# Equazioni differenziali a variabili separabili

**Con discussione del metodo urang-utang©**

Appunti a cura di
Fioravante PATRONE

versione del 5 dicembre 2009

## Indice



**Note per il lettore**

Questi appunti hanno lo scopo di:

- descrivere come possano essere risolte le equazioni differenziali ordinarie a variabili separabili (EDO a VS)
- illustrare il metodo con diversi esempi. Scopo di questi esempi è anche mostrare come possano essere risolti problemi connessi all'inversione di funzioni, visto che un passaggio standard nella risoluzione delle EDO a VS consiste proprio nel passaggio da una soluzione "implicita" ad una "esplicita" mediante inversione di funzione
- mostrare come certi metodi molto diffusi (che ho collettivamente battezzato come "urang-utang©") per la risoluzione di EDO a VS non abbiano alcun fondamento serio. Per fortuna non servono!

# 1 Teoria

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = a(x)b(y), \tag{1}$$

con:

- $a : I \to \mathbb{R}$ continua, $I$ intervallo aperto e non vuoto di $\mathbb{R}$
- $b : J \to \mathbb{R}$ continua con derivata prima continua, $J$ intervallo aperto e non vuoto di $\mathbb{R}$

In queste ipotesi l'equazione differenziale data ha soluzioni, definite su opportuni intervalli, perché il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = a(x)b(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

soddisfa le condizioni del teorema[1] che ci garantisce esistenza e unicità della soluzione (almeno in piccolo), comunque sia dato $(x_0, y_0) \in I \times J$.

Ci proponiamo di determinare le soluzioni dell'equazione differenziale mediante integrazioni.

Innanzi tutto osserviamo che se $\bar{y} \in J$ è t.c. $b(\bar{y}) = 0$, allora la funzione costante $y(x) = \bar{y}$ è soluzione dell'equazione differenziale proposta su tutto $I$ (verifica immediata).

Quindi, ad ogni "zero" della funzione $b$ è associata una soluzione, costante, dell'equazione. D'altro canto, il teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy ci permette di dire che: se $\varphi$ è una soluzione dell'equazione, definita su un certo intervallo $S \subseteq I$, tale che in almeno un punto $x \in S$ è $b(\varphi(x)) \neq 0$, allora $b(\varphi(x))$ sarà sempre diverso da zero su $S$. Se così non fosse, ci sarebbe $\bar{x}$ t.c. $b(\varphi(\bar{x})) = 0$. Se chiamo $\bar{y}$ il valore $\varphi(\bar{x})$, allora il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = a(x)b(y) \\ y(\bar{x}) = \bar{y} \end{cases}$$

avrebbe due soluzioni distinte: la funzione $\varphi$ in questione e la funzione costantemente uguale ad $\bar{y}$.

Pertanto, se $\varphi$ è una soluzione su $S \subseteq I$:

- o è $b(\varphi(x)) = 0$ per ogni $x \in S$,

[1] Vedi la sezione 5 (Appendice), se necessario, per gli enunciati dei teoremi sulle equazioni differenziali che vengono citati.

- oppure $b(\varphi(x)) \neq 0$ per ogni $x \in S$.

Nel secondo caso si avrà sempre $b(\varphi(x)) > 0$ su tutto $S$ oppure $b(\varphi(x)) < 0$ su tutto $S$ (altrimenti si avrebbe una contraddizione con il teorema degli zeri).

Risolviamo ora effettivamente l'equazione differenziale (1). Per quanto detto sopra, ci limiteremo a cercare le soluzioni $\varphi$ tali che $b(\varphi(x)) \neq 0$ per ogni $x \in S$. Più precisamente, abbiamo che $\{\varphi(x) : x \in S\}$ sarà un intervallo $K$ contenuto in $J$ nel quale $b$ mantiene un segno costante.

Da

$$\varphi'(x) = a(x)b(\varphi(x)) \quad \forall x \in S,$$

segue:

$$\frac{\varphi'(x)}{b(\varphi(x))} = a(x) \quad \forall x \in S,$$

da cui:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{b(\varphi(x))} dx = \int a(x) dx \quad \forall x \in S.$$

Effettuiamo nell'integrale indefinito a primo membro la sostituzione $t = \varphi(x)$:

$$\left( \int \frac{dt}{b(t)} \right)_{t=\varphi(x)} = \int a(x) dx \quad \forall x \in S.$$

Se le funzioni $A$ e $B$ sono due primitive, rispettivamente di $a$ su $S$ e di $1/b$ su $K$, si ha:

$$(B(t))_{t=\varphi(x)} = A(x) + c \quad \forall x \in S,$$

dove $c$ è una costante reale, e quindi:

$$B(\varphi(x)) = A(x) + c \quad \forall x \in S. \tag{3}$$

Ma $B'(t) = 1/b(t)$ conserva su $K$ segno costante, pertanto $B$ è strettamente monotona su $K$ e quindi invertibile. Se $B^{-1}$ indica l'inversa di $B$, si ha:

$$\varphi(x) = B^{-1}(A(x) + c) \quad \forall x \in S. \tag{4}$$

Con il procedimento sopra indicato si ottengono tutte le soluzioni dell'equazione a variabili separabili, anche se occorre tenere presente che bisognerà usare tante funzioni inverse di $B$ quanti sono gli intervalli su cui $b$ ha segno costante.

Abbiamo quindi trovato la "formula" che descrive la soluzione $\varphi$ su $S$. Da un punto di vista "pratico", le principali difficoltà nella risoluzione effettiva di una equazione a variabili separabili sono:

- trovare $A$ e $B$. Non sempre è facile trovare primitive; potremmo addirittura trovarci di fronte al caso di funzioni non elementarmente integrabili
- trovare $B^{-1}$. Anche se sappiamo che $B$ è invertibile, questo non vuol dire che sia facile descrivere l'inversa con una formula.

Nel paragrafo seguente vedremo anche esempi che mostrano questo tipo di difficoltà: vedi esempi 6, 7 e 8.

Nel caso in cui si abbia da risolvere un problema di Cauchy che, come (2), è associato ad una equazione a variabili separabili, si può procedere in due modi.

