Dilemma del prigioniero ripetuto

(da Kreps et al.)

Fioravante PATRONE

1 Dilemma del prigioniero ripetuto

Come secondo gioco ad informazione incompleta vedremo il dilemma del prigioniero ripetuto un numero finito di volte. Più precisamente, illustrerò con un esempio particolarmente semplice un famoso risultato di Kreps *et al.* (1982). L'approccio che seguo si ispira direttamente alla presentazione che ne fa Gibbons (1992). L'idea di Kreps *et al.* è quella di fornire un modello capace di mostrare come si possa avere cooperazione nel dilemma del prigioniero finitamente ripetuto, immaginando che ci possa essere un poco di incertezza sulla razionalità assoluta dei giocatori. Nel piccolo esempio che presento, vi è un giocatore classicamente razionale (il giocatore II), mentre l'altro può essere di due tipi: mentre il tipo 2 è anch'esso classicamente razionale, il tipo 1 lo è molto di meno... Nel senso che questo tipo è semplicemente una macchinetta programmata per giocare "TIT FOR TAT" (supporremo che la probabilità che I sia di tipo 1 sia pari a p). Col nome "TIT FOR TAT" ("pan per focaccia"?) si identifica una semplice strategia che consiste nel rispondere alle scelte effettuate dell'avversario giocando, allo stadio successivo, "cooperativamente" se così ha fatto l'altro, ed invece "non-cooperativamente" nel caso contrario. Cosa significhi precisamente "cooperativamente" o non, varia a secondo del contesto: nel nostro esempio, vuol dire che I (ad esempio) gioca T se II ha giocato L, e gioca invece B se II ha giocato R. Aggiungo che la strategia classica del "TIT FOR TAT" presuppone che la prima mossa (cioè quella fatta in assenza di "stadi precedenti") sia "cooperativa": nel nostro caso, che I giochi T al primo stadio. La strategia "TIT FOR TAT" è stata resa famosa dal fatto che essa, proposta da Rapoport, è risultata vincente due volte in altrettanti "tornei" organizzati da Axelrod. Dettagli si trovano, appunto, in Axelrod (1984).

Alcune considerazioni meritano di essere fatte prima di passare all'analisi del modello. Innanzitutto ritroviamo ancora una volta una modellizzazione iper-semplificata. Ripeto quanto detto in altre circostanze: modelli di questo genere non hanno ambizioni di "realismo", ma hanno lo scopo di poter indicare come *potrebbero* verificarsi taluni fenomeni. Qui, ad esempio, vedremo come giocatori razionali e intelligenti (il giocatore II e anche, si noti, il tipo razionale del giocatore I) possano usare strategie cooperative nel dilemma del prigioniero finitamente ripetuto, grazie alla presenza di incertezza sulla razionalità del giocatore I. Il significato di questo risultato risiede nel confronto con quanto avviene in presenza di "common knowledge" della razionalità e intelligenza dei giocatori: nella ripetizione finita del dilemma del prigioniero non c'e' spazio per l'uso di strategie "cooperative".

Un altro aspetto che rende interessante questo modellino è che mostra un caso in cui l'incertezza non riguarda i payoff, ma la razionalità dei giocatori, che in questo esempio risulta equivalente a sapere quali (e quante) siano le strategie a disposizione dei giocatori. Se volessimo rimanere ancorati alla lettera al punto di vista di Harsanyi (1967-68), dovremmo lasciare al tipo "poco razionale" del giocatore I la possibilità di usare tutte le strategie (come per l'altro tipo), avendo però l'accortezza di assegnargli dei payoff "molto brutti" in corrispondenza di strategie diverse dal "TIT FOR TAT" (tanto brutti da impedire che queste strategie possano essere prese in considerazione nella ricerca di equilibri). Non seguirò la strada suggerita da Harsanyi, perché in questo esempio così semplice si riesce a provare ciò che interessa (e cioè che vi possa essere un equilibrio che prevede l'uso di mosse cooperative da parte dei giocatori) senza bisogno di usare tutto l'apparato formale dei giochi a informazione incompleta.

