Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie

Appunti a cura di
Fioravante PATRONE
`http://www.fioravante.patrone.name/default.htm`

Queste brevi note vogliono essere una introduzione al problema della modellizzazione mediante equazioni differenziali. Vengono messe in rilievo difficoltà, criticità ed incomprensioni che spesso si incontrano nello "scrivere" una equazione differenziale. Per chi fosse interessato, c'è un altro file, dedicato alla soluzione delle equazioni differenziali a variabili separabili, in cui viene discusso anche il metodo "sportivo" che spesso si vede usare nella loro risoluzione, e che ho chiamato metodo *urang-utang*©.

La mia pagina web dedicata alla teoria dei giochi:
Decisori (razionali) interagenti

Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie[1]

Consideriamo il seguente problema.

Un serbatoio contiene 50 *litri di un liquido* L_1 *e* 50 *litri di un liquido* L_2. *Nel serbatoio viene immesso del liquido* L_2 *alla portata di* 5 *litri/min: allo stesso ritmo viene tolta la soluzione. Si chiede quanto liquido* L_1 *si troverà nel serbatoio dopo 1 ora.*

Per giungere alla soluzione, la difficoltà maggiore sta nel fatto che la percentuale di liquido L_1 varia col tempo e per sapere quanto liquido L_1 è uscito dal serbatoio è necessario conoscere la percentuale di liquido presente ai vari istanti nel serbatoio.

la percentuale di liquido L_1 varia col tempo

L'idea che permette di risolvere questo problema consiste nel cercare di determinare il modo in cui la percentuale di liquido L_1 varia nel tempo. Punto di partenza sarà la seguente *ovvia* equazione:

conservazione massa → conservazione volumi

[volume di liquido L_1 presente in un istante] = [volume di liquido L_1 presente in un precedente istante] - [volume di liquido L_1 uscito nell'intervallo tra i due istanti]

Il problema è rappresentato dalla presenza dell'ultimo termine che non è conosciuto. Però, se usiamo questa equazione relativamente ad un intervallo di tempo "piuttosto piccolo", possiamo ragionevolmente assumere che la percentuale di liquido L_1 in tale intervallo non cambi. Per arrivare a delle relazioni *numeriche* dobbiamo ancora scegliere delle unità di misura: per il tempo useremo i minuti e per i volumi i litri. Indicheremo quindi con ϕ_1 (rispettivamente ϕ_2) quanti litri di liquido L_1 (rispettivamente L_2) sono presenti nel serbatoio. Anzi, poiché tali valori variano nel tempo, useremo le notazioni $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$: qui, t rappresenta quanti minuti sono trascorsi a partire da tempo "0", convenzionalmente (e naturalmente) scelto come l'istante in cui ha inizio il processo descritto.

idea fondamentale!

scegliere delle unità di misura

Anzi

$\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$

convenzionalmente

(e naturalmente) scelto

Si avrà quindi, in un intervallo di tempo Δt tra gli istanti t_0 e $t_0 + \Delta t$, la seguente relazione (valida *approssimativamente*):

approssimativamente

$$\phi_1(t_0 + \Delta t) \text{ litri } = \phi_1(t_0) \text{ litri } - \Delta t \text{ min } \cdot \frac{\phi_1(t_0) \text{ litri}}{\phi_1(t_0) \text{ litri } + \phi_2(t_0) \text{ litri}} \cdot 5 \frac{\text{litri}}{\text{min}}$$

Ribadiamo che qui si è supposto che in tutto l'intervallo da t_0 a $t_0 + \Delta t$ la percentuale di liquido L_1 fosse uguale alla percentuale di liquido L_1 presente all'istante t_0 iniziale.

[1] Il vero titolo è: *Tutto quello che avreste dovuto sapere sulle equazioni differenziali ma nessuno ve l'ha insegnato*. Ma è anche colpa vostra: potevate fare domande!