Un modo consiste nell'utilizzare la formula (3) che dà le soluzioni dell'equazione, da cui si ricava $c = B(y_0) - A(x_0)$; è importante ricordare che poi per passare alla forma esplicita (4) occorre usare l'inversa di $B$ sull'intervallo $K$ individuato dal fatto che contiene $y_0$.

Un altro modo consiste nel risolvere l'equazione usando l'integrazione definita.

Da:

$$\frac{\varphi'(x)}{b((\varphi(x))} = a(x) \qquad \forall x \in S,$$

segue:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(s)}{b((\varphi(s))} ds = \int_{x_0}^{x} a(s) ds \qquad \forall x \in S$$

(la lettera di integrazione è stata come al solito cambiata per evitare di fare confusione con la variabile $x$).

Anche qui, usiamo la sostituzione $t = \varphi(s)$:

$$\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \frac{dt}{b(t)} = \int_{x_0}^{x} a(s) ds \qquad \forall x \in S,$$

da cui:

$$B\left(\varphi(x)\right) - B\left(\varphi(x_0)\right) = A(x) - A(x_0) \qquad \forall x \in S.$$

Ovvero (ricordiamo che $\varphi(x_0) = y_0$):

$$B\left(\varphi(x)\right) = A(x) + B\left(y_0\right) - A(x_0) \qquad \forall x \in S.$$

Se poi $B^{-1}$ é l'inversa di $B$ sull'intervallo che contiene $y_0$:

$$\varphi(x) = B^{-1}\left(A(x) + B(y_0) - A(x_0)\right) \qquad \forall x \in S.$$

# 2 Esempi

Cominciamo con l'esempio più semplice (a dire il vero, l'esempio davvero più semplice lo faremo per ultimo: qui intendo dire che si tratta dell'esempio più semplice tra quelli che coinvolgono effettivamente quello che si intende essere una equazione differenziale).

**Esempio 1** Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Se $y_0 = 0$ la soluzione (massimale) è $\varphi(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Altrimenti (la teoria ci garantisce che il problema dato ha una ed una sola soluzione massimale, definita su tutto $\mathbb{R}$):

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

da cui (d'ora in poi ometto di ripetere: "$\forall x \in \mathbb{R}$")

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}\, ds = \int_{x_0}^{x} 1\, ds$$

effettuando la sostituzione $t = \varphi(s)$:

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dt}{t} = \int_{x_0}^{x} 1\, ds.$$

Se $y_0 > 0$, otteniamo:

$$\log t \Big|_{y_0}^{\varphi(x)} = t \Big|_{x_0}^{x}$$

da cui:

$$\log \frac{\varphi(x)}{y_0} = x - x_0$$

$$\frac{\varphi(x)}{y_0} = \exp(x - x_0)$$

$$\varphi(x) = y_0 \exp(x - x_0)$$

Analogamente se $y_0 < 0$:

$$\log -t\Big|_{y_0}^{\varphi(x)} = t\Big|_{x_0}^{x}.$$

Da cui:

$$\log \frac{\varphi(x)}{y_0} = x - x_0.$$

A questo punto, naturalmente i calcoli sono identici a quelli appena visti.

Possiamo raggruppare i risultati trovati in un'unica formula, che vale per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = y_0 \exp(x - x_0)$$

■

**Esempio 2** Data la funzione $a : I \to \mathbb{R}$, continua sull'intervallo aperto e non vuoto $I$ di $\mathbb{R}$, consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = a(x)y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Come per l'esempio precedente, se $y_0 = 0$ la soluzione (massimale, definita su $I$) è $\varphi(x) = 0$ per ogni $x \in I$.

Altrimenti (ricordo che la teoria mi garantisce che la soluzione massimale è unica e definita su tutto $I$):

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = a(x) \qquad \forall x \in I,$$

da cui (come fatto nell'esempio precedente, ometto di ripetere sempre "$\forall x \in I$")

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)}\, ds = \int_{x_0}^{x} a(s)\, ds.$$

Effettuando la sostituzione $t = \varphi(s)$:

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dt}{t} = \int_{x_0}^{x} a(s)\, ds.$$

Se $y_0 > 0$, otteniamo:

$$\log t\Big|_{y_0}^{\varphi(x)} = \int_{x_0}^{x} a(s)\, ds$$

Da cui:

$$\log \frac{\varphi(x)}{y_0} = \int_{x_0}^{x} a(s)\, ds$$

$$\frac{\varphi(x)}{y_0} = \exp(\int_{x_0}^{x} a(s)\, ds)$$

$$\varphi(x) = y_0 \exp(\int_{x_0}^{x} a(s)\, ds)$$

I calcoli sono analoghi per $y_0 < 0$. Anche in questo esempio, come nel precedente, possiamo esprimere la soluzione del problema di Cauchy con la formula (valida per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$):

$$\varphi(x) = y_0 \exp(\int_{x_0}^{x} a(s)\, ds)$$

■

**Esempio 3** Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Abbiamo:

$$\varphi'(x) = 1 + \varphi^2(x) \qquad \forall x \in S,$$

Cioè:

$$\frac{\varphi'(x)}{1 + \varphi^2(x)} = 1 \qquad \forall x \in S,$$

da cui

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(x)}{1 + \varphi^2(x)}\, ds = \int_{x_0}^{x} 1\, ds$$

effettuando la sostituzione $t = \varphi(s)$:

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{dt}{1 + t^2} = \int_{x_0}^{x} 1\, ds$$

$$\arctan t \Big|_{y_0}^{\varphi(x)} = x - x_0$$

Da cui:

$$\arctan(\varphi(x)) - \arctan y_0 = x - x_0$$

$$\varphi(x) = \tan(\arctan y_0 + x - x_0)$$

Notare che si ha il fenomeno della "esplosione in tempo finito". La soluzione massimale non è definita su tutto $\mathbb{R}$ ma su un sottointervallo proprio. ■

**Esempio 4** Consideriamo l'equazione $y' = \sin y$.

E' $\sin(y) = 0$ se e solo se $y = k\pi$. Quindi le funzioni costanti $y(x) = k\pi$ sono soluzioni dell'equazione $\forall k \in \mathbb{Z}$. Per il resto, abbiamo:

$$\frac{y'(x)}{\sin(y(x))} = 1$$

da cui:

$$\int \frac{y'(x)}{\sin(y(x))}\, dx = \int 1\, dx$$

Pertanto:

$$\left(\int \frac{dt}{\sin(t)}\right)_{t=y(x)} = x + c$$

Se $y(x) = t \in ]2h_0\pi, (2h_0+1)\pi[$, abbiamo:

$$\left[\log\left(\tan\frac{t}{2}\right)\right]_{t=y(x)} = x + c$$

$$\left[\log\left(\tan\frac{y(x)}{2}\right)\right] = x + c$$

$$\tan\left(\frac{y(x)}{2}\right) = e^{x+c}$$

$$y(x) = 2\left(\arctan(e^{x+c}) + h_0\pi\right)$$

(è opportuno tenere presente che l'inversa di $v = \tan u$ in $]h_0\pi, h_0\pi + \pi/2[$ è $u = \arctan v + h_0\pi$).

