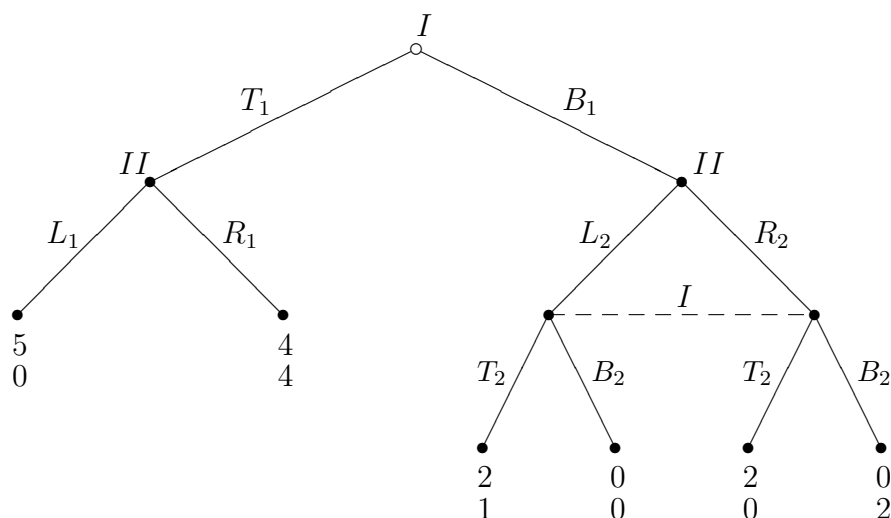


Tempo: 2 ore e 1/2; risolvere 3 dei 4 esercizi proposti; le risposte agli esercizi 3 e 4 non possono superare una pagina e mezza; non è consentito l'uso di testi, appunti, etc... GIUSTIFICARE LE RISPOSTE.

**Esercizio 1** Si consideri il seguente gioco in forma estesa:



- scriverne la forma strategica;
- determinarne gli equilibri di Nash in strategie pure (se esistono);
- trovarne gli equilibri perfetti nei sottogiochi (se esistono)

**Soluzione**

La forma strategica è (è sottolineata la “best reply” per  $I$  e soprallineata quella per  $II$ ):

$I \backslash II$	$L_1L_2$	$L_1R_2$	$R_1L_2$	$R_1R_2$
$T_1T_2$	<u>(5, 0)</u>	(5, 0)	(4, <u>4</u> )	(4, <u>4</u> )
$T_1B_2$	<u>(5, 0)</u>	(5, 0)	(4, <u>4</u> )	(4, <u>4</u> )
$B_1T_2$	(2, <u>1</u> )	(2, 0)	(2, <u>1</u> )	(2, 0)
$B_1B_2$	(0, 0)	(0, <u>2</u> )	(0, 0)	(0, <u>2</u> )

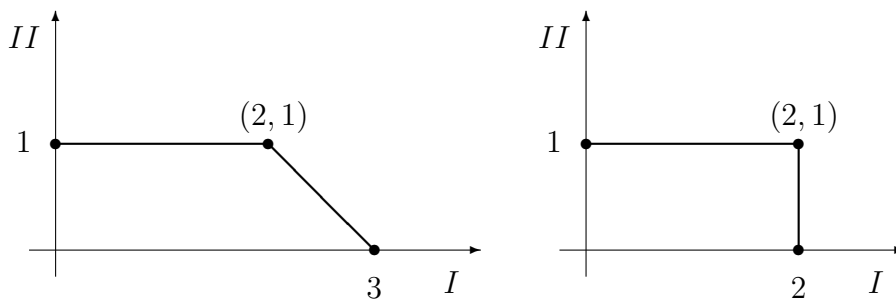
Vi sono pertanto quattro equilibri in strategie pure:  $(T_1T_2, R_1L_2)$ ,  $(T_1T_2, R_1R_2)$ ,  $(T_1B_2, R_1L_2)$ ,  $(T_1B_2, R_1R_2)$ .

Il gioco dato ha due sottogiochi propri. Uno, quello a sinistra in figura, ha come equilibrio  $R_1$ . Il sottogioco a destra ha, come unico equilibrio,  $(T_2, L_2)$ , come si verifica agevolmente dalla forma strategica riportata qui sotto:

$I \backslash II$	$L_2$	$R_2$
$T_2$	$(2, 1)$	$(2, 0)$
$B_2$	$(0, 0)$	$(0, 2)$

Pertanto, dei quattro equilibri di Nash, l'unico che è perfetto nei sottogiochi (cioè l'unico la cui restrizione ai sottogiochi è ancora un equilibrio) è  $(T_1T_2, R_1L_2)$ .

**Esercizio 2** Trovare le soluzioni di Nash e di Kalai-Smorodinsky per i seguenti problemi di contrattazione (in entrambi i casi il “disagreement point” è  $(0, 0)$ ).



### Soluzione

Nella figura a sinistra, per la condizione di efficienza la soluzione si troverà sul lato obliquo del trapezio che rappresenta  $S$ .

Poiché  $(S, d)$  è essenziale, la soluzione di Nash è data da:

$$\Phi(S, d) = \operatorname{argmax}\{(x - d_1) \cdot (y - d_2) : (x, y) \in S \cap (d + \mathbb{R}_{\geq}^2)\}$$

Visto che  $d = (0, 0)$ , occorre massimizzare  $xy$  sul segmento individuato da:  $x + y = 3$ ,  $x \geq 2$ ,  $y \geq 0$ .

Condizioni necessarie di massimo sulla retta  $x + y = 3$  si trovano coi moltiplicatori di Lagrange (o anche per sostituzione, ad esempio riducendo il problema alla massimizzazione di  $x(3 - x)$ ) e danno come soluzione  $x = y = 3/2$ , punto che sta sulla retta (ovviamente!) ma non sul segmento. Quindi il massimo di  $xy$  sul segmento si trova in uno dei due vertici:  $xy$  vale 0 in  $(3, 0)$  e 2 in  $(2, 1)$ , pertanto è quest'ultimo punto, ovvero  $(2, 1)$ , la soluzione di Nash del problema dato.

Per quanto riguarda Kalai-Smorodinsky, il punto utopia è  $(3, 1)$  e pertanto la soluzione di KS è data dall'intersezione della retta  $y = x/3$  con la retta  $x + y = 3$ . Quindi otteniamo  $(9/4, 3/4)$ .

Per la figura a destra, la soluzione è immediata. In  $S$  vi è un unico punto fortemente efficiente, che è  $(2, 1)$  e quindi esso rappresenta sia la soluzione di Nash che quella di KS.

**Esercizio 3** Presentare il valore Shapley.

**Esercizio 4** Descrivere e discutere l'equilibrio di Nash.