detto prima, è che sia $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$. Il segno di uguaglianza può essere visto come il verificarsi contemporaneamente di una condizione di fattibilità ($\leq$) e di una condi-

zione di efficienza (≥). Le allocazioni che soddisfano questa condizione sono dette *pre-imputazioni*. A questa condizione ne possiamo aggiungere un'altra, detta di *razionalità individuale*: $x_i \geq v(i)$ per ogni giocatore $i$. Otteniamo così le *imputazioni*. Ora, le imputazioni sono tradizionalmente il grande serbatoio da cui provengono molte delle più note (e significative) "soluzioni" di un gioco cooperativo.

Tra queste, una delle più importanti è il *nucleo*, che si ottiene molto facilmente facendo un passo in più sulla strada appena intrapresa, quando abbiamo posto le condizioni di razionalità individuale. Tenendo conto che abbiamo anche richiesto la condizione di efficienza per una allocazione e che questa può essere vista come condizione di *razionalità collettiva*, perché non considerare anche condizioni di razionalità "intermedie"? Senza farla troppo lunga, l'idea è di selezionare quelle imputazioni che soddisfano anche, per ogni $S$, la condizione: $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$. C'è un "piccolo" problema, rispetto alla condizione di razionalità individuale, che non possiamo ignorare. È ovvio che, se una coalizione è in grado di ottenere $v(S) > \sum_{i \in S} x_i$, è sufficiente che suddivida in parti uguali tra i suoi membri il *surplus* $v(S) - \sum_{i \in S} x_i$, aggiungendolo a $x_i$, per far sì che ognuno ottenga strettamente di più di quanto proposto dalla allocazione $x=(x_i)_{i \in N}$. Da qui, la deduzione che l'allocazione $x$ non sia una soluzione accettabile o che quanto meno sia estremamente instabile. Occorre però osservare come la suddivisione sopra indicata sia largamente ipotetica, come "obiezione": non è affatto scontato che i membri della coalizione la trovino unanimemente soddisfacente; stiamo anche trascurando il fatto che ad essa possa essere contrapposta una ulteriore "contro-obiezione" da un'altra coalizione. Insomma, le condizioni di "razionalità intermedia" sono un po' meno solide di quelle di razionalità individuale.

Comunque, accantoniamo momentaneamente queste perplessità e ribadiamo che le condizioni sopra indicate definiscono per l'appunto uno dei principali concetti di soluzione per i giochi cooperativi: il *nucleo*. Questo termine identifica l'*insieme* di tutti gli elementi $x$ di $R^n$ che soddisfano le condizioni:

$$\sum_{i \in N} x_i \leq v(N)$$

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

(la seconda, s'intende valga per ogni coalizione $S$). Verrebbe da chiedersi come mai questa idea di soluzione abbia ottenuto così tanta attenzione. Ha, senza dubbio, parecchi "punti" a suo favore:

- è una definizione semplice e molto naturale;
- ha importanti interpretazioni in classi rilevanti di giochi: in particolare, nei *market games*;
- risulta un concetto non nuovo: può essere visto come la riproposizione della curva dei contratti di Edgeworth (1881), come ha fatto notare Shubik nel 1959, sei anni dopo la introduzione della definizione di nucleo, che è dovuta a Gillies.

Il nucleo, come concetto di soluzione, ha però alcuni difetti. Uno – evidente – è che ha un valore predittivo limitato, individuando non una soluzione bensì una classe di soluzioni.

L'altro – ancora più rilevante – è che può essere vuoto, il che certo dal punto di vista predittivo non è molto entusiasmante. L'esempio più noto, e più semplice, in cui questo fatto accade, è fornito dal "gioco di maggioranza": $N=\{1,2,3\}$, con $v(\{i\})=0$, $v(\{i,j\})=v(\{1,2,3\})=1$. È un facile esercizio provare che non è possibile soddisfare contemporaneamente tutte le condizioni che individuano il nucleo.

Osserviamo che il nucleo di un gioco è un insieme convesso di $R^n$, anzi è un *poliedro* (anzi, un *politopo*, essendo limitato), in quanto individuato da una famiglia di disuguaglianze lineari. Questo fatto potrebbe indurci a sospettare che teoremi di separazione o metodi di dualità in programmazione lineare possano avere una qualche utilità nella descrizione del nucleo. Così è, infatti. O. N. Bondareva, nel 1963, ha provato una caratterizzazione dei giochi che hanno nucleo non vuoto, usando la condizione di *bilanciamento*, ritrascrivendo convenientemente il problema di sapere se il nucleo è non vuoto come problema di programmazione lineare ed analizzando il suo duale.