Ultima considerazione: io mi limiterò a occuparmi di equilibri di Nash, ma la trattazione di questo esempio punta a provare che si ha un equilibrio che soddisfa condizioni più stringenti che non quella del semplice equilibrio di Nash (si parla di equilibrio Bayesiano perfetto, o di equilibrio sequenziale). Come fatto in altre circostanze, anche in questo caso rinvio a testi più avanzati chi avesse interesse ad approfondire la problematica che qui viene trattata solo a livello introduttivo.

Passiamo finalmente all'esempio. Il gioco costituente è il solito dilemma del prigioniero (aggiungo solo 1 a tutti i payoff, per comodità).

$I \backslash II$	L		R	
T	3	3	1	4
B	4	1	2	2

Mi limiterò a provare che vi è un equilibrio di Nash di questo gioco (ripetuto tre volte), che prevede l'uso delle seguenti strategie:

II gioca L nei due primi stadi e R nel terzo stadio.

$I.1$ gioca T in tutti e tre gli stadi (lui gioca T al primo stadio perché così prevede "TIT FOR TAT" e, sempre per via di come è fatta questa strategia, giocherà T nel secondo e terzo stadio perché II negli stadi precedenti gioca L).

$I.2$ gioca T al primo stadio e B negli altri due.

Prima di provare questa affermazione, osservo come l'aspetto significativo sia l'uso delle strategie L da parte di II e T da parte di $I.2$, ovverossia la presenza di scelte "cooperative" in un equilibrio di Nash per questa ripetizione finita del dilemma del prigioniero.

Di minore rilevanza è notare come io non abbia dato una descrizione *completa* della strategia di equilibrio dei giocatori. Ricordo che nel dilemma del prigioniero "puro e semplice" ripetuto tre volte, non solo i giocatori hanno molte strategie a disposizione (circa un milione ciascuno), ma la loro descrizione è molto più complessa di quanto non abbiamo fatto qui (come dovrebbe essere evidente sulla base della tabella del capitolo **??**, relativa al caso a due stadi). Come mai questa semplificazione? E' legittima? Si, nel senso che i "dettagli" che abbiamo trascurato e quelli che trascureremo riguardano scelte dei giocatori in nodi che non verranno mai "raggiunti" nel gioco (se i giocatori adottano le strategie di cui via via parleremo) e quindi non hanno alcun effetto sui payoff, risultando quindi irrilevanti per la verifica che intendiamo fare, e cioè che le strategie indicate "in breve" costituiscono un equilibrio di Nash.

Così come fa Gibbons, cominciamo a considerare il gioco a due soli stadi e vediamo sotto quali condizioni a II convenga giocare L anziché R nel primo stadio (le altre scelte sono determinate o dalla condizione di equilibrio, per cui all'ultimo stadio $I.2$ e II certamente defezioneranno giocando rispettivamente B e R, oppure dalla mancanza di alternativa per $I.1$; infine, $I.2$ gioca R al primo stadio perché sa che II defezionerà comunque al secondo stadio). L'unico "grado di libertà" è pertanto appunto cosa fa II al primo stadio (la sua scelta determinerà cosa farà $I.1$ nel secondo stadio).

In un caso avremmo la situazione descritta nella seguente tabella:

	1° stadio	2° stadio
$I.1$	T	T
$I.2$	B	B
II	L	R

Il payoff atteso per II è:

$$(1-p)\cdot 1 + p\cdot 3 + (1-p)\cdot 2 + p\cdot 4$$

Se invece II gioca R al primo stadio, abbiamo la situazione:

	1° stadio	2° stadio
$I.1$	T	B
$I.2$	B	B
II	R	R

e il payoff che ottiene II è:

$$(1-p)\cdot 2 + p\cdot 4 + (1-p)\cdot 2 + p\cdot 2$$

A II converrà giocare L al primo stadio se:

$$(1-p)\cdot 1 + p\cdot 3 + (1-p)\cdot 2 + p\cdot 4 \geq (1-p)\cdot 2 + p\cdot 4 + (1-p)\cdot 2 + p\cdot 2$$

il che avviene se e solo se:

$$p \geq \frac{1}{2}$$

Supponendo che questa condizione sia soddisfatta, passando al gioco a tre stadi vediamo se possa succedere che II e $I.2$ effettuino le scelte "cooperative" al primo stadio (si noti che, se $I.2$ "defeziona" al primo stadio, II sa subito che *non* ha di fronte il tipo "TIT FOR TAT" e quindi ci si ritrova essenzialmente in un dilemma del prigioniero classico, nel secondo e terzo stadio). Più precisamente, vogliamo vedere se si possa avere un equilibrio di Nash che preveda le scelte mostrate in tabella 1.