Poiché $\phi_1(t_0)$ litri $+\phi_2(t_0)$ litri $= 100$ litri , si ha:

due calcoletti

$$\phi_1(t_0+\Delta t) \text{ litri } = \phi_1(t_0) \text{ litri } - (\frac{\Delta t}{20}) \cdot \phi_1(t_0) \text{ litri}$$

Questo per quanto riguarda i volumi di liquido presenti nel serbatoio. Se ci riferiamo solo alle misure di tali volumi, otteniamo:

solo numeri, finalmente!

$$\phi_1(t_0+\Delta t) = \phi_1(t_0) - (\frac{\Delta t}{20}) \cdot \phi_1(t_0)$$

Vale a dire:

et voilà!

$$\frac{\phi_1(t_0+\Delta t) - \phi_1(t_0)}{\Delta t} = -\frac{\phi_1(t_0)}{20} \tag{1}$$

Si noti che la quantità a primo membro è un *rapporto incrementale*.

WOW, il rapporto incrementale!

A questo punto si può fare le seguente *fondamentale* osservazione. La relazione (1) è, come più volte detto, solo approssimata: l'approssimazione, però, diventa sempre migliore quanto più piccolo diventa Δt. Matematicamente, questo equivale ad effettuare un passaggio al limite:

il lampo di genio: diventa sempre migliore quanto più piccolo diventa Δt

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{\phi_1(t_0+\Delta t) - \phi_1(t_0)}{\Delta t} = -\frac{\phi_1(t_0)}{20}$$

Vale a dire: *se* tale limite esiste finito, otteniamo la relazione "corretta" (cioè: non più approssimata):

WOW, la derivata!

$$\phi_1{}'(t_0) = -\frac{\phi_1(t_0)}{20} \tag{2}$$

Che senso ha quel "se" sottolineato prima? Significa che la relazione (2) è adatta per descrivere l'evolversi del fenomeno *purché siamo convinti a priori* che l'andamento del fenomeno sia regolare: vale a dire che ϕ_1 non presenti discontinuità e neanche delle brusche variazioni (per es. "spigoli" o "cuspidi" nel grafico di ϕ_1).

Si noti che questa assunzione di regolarità a priori è stata fatta *prima* di arrivare a scrivere la relazione (1). In effetti, se abbiamo a disposizione la (1), da questa leggiamo immediatamente che il rapporto incrementale (il membro di sinistra di questa uguaglianza) è *costante*, visto che il membro di destra non dipende da Δt, e quindi il suo limite ci sarà certamente! Insomma, l'assunzione di regolarità a priori l'abbiamo fatta quando ci è venuta la brillante idea che su un intervallo "piccolo" potessimo assumere che la la percentuale di liquido L_1 fosse approssimativamente costante. Se guardiamo ancora più attentamente le assunzioni che abbiamo fatto, si capisce che abbiamo supposto di poter approssimare "bene" ϕ_1, su un piccolo intervallo, con una funzione lineare passante per $(t_0, \phi_1(t_0))$. Detto altrimenti, abbiamo assunto che ϕ_1 sia differenziabile.

la regolarità a priori non è uno scherzo!

Scriviamo:

$$\phi_1(t_0+\Delta t) = \phi_1(t_0) - \left(\frac{\Delta t}{20}\right) \cdot \phi_1(t_0) + E(t_0, \Delta t)$$

Se vogliamo che esista il limite del rapporto incrementale, dobbiamo *supporre a priori* che

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{E(t_0, \Delta t)}{\Delta t} = 0$$

Il che vuol dire per l'appunto assumere che ϕ_1 sia differenziabile. Visto che ϕ_1 è una funzione di una variabile, la differenziabilità è equivalente alla derivabilità.

Ritorniamo al discorso principale

La relazione (2), naturalmente, è valida per tutti i $t_0 > 0$, e pertanto: valida per tutti i $t_0 > 0$

$$\phi_1{}'(t) = -\frac{\phi_1(t)}{20} \quad \forall t > 0 \tag{3}$$

A questo punto si tratta di trovare la soluzione di (3), cioè trovare una funzione ϕ_1 che soddisfi la relazione (3), e la risposta al problema sarà $\phi_1(60)$. O, per la precisione, $\phi_1(60)$ litri.

Il lettore serio dovrebbe cercare di trovare *lui* una soluzione, prima di passare alla pagina seguente. STOP!

