Camminate a caso[1] e giochi "sfavorevoli"...

Se uno prova effettivamente a giocare, si accorgerà che, come giocatore II *mediamente* perderà. Ovvio! Lo dice la TdG (e Fagnola, da buon probabilista, ci tiene a ricordare anche la "legge dei grandi numeri", a questo proposito). Ma si accorgerà anche che si verificano delle ampie oscillazioni, la cui presenza è comprensibile se si tiene conto del fatto che il valore del gioco per il giocatore II, pur negativo, vale solo $-1/12$: un numero relativamente piccolo se confrontato coi valori dei payoff in gioco e che sono quelli che di volta in volta si otterranno (essi variano, in valore assoluto, da 2 a 4).

Queste oscillazioni possono essere stimate, in modo da avere una idea *quantitativa* della rilevanza del fenomeno. Tutti i conti che seguono saranno fatti nell'ipotesi che il giocatore II giochi, ad ogni giocata, sempre la strategia R. Tutto ciò al fine di semplificare drasticamente i conti che dobbiamo fare. Si noti che il payoff atteso di II, adottando la strategia R, continua ad essere $-1/12$.

Si tratta di studiare una camminata aleatoria, appena poco generalizzata rispetto a quella standard.

La camminata aleatoria standard è data dalla somma $\hat{S}_n$ di v.a. X_n indipendenti ed a valori in $\{0,1\}$. Usiamo la X_n per cui $\mathbb{P}\{X_n = 1\} = 5/12$. La nostra camminata è data dalla somma delle v.a. Y_n, (i payoff di II), che assumono valore 4 con probabilità 5/12 e valore -3 con probabilità 7/12. Le Y_n sono legate alle X_n da una trasformazione lineare del tipo $y = ax + b$, i cui parametri si trovano imponendo che si abbia $y = 4$ per $x = 1$ ed $y = -3$ per $x = 0$, ovverossia risolvendo un sistema lineare le cui soluzioni sono $a = 7$ e $b = -3$).

A noi interessa quindi la v.a. S_n, così definita:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k = 7\sum_{k=1}^{n} X_k - 3n = 7\hat{S}_n - 3n$$

E':

$$\mathbb{P}\{S_n \geq 0\} = \mathbb{P}\{\hat{S}_n \geq \frac{3n}{7}\}$$

Poiché assumiamo che la probabilità di "successo" sia pari a 5/12, $\hat{S}_n$ ha distribuzione binomiale di parametri n e 5/12 e quindi:

$$\mathbb{P}\{\hat{S}_n = k\} = \binom{n}{k}\left(\frac{5}{12}\right)^k\left(\frac{7}{12}\right)^{n-k}$$

E':

$$\mathbb{P}\{S_n \geq 0\} = \mathbb{P}\{\hat{S}_n \geq \frac{3n}{7}\} = \sum_{k\,:\,k\,\geq\,3n/7}\binom{n}{k}\left(\frac{5}{12}\right)^k\left(\frac{7}{12}\right)^{n-k}$$

[1] Con un ringraziamento a Fagnola per la preziosa e immediata consulenza

Fissiamo ad esempio $n = 1000$. Usando software specializzato (es: Minitab) o anche semplicemente un foglio Excel (reperibile da questa pagina web), si ottiene per la cumulata di $\hat{S}_n$, indicata con $F_{\hat{S}_n}$, che:

$$F_{\hat{S}_n}\left(\frac{3000}{7}\right) \sim 0.7763$$

Pertanto:

$$\mathbb{P}\{S_{3000} \geq 0\} = \mathbb{P}\{\hat{S}_{3000} \geq \frac{3000}{7}\} =$$

$$= \sum_{k\,:\,k \,\geq\, 3000/7} \binom{3000}{k} \left(\frac{5}{12}\right)^{3000} \left(\frac{7}{12}\right)^{3000-k} =$$

$$= 1 - F_{\hat{S}_n}\left(\frac{3000}{7}\right) \sim 0.2237$$

Quindi, nonostante il guadagno atteso di II sia $1/12$, dopo 1000 volte in cui II gioca la strategia R, ha una probabilità pari a circa il 0.2237 di trovarsi in vantaggio.