Funzioni uguali hanno la stessa derivata, ma...

Appunti a cura di
Fioravante PATRONE

versione del 6 agosto 2012

Indice

Note per il lettore
Questi appunti sono stati scritti a seguito di una discussione avviata, sul forum di "matematicamente.it", dall'utente *lisdap*.
Hanno lo scopo di chiarire alcuni aspetti elementari che la protervia di alcuni autori di libri di fisica rende inutilmente oscuri.

Link vari:

Fioravante PATRONE

ASD Scuderia La Bellaria

Decisori (razionali) interagenti

Equazioni differenziali e urang-utang©

E-mail: patrone@diptem.unige.it

1 Le cose fondamentali

Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Supponiamo che esista $\delta > 0$ t.c. $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Allora, ovviamente:
- f è derivabile in x_0 se e solo se lo è g
- se una delle due funzioni è derivabile, allora (lo è anche l'altra per quanto appena detto e) $f'(x_0) = g'(x_0)$

La dimostrazione di quanto affermato è banale. L'ipotesi fatta ci permette di garantire che il rapporto incrementale di f è uguale al rapporto incrementale di g in tutto l'intorno $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ di x_0 (eccetto x_0, ovviamente, visto che il rapporto incrementale in x_0 non è definito). Pertanto, anche il limite di uno di questi rapporti incrementali esisterà se e solo esisterà quello dell'altro. E, nel caso in cui uno esista, i due limiti coincideranno.

In realtà nelle ipotesi date si può fare di meglio, ovvero osservare che $f'(x) = g'(x)$ per ogni $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ in cui una delle due funzioni sia derivabile. Infatti, se prendiamo $\bar{x} \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, abbiamo che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in]\bar{x} - \bar{\delta}, \bar{x} + \bar{\delta}[$, dove $\bar{\delta} = \delta - |\bar{x} - x_0|$.

Una applicazione interessante di questo fatto la si ha, ad esempio, con l'analisi del moto circolare (non necessariamente uniforme!). Supponiamo di avere un moto che si svolge sulla circonferenza di centro l'origine e di raggio 1. Allora, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $x^2(t) + y^2(t) = 1$. Visto che la funzione a primo membro coincide con la funzione costante 1, e visto che quest'ultima è ovviamente derivabile, anche la funzione a primo membro lo sarà e la sua derivata varrà 0. Questo è un fatto VERO, ovvia conseguenza delle banali considerazioni fatte sopra.

Da questo fatto NON possiamo dedurre che: $2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$. Si noti che questa formula è equivalente a dire che $(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) = 0$. Ovvero che il vettore posizione è sempre perpendicolare al vettore velocità. Risultato carino, interessante, ma FALSO se non facciamo ulteriori ipotesi. E rimane falso anche se è scritto su autorevoli manuali di fisica.

Una ipotesi che ci permette di concludere quanto desisderato è che le funzioni $x(t)$ ed $y(t)$ siano derivabili (diciamo su tutto $\mathbb{R}$, per comodità). Se $x(t)$ è derivabile, allora lo è anche $x^2(t)$, in quanto funzione composta di due funzioni derivabili: la funzione "elevamento alla seconda potenza" e la funzione $x(t)$ appunto. Non solo, essendo derivabili le funzioni "componenti", possiamo utilizzare la formula di derivazione delle funzioni composte: la derivata di $x^2(t)$ sarà $2x(t)x'(t)$. E quindi otteniamo quanto voluto.

E' ovvio dove stia l'inghippo: basta pensare a un moto circolare di un punto che saltelli qua e là. In questo caso non possiamo mica parlare di velocità!

Esempietto banale. Sia

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t < 0, \\ 1 & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

Ovviamente $f^2(t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Ma la funzione f non si sogna minimamente di essere derivabile in 0. Quindi non possiamo scrivere che $f(t)f'(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

2 Equazione o identità?

Ho supposto che la condizione $f(x) = g(x)$ fosse soddisfatta per ogni $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, con $\delta > 0$. E' come dire che $f(x) = g(x)$ è una identità su $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Ovvero è come dire che l'equazione $f(x) = g(x)$ è risolta per ogni $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

Visto che a volte c'è un po' di confusione, proviamo a rivedere quanto detto in queste note nell'ottica "equazioni".