Analogamente, se $y(x) = t \in ](2h_0 - 1)\pi, 2h_0\pi[$, si ha:

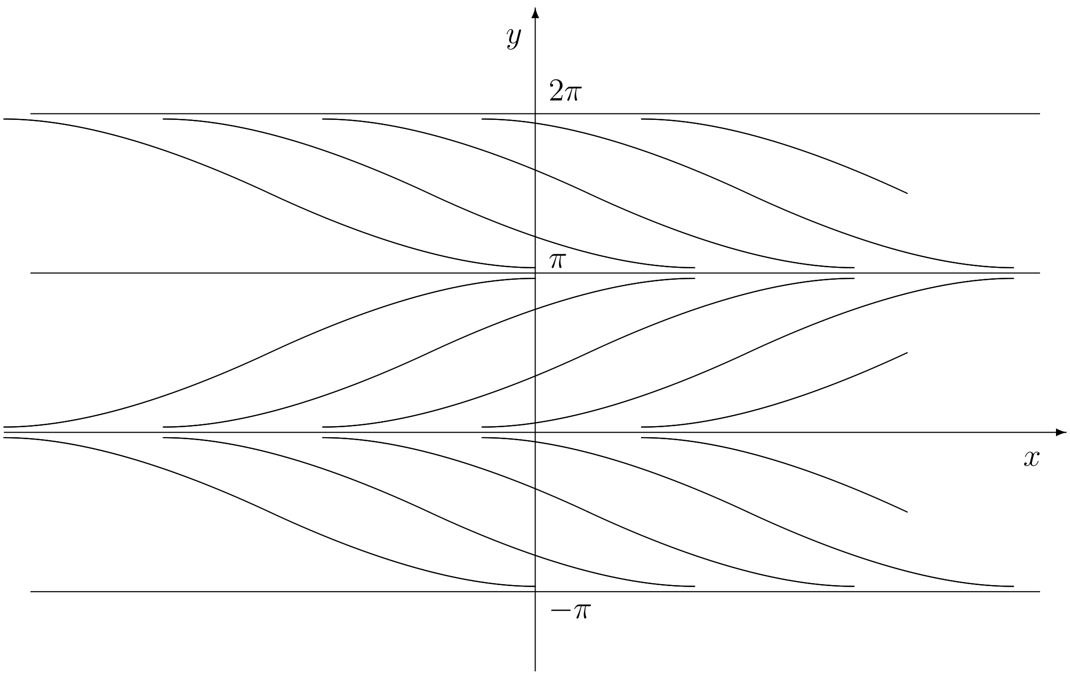
$$\left[\log\left(-\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right]_{t=y(x)} = x + c$$

$$\left[\log\left(-\tan\left(\frac{y(x)}{2}\right)\right)\right] = x + c$$

$$-\tan\left(\frac{y(x)}{2}\right) = e^{x+c}$$

$$y(x) = 2\left(\arctan(-e^{x+c}) + h_0\pi\right)$$

Graficamente, le soluzioni sono:




■

Osserviamo che, essendo l'equazione differenziale *autonoma* (cioè il secondo membro $f(x,y)$ non dipende esplicitamente dalla variabile indipendente $x$), il grafico risulta invariante rispetto a traslazioni nel senso delle $x$.

**Esempio 5** Utilizziamo ancora l'equazione appena risolta, stavolta considerando un problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sin y \\ y(0) = \frac{11}{2}\pi \end{cases}$$

Seguendo la prima strada: $y(0) = y_0 = \frac{11}{2}\pi \in ](2h_0 - 1)\pi, 2h_0\pi[$ per $h_0 = 3$.
Quindi, $\log\left(-\tan(\frac{11}{4}\pi)\right) = 0 + c$.
Ovvero: $c = \log\left(-\tan(\frac{-\pi}{4})\right) = \log(\tan\frac{\pi}{4}) = \log 1 = 0$.
Pertanto, $y(x) = 2\left(\arctan(-e^{x}) + 3\pi\right)$.

Seguendo la seconda strada:

$$\int_0^x \frac{y'(s)}{\sin(y(s))}\,ds = \int_0^x 1\,ds$$

Ovvero:

$$\int_{\frac{11}{2}\pi}^{y} \frac{dt}{\sin t} = x$$

Poiché $\sin \frac{11}{2}\pi < 0$, abbiamo:

$$\log(-\tan\frac{t}{2})]_{\frac{11}{2}\pi}^{y} = x$$

Ossia:

$$\log(-\tan\frac{y}{2}) = x + \log\left(-(\tan\frac{11}{4}\pi)\right)$$

Cioè:

$$\log(-\tan\frac{y}{2}) = x$$

Ovvero:

$$\tan\frac{y}{2} = -e^x$$

Da cui

$$\frac{y}{2} = \arctan(-e^x) + 3\pi$$

Ovvero

$$y(x) = 2\,(arctan(-e^x) + 3\pi)$$

VERIFICA:

$$y(0) = 2\,(\arctan(-1) + 3\pi) = 2(-\frac{\pi}{4} + 3\pi) = \frac{11}{2}\pi$$

$$y'(x) = 2\frac{-e^x}{1+e^{2x}}$$

$$\sin y(x) = \sin\left[2(\arctan(-e^x) + 3\pi)\right]$$

Le ultime 2 equazioni DOVREBBERO ESSERE UGUALI!!!
Lo sono in effetti, basta usare la relazione

