

## I teoremi di Arrow e May

Fioravante PATRONE

DIPTM,  
Università di Genova

Pisa 2008, Domus Galileiana

## Summary

### Esempi

Pentathlon  
Fannulloni, ovvero ricercatori universitari  
Condorcet  
Borda

### Teoremi

Arrow  
Teoremi “positivi”: Black e May

### Commenti sparsi

### Sito-bibliografia

## Il problema

Stilare la classifica di una gara come il pentathlon:  
dati due atleti,  $a$  e  $b$ , stabilire se:

- $a$  è meglio di  $b$ ;
- viceversa;
- sono alla pari.

Sulla base dei risultati ottenuti nelle singole discipline.

Criteri da rispettare

- ▶ Il metodo deve funzionare **sempre**.
- ▶ Se uno è sempre davanti all'altro, in ogni disciplina. . .
- ▶ **IIA**  
L'idea della “classifica avulsa”: che  $a$  sia meglio di  $b$  o viceversa non dovrebbe dipendere da come si sono piazzati **altri atleti**

## Come si fa?

Che metodo usare per stilare una **classifica** rispettando i criteri anzidetti? Classifica? Ecchevoddi?

- transitiva
- totale.

Metodo semplice: si seleziona a priori una delle cinque discipline e si ricopia la classifica di quella.

Non vi piace?

**Altro modo non c'è!**

## Fannulloni, ovvero ricercatori universitari

Fare una classifica della operosità degli impiegati statali.  
Ovvero, classifica della bravura dei ricercatori universitari.

A partire da:

Valutazioni degli utenti del servizio (l'idea delle faccine, migliorata)

Valutazione dei "peers" di Dipartimento (di Ateneo, di SSD. . .)

Criteri da rispettare? Da bravo ricercatore, ricopio.

- ▶ Il metodo deve funzionare **sempre**.
- ▶ Se uno è sempre davanti all'altro, nella valutazione di ciascuno. . .
- ▶ **IIA**: Risultato non dipenda da come si sono piazzati **altri impiegati [ricercatori]**

## Brunetta

Metodo semplice: si seleziona a priori uno degli utenti (Brunetta?) e si prende la sua classifica.

O, per i ricercatori, si sceglie uno e lo si nomina dittatore.

Non vi piace?

**Altro modo non c'è!**

Uhm, allora da ricercatore universitario penso che forse il problema è meno facile di quanto si creda o **si voglia far credere**.

## Votiamo!

Facciamo **votare** gli utenti, i singoli individui. E poi diciamo che:

$a$  è strettamente preferito a  $b$  se il numero di individui che preferiscono  $a$  a  $b$  è maggiore del numero di quelli che hanno la preferenza opposta.

Quindi li facciamo votare.

- ▶ Il metodo funziona sempre.
- ▶ Se uno è sempre davanti all'altro, nella valutazione di ciascuno. . .
- ▶ **IIA**: il risultato ovviamente non dipende dalle valutazioni di altre alternative

## Trovato!?

- ▶ 1. Abbiamo trovato la soluzione!
- ▶ 2. Ma allora le mie precedenti affermazioni erano false?
- ▶ 1. NO, problema della transitività (no classifica)
- ▶ 2. NO

## Paradosso di Condorcet

I preferisce strettamente  $a$  a  $b$  a  $c$   
II preferisce strettamente  $b$  a  $c$  ad  $a$   
III preferisce strettamente  $c$  ad  $a$  a  $b$   
Quindi nelle votazioni  $a$  batte  $b$ , infatti...  
E  $b$  batte  $c$ .  
Ma...  $c$  batte  $a$   
Manca la transitività.

## Agenda

Mettiamo ordine nel caos delle votazioni

Stiliamo uno **specifico ordine** di votazione.

L'agenda!!

- ▶ Il metodo funziona sempre.
- ▶ Se uno è sempre davanti all'altro, nella valutazione di ciascuno...
- ▶ **IIA NO!**

## Agenda, bis

Al di là dei tre criteri:

Forte potere di chi fissa l'agenda delle votazioni.

Ma anche manipolabilità da parte dei votanti!

**Non IIA e manipolabilità, un connubio quasi perfetto.**

Ecco il rilievo della condizione IIA.

Manipolabilità: grande tema. Mechanism design ("Nobel" per l'economia 2007 assegnato a Hurwicz, Maskin e Myerson).

Miei appunti (Re Salomone)

## Punteggi

Come in Formula 1.

Si fissa una regola che converte graduatorie in punteggi. Ad esempio, all'alternativa migliore per l'agente si dà 1, poi alla seconda migliore 2, 3, etc. Oppure 10, 8, 6, 4, 2, 1 (e 0 agli altri) come appunto in Formula 1.

O come nei tuffi o nella ginnastica.

Ogni agente (qui = giudice) attribuisce un punteggio ad ogni alternativa, sulla base delle preferenze.

Entrambi i metodi prevedono di fare la somma dei punteggi (con eventuali correttivi).