Per non lasciare tutto questo spazio vuoto, tre buoni riferimenti sulle equazioni differenziali (in ordine crescente di apprezzamento da parte mia):

Braun, Martin: *Differential Equations and their Applications. An introduction to applied mathematics*, Springer, New York, 1978.

Pontryagin, Lev Semenovich: *Ordinary Differential Equations*, Addison Wesley, Reading (MA, USA), 1962.

Brauer, Fred e John A. Nohel: *Ordinary Differential Equations: a first course*, Benjamin, Reading (MA, USA), 1973.

Una soluzione di (3) si trova subito: è $\phi_1(t) = 0 \quad \forall t > 0$!!! Vale a dire che nel serbatoio non ci sarà mai liquido L_1! Come è possibile? Dove è l'errore?

OOOOH!

Ci siamo *dimenticati* una cosa. Che la (3) esprime la *legge di variazione* di ϕ_1 nel tempo: che le cose stiano effettivamente così è ancora più evidente se torniamo alla formula con Δt da cui si è partiti.

dimenticati

ecco cosa è una equazione differenziale: esprime la legge di variazione

torniamo all'inizio, o quasi

Avevamo:

$$\phi_1(t_0 + \Delta t) = \phi_1(t_0) - (\frac{\Delta t}{20}) \cdot \phi_1(t_0)$$

E' chiaro che questa relazione non dice *quanto* è $\phi_1(t_0 + \Delta t)$. Dice solo quanto è $\phi_1(t_0 + \Delta t)$ *se già conosciamo* $\phi_1(t_0)$.

non dice *quanto* è $\phi_1(t_0 + \Delta t)$

se già conosciamo: HA!

Mettiamoci allora all'istante iniziale: t =0. Si ha:

$$\phi_1(\Delta t) = \phi_1(0) - (\frac{\Delta t}{20}) \cdot \phi_1(0)$$

Se conosciamo $\phi_1(0)$ possiamo quindi calcolare $\phi_1(\Delta t)$. Dopo di che, potremo calcolare $\phi_1(2 \cdot \Delta t)$ mediante la relazione analoga, e così via. Ma è necessario conoscere $\phi_1(0)$. Vale a dire, è necessario conoscere le "*condizioni iniziali*". Pertanto, possiamo precisare che la giusta formulazione del problema non è (3), bensì

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} {\phi_1}'(t) & = & -\frac{\phi_1(t)}{20} \\ \phi_1(0) & = & 50 \end{cases} \tag{4}$$

E' facile verificare che $\phi_1(t) = 50 \cdot exp(-t/20)$ è soluzione di (4) e che quindi $\phi_1(60) = 50 \cdot exp(-3)$. Vale a dire, il serbatoio dopo un'ora contiene $50 \cdot exp(-3)$ litri.

Un commento (di Fabrizio Rinaldi). E' stato grave, naturalmente, non "ricordarsi" delle condizioni iniziali. Ma se lo avessimo fatto consapevolmente e non perché distratti, avremmo potuto vantarci del fatto che stavamo cercando la legge che governa la "dinamica" (l'evoluzione) del problema *indipendentemente* dalle particolari condizioni iniziali. Anche qui, comunque, un warning: non tutte le condizioni iniziali hanno senso. Per esempio, nel nostro caso, non sembra ragionevole avere una condizione iniziale che preveda una quantità negativa di liquido L_1 presente nel serbatoio...

Possiamo, a questo punto, dire di avere scovato un buon modello che ci ha permesso di risolvere il problema. Ma lo abbiamo davvero risolto?

Un secondo momento di pausa per il lettore serio: prova a pensarci, prima di passare alla pagina seguente.

STOP!