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\alpha/2}{1+\tan^2\alpha/2}$$

$$\sin(y(x)) = \frac{2\tan[\arctan(-e^x)+3\pi]}{1+\tan^2[\arctan(-e^x)+3\pi]} = \frac{2\tan[\arctan(-e^x)]}{1+\tan^2\arctan(-e^x)]} = \frac{-2e^x}{1+e^{2x}}$$

■

**Esempio 6** Risolvere:

$$y' = \exp(y^2)$$

La procedura ci richiede di trovare:

$$\int \frac{y'(x)}{\exp(y^2(x))}\,dx = \int 1\,dx,$$

ovvero:

$$\left(\int \exp(t^{-2})\,dt\right)_{t=y(x)} = x + c$$

Ma è noto che la funzione a primo membro non è elementarmente integrabile.
■

**Esempio 7** Risolvere:

$$y' = \exp(-x^2)y$$

Come visto nell'esempio 2, la soluzione è data da:

$$\varphi(x) = y_0\exp(\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds)$$

dove $a(s) = \exp(-s^2)$.

Quindi:

$$\varphi(x) = y_0\exp(\int_{x_0}^{x} \exp(-s^2)\,ds)$$

Ma, come nell'esempio 6, ci troviamo di nuovo di fronte alla funzione $\exp(-s^2)$ che non è elementarmente integrabile. ■

**Esempio 8** Risolvere:

$$y' = \frac{1}{1+\exp(y)}$$

La procedura ci richiede di trovare:

$$\int y'(x)(1+\exp(y(x)))\,dx = \int 1\,dx,$$

ovvero:

$$\left(\int 1+\exp(t)\,dt\right)_{t=y(x)} = x+c$$

Da cui:

$$y(x)+\exp(y(x)) = x+c$$

Dobbiamo quindi invertire la funzione $t \mapsto t+\exp(t)$. Essa è certamente invertibile su $\mathbb{R}$, ma la sua inversa non la possiamo esprimere con una formula "chiusa" che usi le funzioni elementari. ■

**Esempio 9** Questo è di fatto un problema di integrazione, ma naturalmente rientra nella teoria vista. Vediamo allora, per curiosità, cosa otteniamo.

$$\begin{cases} y' = a(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

La funzione $b$ è, s'intende, identicamente uguale ad 1. Pertanto non si annulla mai.

Supponiamo che sia $a : I \to \mathbb{R}$ continua, $I$ intervallo aperto e non vuoto di $\mathbb{R}$.

Visto che abbiamo un problema di Cauchy, seguiamo la strada vista in questo caso. Sia allora $\varphi : S \to \mathbb{R}$ la soluzione massimale del problema di Cauchy, che è definita su tutto l'intervallo $I$. Da (tutte le relazioni seguenti sono valide per ogni $x \in I$):

$$\varphi'(x) = a(x),$$

segue:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi'(s)\,ds = \int_{x_0}^{x} a(s)\,ds.$$

Usando la formula fondamentale del calcolo integrale:

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x} a(s)\,ds$$

ovvero:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} a(s)\,ds$$

o, anche:

$$\varphi(x) = y_0 + A(x) - A(x_0)$$

Dove $A$ è una primitiva di $a$ su $I$.

Insomma, per fortuna la soluzione di questo particolare problema di Cauchy non è altro che la funzione integrale di $a$, calcolata dal "punto iniziale" $x_0$, più $y_0$.

Cosa che sapevamo benissimo, dalla teoria dell'integrazione. ■

# 3 Il metodo urang-utang©

E' sciaguratamente diffuso, anche su libri di testo, un "metodo risolutivo" per le equazioni differenziali a variabili separabili che costituisce un'offesa all'intelligenza del lettore.

Tale metodo è stato da me battezzato urang-utang©. Perché questo nome? Non tanto per il fatto che sia un modo di indicare gli oranghi, nome d'altronde demodé[2], ma per la sua valenza onomatopeica. Mi dà una idea simile a quella di un elefante in un negozio di porcellane.

Vediamo un esempio, fra i mille che si potrebbero scegliere.

> Le equazioni a variabili separabili sono quelle che, posto $y' = (dy)/(dx)$ si possono scrivere nella forma tipica $g(y)dy = f(x)dx$ dove a primo membro è presente la sola variabile $y$ e a secondo membro solo la variabile $x$ (o viceversa).

Cosa vuol dire "forma tipica"? Si usa questo indegno trucco dialettico per nascondere il fatto che si è spezzata la notazione[3] $dy/dx$, che rappresenta la derivata prima di una funzione dei due "pezzi": numeratore e denominatore. Ma chi ha detto che sia possibile? La derivata non è stata certo definita come quoziente fra queste due quantità[4]! Si sta prendendo in giro il lettore.

E poi si dice: "$g(y)dy = f(x)dx$ dove a primo membro è presente la sola variabile $y$ e a secondo membro solo la variabile $x$".

La presa in giro continua. La variabile $y$ era usata per indicare una **funzione** incognita della $x$. Ora è diventata una variabile indipendente? Miracoli della faccia tosta.

Andiamo avanti, mica è finita qui.

> Sia ad esempio
>
> $y' - 2xe^{-y} = 0$
>
> si può scrivere
>
> $(dy)/(dx) = 2xe^{-y}$ o anche $e^y dy = 2xdx$
>
> Integrando ambo i membri si perviene all'integrale generale
>
> $e^y = x^2 + c$, cioè $y = \log|x^2 + c|$

---

[2] Anche se un'altra sensazione che provo leggendo certe pagine orribili è un acre odore d'antan...

[3] Nota minima: chissà perché vengono usate le parentesi, nel testo citato.

[4] Né si sta usando l'analisi non standard, che permetterebbe di dare un senso a questo tipo di operazione. Peccato che introdurre l'analisi non standard per giustificare questo metodo risolutivo per le equazioni a variabili separabili è come ammazzare una mosca con un cannone. E, poi, non giustificherebbe il passo successivo...