Siano date $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Consideriamo l'equazione $f(x) = g(x)$. Sia X l'insieme delle soluzioni (in $\mathbb{R}$...) di questa equazione. Sia $x_0 \in X$. Cosa possiamo dire delle derivate di f e g in x_0?

Vediamo, cominciando dal caso più semplice. Supponiamo di sapere che f e g sono derivabili in x_0 e che l'equazione è soddifatta per $x = x_0$, ovvero che $f(x_0) = g(x_0)$. Possiamo dire che $f'(x_0) = g'(x_0)$? Ovvio che no! Si possono fare *migliardi* di controesempi. Basta prendere $f(x) = x$ e $g(x) = 7$. Ovvio che $X = \{7\}$. Altrettanto ovvio che $f'(7) = 1 \neq 0 = g'(7)$.

C'è qualche condizione ulteriore la quale ci permette di concludere che $f'(x_0) = g'(x_0)$? Una ovvia condizione è che X contenga un intorno di x_0. Così che ricadiamo nel caso già analizzato.

Si può fare di più? Volendo, sì. Vedasi il paragrafo seguente. Che dovrebbe essere inutile per il "working physicist" o "working engineer" o simili.

3 Cosine un po' più raffinate

Approfondiamo il discorso. Punto di partenza è: cos'è la derivata? E' il limite del rapporto incrementale... Quindi la questione di fondo è: sotto quali condizioni due funzioni hanno lo stesso limite?

Sono interessanti i due risultati seguenti:

Proposizione 1 *Siano* $h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Sia* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Consideriamo* $X = \{x \in \mathbb{R} : h(x) = k(x)\}$*. Se sappiamo che:*
- x_0 *è di accumulazione per* X
- h, k *hanno limite per* $x \to x_0$
Allora:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} k(x)$$

Proposizione 2 *Siano* $h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Sia* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Consideriamo* $X = \{x \in \mathbb{R} : h(x) = k(x)\}$*. Se sappiamo che:*
- x_0 *è di accumulazione per* X
- h *ha limite per* $x \to x_0$
Allora NON possiamo dedurre che:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} k(x)$$

Vediamo come mai si hanno questi due fatti. Un punto cruciale è il seguente.

Proposizione 3 *Sia* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Sia* $x_0 \in \mathbb{R}$*. Sia* $\hat{h} = h_{|Z}$*, dove* $Z \subseteq \mathbb{R}$*, t.c.* x_0 *sia punto di accumulazione per* Z*.*
Se sappiamo che h *ha limite per* $x \to x_0$*, allora* $\hat{h}$ *ha limite per* $x \to x_0$ *e:*

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} \hat{h}(x)$$

Dimostrazione Basta applicare la definizione di limite a $\hat{h}$. ■

Dimostriamo ora la proposizione 1
Dimostrazione Segue immediatamente dalla Proposizione 3 appena dimostrata: prendendo $Z = X$ e introducendo $\hat{h}$ e $\hat{k}$ come nella proposizione 3, si ottiene:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} \hat{h}(x), \lim_{x \to x_0} k(x) = \lim_{x \to x_0} \hat{k}(x)$$

Ma $\hat{h}$ e $\hat{k}$ sono la stessa funzione, per cui:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} \hat{h}(x) = \lim_{x \to x_0} \hat{k}(x) = \lim_{x \to x_0} k(x)$$

■

Per la Proposizione 2 è sufficiente esibire un controesempio. Basta pensare alla funzione h che vale sempre 0, ed a k che vale sempre 1 tranne che per $x = 1/n, n \in \mathbb{N}$, ove vale 0.

Da questi risultati seguono immediatamente analoghi risultati sulle derivate. Basta notare che se $f(x) = g(x)$, allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

tranne che per $x = x_0$. E, visto che la derivabilità (e eventuale derivata) in x_0 è basata sul limite del rapporto incrementale per $x \to x_0$, tendendo conto che quanto avviene in x_0 è irrilevante, dalla coincidenza tra f e g otteniamo la coincidenza dei loro rapporti incrementali nei punti che ci interessano.

L'unica cosa cui bisogna fare attenzione è che f e g siano definite in x_0, cosa che per il limite è inutile, ma è indispensabile per poter avere il rapporto incrementale.

Nota finale. Come il lettore accorto avrà già notato, analoghi risultati valgono per successioni e sottosuccessioni estratte. Lascio a chi ne ha voglia la formulazione e dimostrazione di tali risultati.