## Punteggi

- ▶ Il metodo funziona sempre.
- ▶ Se uno è sempre davanti all'altro, nella valutazione di ciascuno. . .
- ▶ **IIA** NO!

## Punteggi e manipolazioni

Lo sanno tutti che questa regola può essere manipolata.

Esempi vanno da Graziano Battistini che aspetta Gastone Nencini al Tour de France del 1960, fino a Felipe Massa che nel 2007 fa vincere ultima gara e campionato a Kimi Raikonen.

E poi il punteggio è arbitrario: vedi i cambiamenti in F1:  
prima era: 10 - 6 - 4 - 3 - 2 - 1  
adesso è: 10 - 8 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1

Ma anche nel calcio: da 2 - 1 - 0 a 3 - 1 - 0.

## Una tesi di dottorato

Kenneth Arrow: *Social Choice and Individual Values*, 1951

Non si può trovare una **social welfare function** che soddisfi le condizioni più volte nominate:

- Universalità
- Unanimità (o criterio paretiano)
- Indipendenza dalle alternative irrilevanti (IIA)

Soluzioni??

## Black

Teorema di Black, vale per preferenze "single peaked".

Interessante è capire **bene** cosa vuol dire questa ipotesi: introduce una **dimensione esterna** al problema: non soggettiva, ma oggettiva. E pretende una certa coerenza tra una scala oggettiva e le preferenze soggettive.

Esempio standard: la linea della politica, da sinistra a destra.

## May: enunciato

Solo **due** alternative tra cui scegliere.

Condizioni:

- funziona sempre
- anonimità
- neutralità
- "positive responsiveness"

Votazione a **maggioranza semplice** soddisfa questi quattro criteri ed è l'unico metodo a soddisfarli.

Che la votazione a maggioranza semplice soddisfi questi quattro criteri è una verifica lasciata al "lettore".

## May: dimostrazione

Per il viceversa: trucco comodo (immaginiamo una votazione):  
 $a$  preferito a  $b$  lo trasformiamo in 1  
 $b$  preferito ad  $a$  lo trasformiamo in  $-1$   
 $a$  e  $b$  indifferenti lo trasformiamo in 0

**Anonimità:** conta solo il numero di  $-1$ , 0 e 1, non chi li mette.

**Neutralità:** se stesso numero di 1 e  $-1$ , allora l'esito è pareggio.

**Positive responsiveness:** se numero di 1 è maggiore di una unità del numero di  $-1$ , allora ci dice che vince 1. La applichiamo più e più volte: otteniamo che quello che conta è il numero di 1 e  $-1$ . Ecco la regola della maggioranza semplice.

Domanda: dove abbiamo usato il "dominio universale"?

## Informazioni aggiuntive

Intensità delle preferenze.

Scale di valutazione più "rigide" (Pentathlon)

Confronti interpersonali.

## Informazioni non welfariste

Giustizia distributiva:

Uguaglianza di opportunità.

Compensare mancanza di doti naturali.

Rawls: il velo di ignoranza e beni primari

Sen: functionings e capabilities.

Un altro problema è stato messo in evidenza da Amartya K. Sen. Una persona che abbia avuto una esperienza di vita deprivata (Sen parla di "lo schiavo bastonato, la casalinga docile, il disoccupato picchiato, il bisognoso senza speranza") può sviluppare delle preferenze cheap (facili da accontentare).

## Libri fondamentali

K.J. Arrow:

**Social Choice and Individual Values**

Wiley, New York (NY-USA), 1951.

Seconda edizione, con importanti correzioni: 1963

<http://cowles.econ.yale.edu/P/cm/m12-2/m12-2-all.pdf>

D. Black:

**The Theory of Committees and Elections**

Cambridge University Press, Cambridge (MA-USA), 1958.

K. O. May:

**A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decisions**

Econometrica, **20**, 680–684, 1952.

## Altri libri

A. MacKay:

**Arrow's theorem: The paradox of Social Choice**

Yale University Press, New Haven (CT - USA), 1980

J. Roemer:

**Theories of Distributive Justice**

Harvard University Press, Cambridge (MA - USA), 1996

## Documenti in rete

F. Patrone (teorema di May):

[http://dri.diptem.unige.it/altro\\_materiale/teorema\\_di\\_May.pdf](http://dri.diptem.unige.it/altro_materiale/teorema_di_May.pdf)

S. Moretti, F. Patrone (scelte sociali):

[http://dri.diptem.unige.it/altro\\_materiale/IRRE\\_schoice\\_2.pdf](http://dri.diptem.unige.it/altro_materiale/IRRE_schoice_2.pdf)

F. Patrone (implementazione e Re Salomone):

[http://dri.diptem.unige.it/altro\\_materiale/implementazione\\_formalizzazione.pdf](http://dri.diptem.unige.it/altro_materiale/implementazione_formalizzazione.pdf)

## Autoreferenziale

Un libro.

F. Patrone:

**Decisori (razionali) interagenti**

Edizioni Plus, Pisa, 2006.

Una pagina web:

<http://dri.diptem.unige.it>