Allora, molto interessante. Si dice:

"$e^y dy = 2xdx$. Integrando ambo i membri si perviene all'integrale generale $e^y = x^2 + c$"

Veramente magico. Se si dice "integrando entrambi i membri si perviene...", visto che alla fine si mette una uguaglianza, si intende dire che le due funzioni: $e^y$ e $2x$ sono uguali. Sennò come si può, dico, solo immaginare che i loro integrali siano uguali??

Ma sono due funzioni espresse mediante **variabili diverse**! Cosa si sta assumendo, quindi? Che $e^y = 2x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$? Mi sembra l'unico sensato, possibile tentativo di dare un senso a queste affermazioni a capocchia che si susseguono.

Ma, prendendo $x = 1$ e $y = 1$, si ottiene che $e = 2$. Bel risultato, non c'è che dire.

Insomma, non c'è verso di dare un senso a queste scempiaggini.

Ancora due chicche, di cui l'ultima è specifica di questo testo[5]: "$e^y = x^2 + c$, cioè $y = log|x^2 + c|$". Naturalmente qui si sta assumendo che l'uguaglianza di partenza sia una relazione fra le variabili $x$ ed $y$ che definisce $y$ come funzione di $x$ (non male, questo va e vieni fra interpretazioni inconciliabili!). Questa disinvolta gestione delle variabili la si incontra in ogni applicazione del metodo urang-utang©. Ultimo colpo di genio, specifico di questo testo: $y = log|x^2 + c|$. Da dove spunta fuori quel valore assoluto? Dubito che qualcuno possa essere in grado di spiegarlo. Visto che $e^y = t$ è equivalente[6], come tutti sanno, a $y = \log t$, chissà da quale cappello a cilindro spunta fuori il valore assoluto, ciliegina su una torta di cui non si sentiva il bisogno (né della ciliegina, né tanto meno della torta...).

**Esempio 10** Vediamo un esempio, che mi era stato proposto a suo tempo per confrontare il metodo urang-utang© con il metodo corretto che ho illustrato in questi appunti.

Consideriamo l'equazione $xy' - y = 0$ (equazione ordinaria del primo ordine lineare omogenea e quindi per trovare l'integrale generale si potrebbe applicare o il metodo della variazione della costante arbitraria (Lagrange) o la formuletta risolutiva). Tuttavia, essa è anche a variabili separabili.

Vediamo allora i due metodi.

1. **urang-utang©**

$$x\frac{dy}{dx} = y$$

[5] Ma si tratta di una ulteriore sconcezza diffusa, in versioni più o meno simili a questa.

[6] L'equivalenza è valida per ogni $y \in \mathbb{R}$ e per ogni $t > 0$.

$$\frac{x}{dx} = \frac{y}{dy}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{1}{y}\, dy$$

$$\log x = \log y + \log c$$

anziché $c$ la costante la chiamo $\log c$, per comodità; infine
$x = yc$, o analogamente, detto $c' = \frac{1}{c}$, $y = c'x$.

Commento di chi ha proposto l'esempio: "ora sicuramente i passaggi fatti sono un po' arditi (passare agli inversi è rischioso perché si potrebbero perdere - per via dell'esistenza delle frazioni - degli integrali singolari), tuttavia - cosa sbalorditiva - il risultato torna. Tu come avresti fatto a risolvere $xy' - y = 0$?"

2. **Un esempio di soluzione corretta**.

$xy' - y = 0$ è come dire (per $x \neq 0$): $y' = y/x$. Ora, $b(y) = y$ si annulla evidentemente per $y = 0$. Quindi abbiamo la soluzione costante $y = 0$, sugli intervalli $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$. Ovviamente si può prolungare a una soluzione identicamente nulla dell'equazione data, su tutto $\mathbb{R}$.

Procediamo, lavorando sull'intervallo $]-\infty, 0[$ (il caso $]0, +\infty[$ è analogo).

Se $\phi(x)$ è una soluzione dell'equazione data su $]-\infty, 0[$, diversa da quella identicamente nulla, sappiamo che essa non si potrà mai annullare su $]-\infty, 0[$. Quindi, la relazione: $\phi'(x) = \phi(x)/x$ (valida per tutte le $x$ appartenenti all'intervallo $I$ su cui è definita $\phi$), è equivalente a:

$$\frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \frac{1}{x}$$

Preso $x_0 \in I$, ed $x \in I$, otteniamo (come detto nella illustrazione generale, integrando due funzioni uguali sullo stesso intervallo si ottengono risultati uguali):

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\phi'(t)dt}{\phi(t)} = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t}$$

Facciamo la sostituzione: $z = \phi(t)$:

$$\int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{dz}{z} = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t}$$

Da cui (ricordo che siamo su $]-\infty, 0[$, pertanto $\log(-t)$ è una primitiva di $1/t$):

$$\int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{dz}{z} = \log(-t)\Big|_{x_0}^{x}$$

Visto che $\phi$ non si annulla mai, essa sarà o sempre positiva o sempre negativa. Supponiamo di essere nel primo caso. Abbiamo allora che una primitiva di $1/z$ su un sottointervallo della semiretta positiva è $\log z$:

$$\log z\Big|_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} = \log(-t)\Big|_{x_0}^{x}$$

Quindi:

$$\log(\phi(x)) - \log(\phi(x_0)) = \log(-x) - \log(-x_0)$$

Ovvero:

$$\log(\frac{\phi(x)}{\phi(x_0)}) = \log(\frac{x}{x_0})$$

Da cui:

$$\frac{\phi(x)}{\phi(x_0)} = \frac{x}{x_0}$$

E quindi:

$$\phi(x) = \frac{\phi(x_0)}{x_0}x$$

Questa è la soluzione del problema di Cauchy dato dall'equazione differenziale assegnata e dalla condizione di assumere valore $\phi(x_0)$ in $x_0$.

Direi che ci si può fermare qui. E' facile verificare come, al variare di $\phi(x_0)$, possiamo ottenere l'integrale generale dell'equazione data su $]-\infty, 0[$. Come detto, calcoli analoghi si possono fare per l'intervallo $]0, +\infty[$. Volendo, si può studiare cosa avviene in 0, usando gli integrali generali trovati a sinistra e a destra di 0. Ma questo esula dall'argomento urang-utang©. ■

## 3.1 Wikipedia e il metodo urang-utang©

Secondo voi, dove si può andare a caccia di urang-utang©?