No. Dobbiamo ancora richiedere altri requisiti fondamentali. L'unicità della soluzione di (4), tanto per cominciare: se ci fosse un'altra soluzione $\tilde{\phi}_1$ oltre a quella vista, non sapremmo più dire quanti litri ci sono alla fine. Sarà quindi essenziale avere a disposizione un teorema di *esistenza*[2] e *unicità* della soluzione di (4), se vogliamo dire di avere trovato un modello adeguato per il nostro problema.

dico **NO**!

unicità

esistenza

Ci sono poi, in realtà, altri requisiti: la *dipendenza continua della soluzione dai dati*, per esempio. Se, partendo con $\phi_1(0) = 50.001$, la soluzione fosse molto diversa da quella che abbiamo ottenuto per $\phi_1(0) = 50$, potremmo dirci soddisfatti?

dipendenza continua dai dati

I vari teoremi di esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati hanno appunto lo scopo di dirci se e quando possiamo confidare sul fatto che queste proprietà valgano. La discussione tecnica di questi risultati è fuor di luogo in questa introduzione, per cui su questo rinvio a testi standard sulle equazioni differenziali.

la teoria serve...

Ritorniamo piuttosto su una questione che abbiamo trascurato. Era sembrata una buona idea quella di mettersi a lavorare su un "piccolo" intervallo Δt: anzi, più piccolo lo si prende, più la formula (1) fornisce una migliore approssimazione. *Però*: se diminuiamo l'ampiezza Δt, la migliore approssimazione che troviamo sul singolo intervallino non viene distrutta dal fatto che dobbiamo considerare *un numero maggiore di intervallini*? La risposta fortunatamente è no, e la ragione sta nel fatto che l'errore commesso sul singolo intervallino è di ordine superiore rispetto all'ampiezza dell'intervallino (si tenga presente la definizione di differenziabilità!) e quindi si ha complessivamente un guadagno prendendo intervallini sempre più piccoli. Vediamo in dettaglio, con un esempio, che cosa succede. Ci metteremo in ipotesi un po' più forti di quelle effettivamente necessarie per ottenere il risultato che ci interessa, allo scopo di vedere più facilmente cosa succede: supponiamo cioè di avere $\phi \in \mathcal{C}^2([0,T])$.

un *sano dubbio* ci assale...

sinceramente: ci avevate pensato?

questi conti sono per i volenterosi

Dividiamo $[0,T]$ in n intervalli uguali: nel k-esimo intervallo, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, si ha ($t \in [kT/n, (k+1)T/n]$):

$$\hat{\phi}(t) = \hat{\phi}(kT/n) + \phi'(kT/n) \cdot (t - (kT/n)); \quad \hat{\phi}(0) = \phi(0)$$

Vale a dire, sostituiamo a ϕ la approssimazione "lineare a tratti" $\hat{\phi}$ così definita:

$$\hat{\phi}(t) = \phi(0) + (T/n) \sum_{j=1}^{k-1} \phi'(jT/n) + \phi'(kT/n) \cdot (t - (kT/n)),$$

per $t \in [kT/n, (k+1)T/n]$ se $k = 0, 1, \ldots, n-1$

[2]Esistenza! Perché non tutti i problemi sono facili come questo, e magari non abbiamo subito la "formuletta magica risolutrice".

Limitiamoci, per semplicità[3], a stimare $|\hat{\phi}(T) - \phi(T)|$. E'

$$|\phi(T/n) - \hat{\phi}(T/n)| = |\phi(T/n) - [\phi(0) + \phi'(0) \cdot (T/n)]| =$$

$$\text{(Taylor con resto di Lagrange)} = |\phi''(\xi_1) \cdot (T^2/n)| \leq (MT^2)/n^2$$

(poiché $\phi \in \mathcal{C}^2([0,T])$, esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c. $|\phi''(t)| \leq M$ per ogni $t \in [0,T]$).

Poi si ha:

$$|\phi(2T/n) - \hat{\phi}(T/n)| = |\phi(2T/n) - [\hat{\phi}(T/n) + \phi'(T/n) \cdot (T/n)]| \leq$$
$$\leq |\phi(T/n) - \hat{\phi}(T/n)| + |\phi(2T/n) - [\phi(T/n) + \phi'(T/n) \cdot (T/n)]| \leq$$
$$\leq (MT^2)/n^2 + |\phi''(\xi_1) \cdot (T^2/n^2)| \leq 2(MT^2)/n^2$$

E così via. Si ottiene, dopo n passi, la stima:

$$|\phi(T) - \hat{\phi}(T)| \leq n \cdot (MT^2)/n^2 = (MT^2)/n$$

Vale a dire: è conveniente prendere intervallini più corti perché l'approssimazione che si ottiene è migliore.

