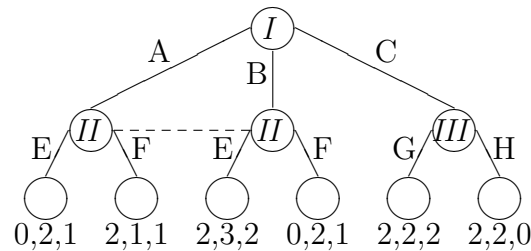


Tempo: 2 ore e 1/2; risolvere 3 dei 4 esercizi proposti; le risposte agli esercizi 3 e 4 non possono superare le due pagine; non è consentito l'uso di testi, appunti, etc...

GIUSTIFICARE LE RISPOSTE.

Non scrivere la soluzione di esercizi diversi su uno stesso foglio.

Esercizio 1 A, esame e prova intermedia.
 Si consideri il seguente gioco in forma estesa:



- Determinare gli equilibri di Nash in strategie pure.
- Determinare quali sono equilibri perfetti nei sottogiochi.
- Determinare quali sono equilibri bayesiani perfetti.

Soluzione

Forma strategica

<i>III = G</i>		
<i>I / II</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>A</i>	<u>0,2,1</u>	<u>2,1,1</u>
<i>B</i>	<u>2,3,2</u>	<u>0,2,1</u>
<i>C</i>	<u>2,2,2</u>	<u>2,2,2</u>

<i>III = H</i>		
<i>I / II</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
<i>A</i>	<u>0,2,1</u>	<u>2,1,1</u>
<i>B</i>	<u>2,3,2</u>	<u>0,2,1</u>
<i>C</i>	<u>2,2,0</u>	<u>2,2,0</u>

- Ci sono quattro equilibri di Nash in strategie pure: (B, E, G) , (C, E, G) , (C, F, G) e (B, E, H) .
- (B, E, G) , (C, E, G) e (C, F, G) sono equilibri perfetti nell'unico sottogioco proprio.
- $(B, E; p = 0, G)$ e $(C, E; p \in [0, 1], G)$ sono equilibri bayesiani perfetti.

Esercizio 2 A, esame.

Si consideri il seguente gioco TU a quattro giocatori in forma caratteristica:

$$v(S) = \begin{cases} 2 & \text{se } |S| = 1 \\ 5 & \text{se } |S| = 2 \\ 6 & \text{se } |S| = 3 \\ 10 & \text{se } |S| = 4 \end{cases}$$

- Determinare il valore di Shapley.
- Determinare se appartiene al nucleo.
- Determinare tutte le imputazioni del nucleo.

Soluzione

- Per la simmetria dei giocatori, si ha $\phi = (\alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$. Per l'efficienza, $\sum_{i=1}^4 \alpha = 4\alpha = 10$. Pertanto, $\phi = (2.5, 2.5, 2.5, 2.5)$.
- SI. Si verifica immediatamente che le condizioni affinché una imputazione stia nel nucleo sono soddisfatte dal valore Shapley ϕ .
- $C(v) = \{\phi\}$. Per provarlo, sia $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ una allocazione appartenente al nucleo (e quindi sarà, in particolare, una imputazione). Supponiamo, senza ledere la generalità, che sia $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$. Se $x \neq \phi$, ci sarà una coordinata minore strettamente di 2.5 (sennò la somma delle quattro coordinate sarebbe maggiore di 10). Quindi $x_1 < 2.5$. Consideriamo $2.5 - x_1 = \varepsilon$. Visto che $x_2 + x_3 + x_4 = 10 - x_1 = 7.5 + \varepsilon$, ci sarà almeno una coordinata minore o uguale di $2.5 + \varepsilon/3$, coordinata che quindi possiamo assumere sia x_2 . Allora, $x_1 + x_2 \leq 2.5 - \varepsilon + 2.5 + \varepsilon/3$. Quindi $x_1 + x_2 \leq 5 - 2/3\varepsilon < 5$. Pertanto è violata la condizione che x appartenga al nucleo.

Esercizio 3 A, prova intermedia.

Dato il gioco "costituente":

$R \setminus C$	L	R
T	7, 7	3, 8
B	9, 4	0, 0

si consideri il gioco ripetuto quattro volte, in cui il payoff è dato dalla media dei payoff parziali.

- Trovare almeno quattro equilibri di Nash, in strategie pure. Sono SPE?
- E' possibile ottenere, come payoff di equilibrio, (6, 6)?
- I giocatori potrebbero ottenere un payoff strettamente maggiore di 6, sempre in equilibrio, se fosse disponibile una strategia "punitiva"? Rispondere specificando chi sono, eventualmente, i nuovi payoff aggiunti.

Soluzione

- a. Alternando a piacere le coppie di strategie (T, R) e (B, L) (ad esempio, giocando la prima al primo turno, la seconda al secondo e al terzo e di nuovo la prima al quarto turno), si possono ottenere 16 equilibri che sono anche tutti SPE.
- b. Basta alternare (T, R) e (B, L) nei quattro turni.
- c. Si può aggiungere una riga ed una colonna, aventi tutti come payoff (ad esempio) -10 . Giocare (T, L) ai primi due turni poi alternare (T, R) e (B, L) negli ultimi due turni. In caso di defezione nei primi due turni, negli ultimi due si passa alla strategia punitiva.

C'erano versioni analoghe nel **foglio B**. Una variante riguarda l'esercizio seguente:

Esercizio 2 B

Si consideri il seguente gioco TU a quattro giocatori in forma caratteristica:

$$v(S) = \begin{cases} 4 & \text{se } |S| = 1 \\ 7 & \text{se } |S| = 2 \\ 9 & \text{se } |S| = 3 \\ 14 & \text{se } |S| = 4 \end{cases}$$

- a. Determinare il valore di Shapley.
- b. Determinare se appartiene al nucleo.
- c. Determinare tutte le imputazioni del nucleo.

Soluzione

La soluzione è analoga a quella vista per l'analogo esercizio A.

E' differente la risposta alla domanda "c", in quanto in questo caso il nucleo è vuoto. Infatti il valore Shapley assegna ad ogni giocatore un valore pari a 3.5 e chiaramente non è soddisfatta la condizione di razionalità individuale, visto che $v(S) = 4$ per le coalizioni che contengono un solo giocatore.

Sono stati assegnati anche i seguenti esercizi "teorici":

Esercizio 3 Strategie dominanti e dominate.

Esercizio 4 Rappresentare formalmente, come gioco, un paio di modelli d'asta. Specificare accuratamente le ipotesi fatte.

Esercizio 5 Segnali e gestione strategica dell'informazione.