Beh, una "prima scelta" è sicuramente la amata, odiata, vituperata, magnifica Wikipedia. E, in effetti, ho trovato un urang-utang©, direi anche bello grosso. Alla pagina **Metodi di soluzione analitica per equazioni differenziali ordinarie**

Vediamo. Ma, prima, una precisazione: Wikipedia non può certo essere paragonata a un manuale universitario, avendo altre finalità. Cosa di cui terrò conto, nell'elaborare le mie obiezioni ed in ogni caso mi limiterò a mettere in evidenza le manchevolezze più eclatanti.

Ultima precisazione. Visto che Wikipedia è una realtà mutevole, in continuo divenire, preciso che la versione cui faccio riferimento è quella che era disponibile alla data del 22 agosto 2008, ore 17:00. Questa versione, per le caratteristiche di Wikipedia (riconducibili alla licenza GFDL), dovrebbe rimanere sempre disponibile al link: Versione del 17 agosto 2008, ore 11:10. Dato che in fondo in fondo sono buono, ho cercato di risistemare la pagina. Quindi nella versione corrente niente urang-utang©, a meno che qualcuno, preoccupato che non si estinguano, li abbia reintrodotti.

Cominciamo. Le parti che cito da Wikipedia saranno evidenziate in blu.

### Equazioni differenziali a variabili separabili

Sono tutte le equazioni differenziali riconducibili alla forma:

$$\frac{y'}{h(y)} = a(x)$$

Cominciamo bene! Nessuna preoccupazione per quella $h(y)$ a denominatore? *Nulla* viene detto.

Poiché $y'$ è uguale a $\frac{dy}{dx}$, possiamo scrivere allora

A dire il vero, sarebbe più corretto dire che sono *due notazioni diverse per indicare la stessa cosa*, ma non stiamo a sottilizzare...

$$\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = a(x)$$

Quindi si può integrare, ottenendo

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int a(x)\,dx$$

Abilità? Fortuna? Non si sente l'urlo dello urang-utang©. In effetti, il passaggio più malsano resta nascosto e si può dare una doppia interpretazione (anche se, visto il contorno, propendo per il "pensare male"):
- interpretazione buona: viene usato correttamente il teorema di integrazione per sostituzione.

- interpretazione cattiva: si fa la solita schifezza. Ovvero, si “moltiplica” per $dx$ e si integra, a sinistra in $dy$ e a destra in $dx$ (sic!)

La soluzione è quindi

*La* soluzione? Beh, con tutta la generosità possibile, si sente la mancanza di qualche “costante arbitraria”!

$$H(y) = A(x)$$

dove $H$ è una primitiva di $\frac{1}{h}$ e $A$ di $a$. E' una soluzione implicita, da cui si ricava una soluzione esplicita se $H$ è invertibile, altrimenti si può ricorrere all'analisi numerica.

Ovviamente per garantire l'esistenza di primitive sarebbe bene assumere qualche ipotesi sulle funzioni integrande (diciamo la continuità, magari). Ma su questi “dettagli”, come detto, sorvolo.

Mi colpisce però la chiosa “se $H$ è invertibile”, in quanto sappiamo che, facendo i conti per bene, si sa che $H$ è invertibile.

Ma la cosa raccapricciante è “se $H$ è invertibile, altrimenti si può ricorrere all'analisi numerica”. Ohibò! Qui siamo davanti ad una ingenuità veramente *molto grave*. Devo dire che, pur con tutto il rispetto per coloro che si occupano di analisi numerica, a me non risulta che essa possa fare miracoli. Se una funzione non è invertibile, non la si può invertire: né con l'analisi numerica né con riti voodoo.

Evidentemente chi aveva scritto quelle righe aveva in mente altro: la invertibilità di $H$ “mediante formule”. Peccato che questa confusione sia inaccettabile anche per le finalità di Wikipedia.

La pagina contiene anche un esempio: la soluzione di:

$$y' = \frac{\cos(x)}{\sin(y) + 1}$$

Non perdo tempo su questo esempio (però osservo che sarebbe stato meglio fare prima un altro esempio, più semplice). Noto che viene detto, a proposito della funzione $y \mapsto y - \cos(y)$, che non è invertibile: ovviamente questa affermazione è figlia di quanto si è notato sopra e quindi non insisto su questo. Noto piuttosto che nell'esempio spunta fuori una costante di integrazione, alla faccia della coerenza fra teoria ed esempio. Interessante è quello che segue:

... non è invertibile. Ma se espandiamo in serie di MacLaurin $\cos(y)$ otteniamo

Buona l'idea di ricorrere alla serie di MacLaurin (o Maclaurin: vedi Wikipedia inglese per la "ortografia"), tuttavia quello che si usa in realtà è il polinomio di MacLaurin di secondo grado. E, allora, se si usa il polinomio ci sarà un errore di approssimazione, mentre viene buttato lì un "uguale" che invece richiederebbe riflessioni non banali. Ma questo non fa parte della tradizione di precisione degli urang-utang©.

Se uno si è ingollato tutto questo, il resto è meno indigesto. Anche se, di fronte ad un $\pm$ davanti ad una radice, si dice che il segno lo si sceglie a seconda delle condizioni iniziali. Interessante, visto che di condizioni iniziali non ce n'erano e magari uno potrebbe rimanere per sempre bloccato a chiedersi cosa possa fare se ha una equazione differenziale da risolvere, anziché un problema di Cauchy.

## 3.2 Trattiamoli con discre(tizza)zione

Tanto per cambiare, partiamo da una equazione differenziale a variabili separabili. Anzi, da un problema di Cauchy ad essa associato:

$$\begin{cases} y' &= a(x)b(y) \\ y(\bar{x}) &= \bar{y} \end{cases} \tag{5}$$

Supponiamo di essere in un caso molto tranquillo (lo scopo qui è solo di vedere se e come una idea può funzionare, poi i ghirigori se uno li vuol fare li fa). Suppongo allora che le funzioni $a$ e $b$ siano definite e continue su $\mathbb{R}$. Non solo, per $b$ assumo anche che sia di classe $C^1(\mathbb{R})$ e che non si annulli mai (per esempio, che sia sempre strettamente positiva).