Tornando alla questione della potenzialità predittiva del nucleo, possiamo osservare che vi è una classe particolare di giochi (noti in letteratura come *gioco dei guanti*) i quali hanno l'interessante proprietà che il nucleo risulta essere un *singleton*!

Consideriamo tre giocatori, ognuno dei quali possiede un guanto. Per la precisione, due (diciamo i giocatori 1 e 2) possiedono un guanto destro e uno (il giocatore 3) ha un guanto sinistro. Se assumiamo che solo un paio di guanti abbia valore (che fissiamo, convenzionalmente, pari a 1), possiamo descrivere questa situazione come un gioco cooperativo a pagamenti laterali. Per ogni coalizione $S$, sarà $v(S)=0$ tranne che per $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ e $\{1,2,3\}$ per le quali vale 1.

È facile verificare che $(0,0,1)$ è una allocazione che sta nel nucleo. In realtà, è l'unica. Per convincersene, si consideri una allocazione $(x_1, x_2, x_3)$. Se fosse $x_1>0$, avremmo $x_2+x_3<1=v(\{2,3\})$ e quindi $(x_1, x_2, x_3)$ non sta nel nucleo. Abbiamo allora un caso in cui il nucleo ci dà effettivamente una predizione molto chiara e netta. È plausibile? Sì. L'idea è che 3 possa sfruttare la situazione di competizione che si crea fra 1 e 2 per lasciar loro solo le briciole (il che corrisponde ad uno zero tondo nel nostro modello). Quindi, sembra di avere una predizione accurata e significativa. Lascia forse un po' meno soddisfatti il fatto che, in un gioco analogo, in cui 1000 possiedono il guanto sinistro e 1001 quello destro, ancora il nucleo contenga una sola allocazione, che dà 1 a ciascuno dei giocatori "di sinistra" e 0 agli altri. Ecco, in questo caso la nostra intuizione rispetto alla forza della concorrenza non è così vicina al risultato ottenuto. Non è però sorprendente questa divaricazione fra modello ed intuizione: dopo tutto, gli aspetti trascurati dal modello sono tanti e, in un contesto in cui i giocatori sono 2001, gli effetti dell'approssimazione si fanno sentire.

Chiudo con qualche ulteriore esempio, sempre di *gioco dei guanti*. Cominciamo con il chiederci che cosa succeda quando ci siano due giocatori *di sinistra* e due *di destra*. Data la simmetria della situazione, ci aspettiamo che anche la soluzione (nel nostro caso, il nucleo) sia simmetrica. Sì, ma simmetrica *come*? La risposta è che gli elementi del nucleo sono tutte e sole le allocazioni del tipo ($\lambda$, $\lambda$, $1–\lambda$, $1–\lambda$) al variare di $\lambda$ in *[0,1]*. Quindi, abbiamo una simmetria ma tra i giocatori che *hanno lo stesso tipo di guanto*, non (necessariamente) fra chi ha guanto *destro* o *sinistro*. È possibile, in altre parole, avere una allocazione che discrimina tra questi due tipi di possessori del bene *guanto* mentre non è possibile discriminare tra possessori dello stesso tipo di guanto. Un risultato non scontato, direi.

Come da tradizione, vediamo di instillare qualche dubbio finale. Immaginiamo di avere tre possessori di guanto *destro* e due di guanto *sinistro*. Come prevedibile, l'unica allocazione del nucleo assegna *1* a ciascuno dei proprietari del guanto *sinistro*. E gli altri non possono fare niente? Sì, che possono. Tanto per fare un esempio, possono mettersi d'accordo: due di loro buttano via il guanto che hanno! In questo modo sono i guanti di *destra* ad essere il bene scarso: con il risultato che *1* va al possessore rimasto del guanto *destro* (e potrebbe essere spartito fra i tre possessori originari; non pensiamo che i due che hanno buttato via il guanto lo abbiano fatto senza ricevere adeguate assicurazioni). Non vi ricorda le arance che venivano distrutte passandoci sopra con i trattori? Insomma, non sembra essere una idea poi tanto nuova, quella di buttare via un po' di guanti...

C'è un altro modo di approcciare il problema: i tre tizi potrebbero stringere un patto di ferro tra loro. Così, in pratica, il gioco si ridurrebbe a soli tre giocatori (i due col guanto di *sinistra* e questa "società" fatta dai tre che hanno il guanto di *destra*). Senza fare troppi conti, ci si dovrebbe convincere agevolmente che la situazione è cambiata significativamente, a favore dei tre "soci".

Morale? Abbiamo cercato di ridurre al minimo i dettagli. Come si vede, però, c'è il rischio che – cacciati dalla porta – rientrino dalla finestra. Imponendo, quanto meno, una riflessione molto più approfondita su quali siano le ipotesi implicite che stanno dietro all'idea di nucleo come soluzione per un gioco cooperativo.