Si noti che considerazioni di questo tipo sono alla base della dimostrazione di un importante teorema di esistenza della soluzione per (4). Osservo anche che quanto abbiamo fatto, sostanzialmente, è stato approssimare la soluzione mediante il metodo delle poligonali, o di Eulero, che è un metodo numerico di soluzione per le equazioni differenziali[4].

Una ulteriore considerazione sul problema dato. Il modello che abbiamo costruito per risolverlo ha portato a una equazione differenziale. Si poteva però seguire una strada diversa (ma con molti tratti in comune) per arrivare a una *equazione integrale*. Vediamo come. L'idea è che la quantità di liquido L_1 presente a un dato istante è data dalla quantità iniziale di liquido, meno la quantità di liquido uscita nei vari intervallini precedenti. Usando per comodità intervallini tutti di lunghezza $\Delta t = \frac{t}{n}$, otteniamo:

una NUOVA (o quasi) strada!!!

$$\phi_1(t) = \phi_1(n\Delta t) =$$
$$= \phi_1(0) - (\Delta t/20) \cdot \phi_1(0) - (\Delta t/20) \cdot \phi_1(\Delta t) - \ldots - (\Delta t/20) \cdot \phi_1((n-1) \cdot \Delta t) =$$
$$= \phi_1(0) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\phi_1(k\Delta t)}{20} \cdot \Delta t = \phi_1(0) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\phi_1(k\frac{t}{n})}{20} \cdot \frac{t}{n}$$

La sommatoria che compare è una somma di Cauchy per la funzione $\frac{\phi_1}{20}$ sull'intervallo $[0, n\Delta t]$. Ovverossia è compresa tra una somma inferiore di Riemann (associata alla partizione di $[0, n\Delta t]$ che consiste di k intervallini uguali) e la corrispondente somma superiore. Ciò suggerisce la formulazione ($t = n\Delta t$):

somma di Cauchy

somme di Riemann

[3] Anziché $|\hat{\phi}(t) - \phi(t)| \quad \forall t \in [0,T]$. I conti sono analoghi.

[4] Ve ne sono di molto migliori, ma questo metodo ha il pregio di essere molto semplice.

$$\phi_1(t) = \phi_1(0) - \int_0^t \frac{\phi_1(s)}{20}\, ds \quad \forall t > 0 \tag{5}$$

E' da notare che le due formulazioni (4) e (5) sono equivalenti, anche se la (5) richiede (*apparentemente*!) una minore regolarità alla ϕ_1: per essa basta evidentemente che ϕ_1 sia una funzione continua (se ϕ_1 è una funzione continua, allora è $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\phi_1(k\frac{t}{n})}{20} \cdot \frac{t}{n} = \int_0^t \frac{\phi_1(s)}{20}\, ds$), mentre in (4) occorre la derivabilità della ϕ_1. Si tratta però solo di apparenza: infatti se una funzione continua verifica (5), allora essa è anche derivabile (basta utilizzare il teorema fondamentale del calcolo integrale). Tuttavia, la formulazione (5) si rivela utile per la dimostrazione del teorema di esistenza e unicità, nel senso che è proprio questa apparente minore richiesta di regolarità a rendere più semplice la dimostrazione (più propriamente, mi sto riferendo al cosiddetto metodo delle approssimazioni successive, che è *uno* dei metodi che possono essere usati per la dimostrazione).

sono equivalenti

solo uno sfizio, allora?

no, comoda per dimostrar teoremi...