Come ben sappiamo, il metodo urang-utang© funziona così[7]:

Si riscrive $y' = a(x)b(y)$ in questo modo: $\frac{dy}{dx} = a(x)b(y)$, dopo di che si interpreta il primo membro come se fosse una frazione (sic!) e si ottiene: $dy = a(x)b(y)dx$, e poi si divide per $b(y)$ per separare le variabili, ottenendo: $\frac{dy}{b(y)} = a(x)dx$, etc.

Allora, proviamo a prendere sul serio una idea che possiamo immaginare stia

[7] Per i dettagli, vedasi la sezione 3.

dietro l'uso di un simile metodo: vedere la derivata come rapporto fra due quantità molto piccole[8].

Facciamo quindi una operazione molto banale: **sostituiamo alla derivata il rapporto incrementale**. Ovvero[9] considero $x_0 = \bar{x}$ e mi vado a prendere un $x_1$ "abbastanza vicino" ad $x_0$. Quanto vicino? Ne parleremo dopo. Per ora mi basta prendere un $x_1$ maggiore strettamente[10] di $x_0$ e sostituire appunto alla derivata in $x_0$ il rapporto incrementale, valutato fra $x_0$ ed $x_1$. Insomma, sostituisco l'equazione data con:

$$\frac{y(x_1) - y(\bar{x})}{x_1 - \bar{x}} = a(\bar{x})b(y(\bar{x}))$$

ovvero:

$$\frac{y(x_1) - y(x_0)}{x_1 - x_0} = a(x_0)b(y(x_0))$$

Attenzione: per chi non se ne fosse accorto, c'è un imbroglio. Provate a trovarlo, poi se non lo "vedete" girate pure pagina.

[8]Lo so che un po' di gente al mondo pensa che si tratti di una frazione con numeratore e denominatore infinitesimi, ma non è colpa (solo...) mia se la matematica al momento non riesce a offrire un quadro coerente in cui questa affermazione abbia senso. Eccettuati ovviamente i cosiddetti "modelli non standard" della matematica: in breve, la cosiddetta analisi non standard. Ma sono convinto che la quasi totalità di chi pensa alla derivata come rapporto tra infinitesimi non è in grado di utilizzare l'analisi non standard! Ammesso che sappia che esista.

[9]Sfrutto il problema di Cauchy perché è comodo usarlo, già che c'è, ma si potrebbe lavorare tranquillamente anche solo sulla equazione differenziale.

[10]Lo potrei prendere anche minore strettamente, non fa nessuna differenza. E' solo comodità ed abitudine.

L'imbroglio è questo: l'equazione differenziale è una relazione che vogliamo sia vera "per ogni $x$". Ricordo[11] che $y' = a(x)b(y)$ è solo un modo abbreviato e convenzionale di dire che cerchiamo una funzione $\phi$, definita su un intervallo (chiamiamolo $I$), tale che $\phi'(x) = a(x)b(\phi(x))$ per ogni $x \in I$.

Quindi ho sostituito una relazione che voglio valga per infiniti $x$ con una relazione in cui sono coinvolti solo due punti!!! Anzi, è coinvolto un punto $\bar{x}$ che già avevamo e solo uno "nuovo", ovvero $x_1$.

Ora, uno può sperare di essere fortunato, ma qui si sta pretendendo troppo dalla sorte. Se vogliamo fare qualcosa di minimamente avvicinabile alla idea di equazione differenziale, non dobbiamo limitarci a prendere $x_1$, ma dobbiamo prendere una bella manciata di punti: $x_2$, $x_3$, $\ldots$, $x_n$, $x_{n+1}$ (o magari infiniti? Boh, al momento non preoccupiamoci troppo. Pendiamone "tanti", poi vedremo se ci basteranno).

Ok, ma cosa ne facciamo di tutti questi punti? Semplice, "ripartiamo" da $x_1$ con un nuovo rapporto incrementale:

$$\frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_1)b(y(x_1))$$

e andiamo avanti fino a:

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = a(x_n)b(y(x_n))$$

Bene, che ne facciamo di tutte queste uguaglianze?

Ovvio: "separiamo le variabili" in ognuna delle relazioni scritte:

$$\begin{aligned}
\frac{y(x_1) - y(x_0)}{b(y(x_0))} &= a(x_0)(x_1 - x_0) \\
\frac{y(x_2) - y(x_1)}{b(y(x_1))} &= a(x_1)(x_2 - x_1) \\
&\ldots \\
\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{b(y(x_n))} &= a(x_n)(x_{n+1} - x_n)
\end{aligned}$$

Siamo quasi arrivati. Semplicemente, ora riscrivo le relazioni sopra in modo più succinto[12], chiamando $y_n$ quello che è $y(x_n)$.

Otteniamo così:

$$\frac{y_1 - y_0}{b(y_0)} = a(x_0)(x_1 - x_0)$$

[11] Vedasi, per dettagli su questo: `http://www.diptem.unige.it/patrone/equazioni_differenziali_intro.pdf`.

[12] Per risparmiare bit, gesso, inchiostro, quello che volete voi. O è il caso di diffidare?

$$\frac{y_2 - y_1}{b(y_1)} = a(x_1)(x_2 - x_1)$$
$$\dots$$
$$\frac{y_{n+1} - y_n}{b(y_n)} = a(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

Non ci resta che sommare membro a membro, e otteniamo:

$$\frac{y_1 - y_0}{b(y_0)} + \ldots + \frac{y_{n+1} - y_n}{b(y_n)} = a(x_0)(x_1 - x_0) + \ldots + a(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

Visto che bravi che siamo stati? Abbiamo ottenuto due somme di Cauchy[13]! A sinistra è una somma di Cauchy che riguarda la integrazione della funzione $\frac{1}{b(y)}$ sull'intervallo che va da $y_0$ a $y_{n+1}$. A destra, una somma di Cauchy per la funzione $a(x)$ da $x_0$ a $x_{n+1}$.