Osserviamo che il payoff per $I.2$ è, in questo caso:

$$3 + 4 + 2 = 9$$

	1° stadio	2° stadio	3° stadio
$I.1$	T	T	T
$I.2$	T	B	B
II	L	L	R

Tabella 1: Le scelte previste in equilibrio

Se $I.2$ "devia" al primo stadio, il risultato che può ottenere (se "devia", II sa chi ha di fronte e quindi gioca R nel secondo e terzo stadio[1]) è non migliore di

$$4 + 2 + 2 = 8$$

Pertanto, $I.2$ non ha convenienza a deviare dalla strategia che abbiamo indicato (T al primo stadio, B al secondo e al terzo).

Occupiamoci ora di II. Il payoff che ottiene, nel supposto equilibrio indicato in tabella, è:

$$(1 - p) \cdot [3 + 1 + 2] + p \cdot [3 + 3 + 4]$$

Quali sue "deviazioni" dobbiamo considerare? Le uniche interessanti prevedono che II giochi R al primo stadio (se non devia al primo stadio, siamo ricondotti all'analisi già vista nel caso a due stadi). Se II gioca R, naturalmente $I.1$ giocherà B al secondo stadio e resta sempre valido il fatto che $I.2$ giochi B al secondo e terzo stadio. Resta indeterminato cosa possa fare II al secondo stadio (e, di conseguenza, quello che farà $I.1$ al terzo stadio). Analizzeremo entrambe le alternative disponibili al secondo stadio per II.

Vediamo dapprima cosa succede se II gioca R nel secondo stadio. In questo caso, le strategie usate sono descritte dalla tabella:

	1° stadio	2° stadio	3° stadio
$I.1$	T	B	B
$I.2$	T	B	B
II	R	R	R

[1] Si noti che qui emerge chiaramente come la descrizione offerta dalla precedente tabella è parziale. In particolare, non ci dice cosa fa II in caso di "deviazioni" di $I.2$ Integriamo questa informazione con considerazioni tipo quella appena svolta.

Il payoff risultante per II è:

$$(1-p)\cdot[4+2+2]+p\cdot[4+2+2]$$

Allora dovrà essere:

$$(1-p)\cdot[3+1+2]+p\cdot[3+3+4]\geq(1-p)\cdot[4+2+2]+p\cdot[4+2+2]$$

ovverossia $6+4p\geq 8$ cioè $p\geq\frac{1}{2}$.

Vediamo infine l'ultimo caso, che sintetizzeremo nella tabella:

	1° stadio	2° stadio	3° stadio
$I.1$	T	B	T
$I.2$	T	B	B
II	R	L	R

Il payoff di II è, in questo caso:

$$(1-p)\cdot[4+1+2]+p\cdot[4+1+4]$$

La condizione (ultima) che otteniamo è pertanto:

$$(1-p)\cdot[3+1+2]+p\cdot[3+3+4]\geq(1-p)\cdot[4+1+2]+p\cdot[4+1+4]$$

ovvero: $3+2p\geq 4$, cioè: $p\geq\frac{1}{2}$.

Abbiamo concluso. Possiamo affermare che, se $p\geq\frac{1}{2}$, la strategia indicata nella tabella 1 individua un equilibrio di Nash. Risultato interessante in quanto si manifestano, in equilibrio, strategie cooperative sia da parte di II che da parte di $I.2$ (si noti che $I.2$ non si trova, per così dire, direttamente in condizione di informazione incompleta, ma subisce gli effetti dell'incompletezza dell'informazione che ha II). Naturalmente si può essere insoddisfatti che tutto ciò avvenga per valori "troppo alti" di p (ovvero, $p\geq\frac{1}{2}$). Sono d'accordo. Ma questo era solo un esempio molto semplice per illustrare la possibilità di un certo fenomeno. Se aumentassimo il numero degli stadi del gioco, non vi sarebbe bisogno di valori così elevati per p!