Ma l'aspetto più importante dell'approccio mediante equazione integrale sta proprio nella richiesta *a priori* di una *minore regolarità* per la soluzione. Se nel nostro piccolo problemino del serbatoio possiamo dimostrare che le due formulazioni (problema di Cauchy ed equazione integrale) sono equivalenti, questo fatto *non è sempre vero*. Non possiamo certo descrivere il moto di una palla da biliardo[5] mediante una equazione differenziale (più precisamente, non nel senso elementare che si studia nei corsi matematici di base): la legge del moto non è certo descritta da funzioni derivabili! L'avere scoperto una riformulazione del problema, sotto forma di equazione integrale, è un importante grimaldello che ci permette di scardinare (pardon, modellizzare) situazioni di questo tipo. Un altro esempio iper-classico in questo senso è fornito dallo studio delle traiettorie dei raggi luminosi quando attraversano mezzi di diversa densità: se vogliamo descrivere la traiettoria di un raggio luminoso attraverso l'atmosfera, con le sue variazioni di densità, lo possiamo fare con una traiettoria che è rappresentabile in forma parametrica mediante funzioni derivabili; se vogliamo descrivere il raggio luminoso che ci arriva dalla porzione di bastoncino che è immersa nel laghetto, non possiamo farlo con funzioni derivabili!

... ma soprattutto permette di richiedere *a priori* una *minore regolarità* per la soluzione

pistolotto finale su questo tema

Vorrei fare ancora qualche considerazione su altri aspetti rilevanti e spesso trascurati. Questi aspetti sono tre e sono inestricabilmente legati fra loro: le notazioni, cosa è una equazione differenziale e chi sono i dati di una equazione differenziale

Cominciamo con le notazioni. Un problema di Cauchy come quello visto di solito viene descritto in molti modi. Qui sotto ne indico tre fra i più consueti, ma ve ne sono altri:

ahi! le notazioni!

$$\begin{cases} y' &= -\frac{y}{20} \\ y(0) &= 50 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} &= -\frac{x}{20} \\ x(0) &= 50 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -\frac{x}{20} \\ x(0) &= 50 \end{cases}$$

[5]Nel caso in cui la palla tocchi almeno una sponda...

Mi soffermo sulla notazione a sinistra, cui farò riferimento in seguito. Un generico problema di Cauchy verrà scritto allora così:

$$\begin{cases} y' & = & f(x,y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases}$$

Occupiamioci dell'equazione differenziale, che è la parte più problematica. *Cosa è una equazione differenziale?* E' un **PROBLEMA**. La cui soluzione è una funzione. Più specificatamente, data l'equazione differenziale $y' = f(x,y)$, diremo che una funzione $\phi : I \to \mathbb{R}$ (I è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$) la risolve se è vero che[6]:

una equazione differenziale è un **PROBLEMA**

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x)) \quad \forall x \in I$$

Dovrebbe essere evidente come la notazione tradizionale sia ambigua, in quanto non rende sufficientemente chiaro il fatto che "al posto di y" va sostituito il valore della "aspirante soluzione", calcolata nel punto x. Ma tant'è, questa è la consuetudine[7].

notazione tradizionale ambigua

Abbiamo parlato di notazioni e anche di cosa è un'equazione differenziale. Se è vero che una equazione differenziale è una "stenografia" per segnalare che abbiamo un *problema* da risolvere, c'è da aspettarsi che, come tutti i problemi, abbia dei **DATI**. D'altro canto, li ho già menzionati quando ho parlato di "dipendenza continua dai dati". Ma sarà il caso di mettere "i puntini sulle ı". In un problema di Cauchy:

Chi sono i **DATI** del problema?

$$\begin{cases} y' & = & f(x,y) \\ y(x_0) & = & y_0 \end{cases}$$

i dati sono:
- x_0 ovvero il punto iniziale
- y_0 ovvero il valore iniziale
- f ovvero la "legge" che "governa" la dinamica del sistema, che è una funzione a valori reali, definita su un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^2$

punto iniziale
valore iniziale
la "legge"

Noto che vi è anche una ovvia condizione di compatibilità sui dati: il punto (x_0, y_0) deve appartenere ad A.

compatibilità fra i dati

Ad esempio, nel nostro problema:

$$\begin{cases} y' & = & -\frac{y}{20} \\ y(0) & = & 50 \end{cases}$$

[6]Se f non è definita su tutto $\mathbb{R}^2$, occorre precisare che $(x, \phi(x))$ appartiene all'insieme di definizione di f per ogni $x \in I$

[7]Come tutte le consuetudini, non si sarà affermata per caso. Ma questo discorso ci porterebbe troppo lontano.

i dati sono:
- $x_0 = 0$
- $y_0 = 50$
- $f(x, y) = -\frac{y}{20}$

Una ulteriore osservazione ha a che fare con il dominio di validità della equazione differenziale. Questo è ovviamente un sottoinsieme dell'insieme di definizione di f. Ad esempio, l'equazione differenziale:

dove ha senso l'equazione differenziale?