A questo punto non c'è alto da fare che "ispessire" ("raffinare", per i raffinati) la partizione e al limite si ottiene la solita cosa:

$$\int_{\bar{y}}^{Y} \frac{1}{b(y)}\, dy = \int_{\bar{x}}^{X} a(x)\, dx$$

Stupendo. Nessun trucco. Ovvio che poi dovrà passare un matematico a spolverare e sistemare la chincaglieria, ma direi che abbiamo seguito una procedura che:

- segue da molto vicino quello che si fa con il metodo urang-utang© (ho davvero diviso!!!);
- sembra avere una sua dignità;
- è vicina al "sentimento diffuso" (dei fisici, degli ingegneri...) che dopotutto i $dx$ sono degli incrementi piccoli (vabbè, piccolissimissimerrimi) e sarebbe ora di smetterla di perdere tempo con le paturnie dei matematici.

Ultima cosa. Chi sono $X$ ed $Y$? Diciamo che $[\bar{x}, X]$ è l'intervallo sul quale si decide di lavorare e che $Y = y(X)$.

[13] Per chi non lo sapesse, data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, data una partizione $P = (x_0, \ldots, x_n)$ di $[a, b]$, data una $n$-pla di punti $\Xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ di t.c. $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, si dice somma di Cauchy per $f$, associata a $P$ e a $\Xi$: $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Con le somme di Cauchy si può realizzare un approccio alla integrazione di funzioni che risulta essere equivalente a quello nel senso di Riemann.

Spendendo due parole in più: possiamo immaginare di fissare un intervallo $[\bar{x}, X]$ di $\mathbb{R}$ e risolvere (approssimativamente) l'equazione a variabili separabili su questo intervallo. Quindi, ritornando alla scelta di $x_1$, "abbastanza vicino a $x_0$" che avevo lasciato in sospeso, l'idea è semplicemente quella di suddividere $[\bar{x}, X]$ in tanti intervalli, usando $x_0 = \bar{x}$, $x_1$, ..., $x_n = X$. E, ovviamente, più ne prendiamo migliore sarà (speriamo) l'approssimazione che otteniamo.

# 4 Bibliografia

Indico qui, in ordine strettamente decrescente di mie preferenze, tre ottimi riferimenti sulle equazioni differenziali.

Brauer, Fred, e John A. Nohel: *Ordinary Differential Equations: a first course*, Benjamin, Reading (MA, USA), 1973.

Pontryagin, Lev Semenovich: *Ordinary Differential Equations*, Addison Wesley, Reading (MA, USA), 1962.

Braun, Martin: *Differential Equations and their Applications. An introduction to applied mathematics*, Springer, New York, 1978.

# 5 Appendice

La trattazione fatta utilizza risultati e terminologie di carattere generale per le equazioni differenziali. Raccolgo qui (senza dimostrazioni) i risultati e le definizioni di cui mi sono servito.

Premettiamo un po' di terminologia. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$. Diremo che $(\overline{x}, \overline{y})$ é *interno* ad $A$ se esiste $\rho > 0$ tale che $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-\overline{x})^2 + (y-\overline{y})^2} < \rho\} \subseteq A$.
Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$, diremo che $A$ è un *aperto* se *ogni* suo punto è un punto interno. Cioè, se per ogni $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$ esiste $\rho > 0$ tale che $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-\overline{x})^2 + (y-\overline{y})^2} < \rho\} \subseteq A$.

Ci occuperemo del seguente problema di Cauchy, dove $f : A \to \mathbb{R}$ ed $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è aperto e non vuoto:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{6}$$

Diremo che una funzione $\varphi$, definita su un intervallo aperto e non vuoto $I$, è *soluzione* di (6) se:

- $(x, \varphi(x)) \in A$ per ogni $x \in I$
- $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ per ogni $x \in I$

Ci serve anche sapere cosa si intende per "soluzione massimale" di (6).

**Definizione 1** *Siano $\varphi : I \to \mathbb{R}, \psi : J \to \mathbb{R}$ (con $I, J$ intervalli aperti non vuoti*[14]*) due soluzioni di (6). Diciamo che $\psi$ è un* prolungamento proprio *di $\varphi$ se:*

- *$I \subseteq J$, con $I \neq J$,*
- *$\psi |_I = \varphi$.*

*Diciamo che una soluzione di (6) è una soluzione massimale se non c'è alcun'altra soluzione che ne sia un prolungamento proprio.*

Notiamo che, usualmente, quando si parla di "soluzione di (6)" senza specificare su quale intervallo sia definita, si intende riferirsi alla soluzione massimale.

**Teorema 1** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A$ aperto e non vuoto. E sia $(x_0, y_0) \in A$.*

*Dato il problema di Cauchy (6), se $f$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sono continue*[15] *in $A$, allora:*

- *esiste un* intervallo *$I$ aperto, contenente $x_0$, sul quale è definita una ed una sola funzione che sia soluzione di (6)*
- *il problema (6) ha una ed una sola soluzione massimale*

Ricordo infine che la soluzione massimale di un problema di Cauchy associato ad una equazione differenziale lineare, i cui coefficienti siano funzioni continue su un intervallo aperto e non vuoto $I$, è definita su tutto $I$.

[14] Mi si perdoni lo sproloquio. Un intervallo viene detto degenere se è vuoto o contiene un solo punto. Pertanto, un intervallo non degenere contiene almeno due punti, e pertanto ne contiene infiniti. Se un intervallo è aperto e non vuoto, allora è non degenere. Insomma: dire che questi $I$ e $J$ sono intervalli "come si deve", cioè non degeneri, visto che sono aperti è come dire che sono non vuoti.

[15] Sarebbe sufficiente la continuità di $f$ ed una appropriata condizione di lipschitzianità, sempre per $f$, rispetto alla variabile $y$, ma per questo ed altro (dimostrazioni comprese!) rinvio ai libri citati in Bibliografia o a un qualunque buon testo che si occupi di equazioni differenziali.

# 6 Ringraziamenti

Chiudo ringraziando gli utenti Paolo90 e gugo82 del forum di Matematicamente.it per i loro contributi e suggerimenti. Un ringraziamento va anche al mio proto Kroldar, ed a VINX89 per avermi indotto a scrivere la sezione 3.2. Ringrazio anche "cristina" da Yahoo! Answers per avermi indotto a scrivere le iniziali "Note per il lettore".