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

è chiaramente priva di senso al di fuori di $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Osservo che A è proprio l'insieme di definizione della "f".

A volte possono esservi *ulteriori restrizioni*. Proprio nel nostro esempio, è poco sensato immaginare un numero di litri *negativi* di liquido L_1 contenuti nel serbatoio! Allora, possiamo pensare che il dato del nostro problema non fosse la funzione $f(x, y) = -y/20$, ma la sua *restrizione* all'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Si noti che, se così è, abbiamo anche una condizione di compatibilità, e cioè deve essere $y_0 > 0$ (che ci sia del liquido L_1 nel serbatoio...). A dire il vero, potrebbero esservi ulteriori condizioni. Il nostro modello potrebbe non essere adeguato qualora la quantità di liquido L_1 sia troppo piccola (fluttuazioni statistiche, magari dovute all'agitazione termica, potrebbero avere un ruolo, per valori di L_1 molto piccoli), e quindi il nostro modello non è valido per valori di y inferiori ad una soglia positiva.

Altre restrizioni. Tradizionalmente dimenticate...

per favore, state sempre all'erta!

Mi fermo qui, ma chiaramente si potrebbe andare avanti. Osservo che nel nostro problema abbiamo dato per scontato che si potesse considerare il tempo come una variabile continua: sembra essere ragionevole, ma in altri casi potrebbe non essere appropriato (o conveniente). Oppure ci si potrebbe chiedere se non si sia seriamente obbligati a "complicare" il modello[8]. Per esempio, considerare aspetti stocastici (nel nostro caso sembra poco plausibile, visto che anche dopo un'ora di "diluizione" non è plausibile che la quantità di liquido L_1 sia così piccola da dover tener presente degli aspetti menzionati poco sopra) oppure considerare anche aspetti spaziali di interazione (nel nostro caso potrebbe essere rilevante considerare la diffusione del liquido L_2 nella soluzione[9]).

---

[8] Dico "seriamente", perché chi abbia visto in vita sua un po' di lavori "scientifici" pseudo-applicati (ce ne sono tanti, in giro!), sa che è una delle cose più facili (e più inutili) da fare.

[9] Se verso acqua nel vino, questa non si diffonde istantaneamente, né in modo uniforme. Peggio ancora sarebbe se avessimo, ad esempio, una miscela di acqua ed olio.

Abbiamo finito.

Ma riflettiamo ancora un momento. Vi sembra che la formulazione del problema, così come è stata data, fosse esauriente? A me, **NO**. Spero che il flusso di 5 litri al minuto fosse costante (tutto lasciava ad intendere che lo fosse, ma se non è vero dobbiamo ricominciare daccapo). E, poi, come viene tolta la soluzione? Con un flusso costante? E da dove? Magari gli aspetti di diffusione devono essere tenuti in conto oppure no a seconda di dove è il "foro" (ma sarà poi un foro? In alto? In basso?). Potrei continuare a lungo.

Insomma, il problema dato era un problema "libresco"[10]. Non era un *vero* problema. Se davvero volete capire come si fa a scrivere una equazione differenziale, prendetevi voi un problema *reale* e provateci!

Link vari:

Fioravante PATRONE

ASD Scuderia La Bellaria

Decisori (razionali) interagenti

Equazioni differenziali e urang-utang©

E-mail: patrone@diptem.unige.it

[10]Era libresco anche per via di una connotazione molto diseducativa, che si ritrova nel 99% e passa dei "problemi" proposti dalla stragrande maggioranza dei libri. I problemi vengono scelti accuratamente in modo che siano risolubili coi metodi che uno ha appena imparato a usare nella "teoria". Nel mondo vero la vita non è così facile (e noiosa).