Alcuni esercizi di Teoria dei Giochi

Michele Lattarulo

(2008)

Indice

1 La ripartizione del potere nella Contea di Nassau (NY)

Riferimenti bibliografici

Le domande (a) e (b) sono tratte da [Ferguson, cap. IV, es. 10, pag.17].
Le domande (c), (d), (e), (f) sono "inventate".

Questo problema ha suscitato il mio interesse poiché ne ho letto il testo nei giorni in cui si stava decidendo la ridistribuzione dei seggi nel Parlamento Europeo, sulla base degli abitanti di ogni nazione. Tuttavia l'analogia si ferma qui: è chiaro che il caso del Parlamento Europeo è totalmente differente, poiché il voto espresso dai parlamentari non dipende (solo) dalla nazione di appartenenza, ma dipende principalmente dal partito di appartenenza.

Testo

La contea di Nassau (NY) è costituita da 5 distretti (Hempstead, Oyster Bay, North Hempstead, Long Beach, Glen Cove). Il potere legislativo, nella contea, è esercitato dal cosiddetto "Board of Supervisors", costituito da un rappresentante per ognuno dei 5 distretti (con l'eccezione del distretto di Hempstead, che ha due rappresentanti, in virtù della sua estensione). Quando si deve approvare una legge ogni rappresentante esprime il suo voto, che viene "pesato", in proporzione al numero di abitanti del distretto da lui rappresentato. Più precisamente, questa era la situazione nel 1964:

Distretto	Popolazione	Peso Supervisor
Hempstead	728 625	31 + 31
Oyster bay	285 545	28
North Hempstead	213 335	21
Long Beach	25 654	2
Glen Cove	22 752	2
Totale	1 275 911	115

Per l'approvazione di una legge era richiesta, fino al 1970, la maggioranza assoluta dei voti (58 su 115). A partire dal 1971 è stata introdotta una modifica regolamentare, che ha elevato la soglia minima dei voti richiesti a 63.

Tale sistema di voto fu introdotto come applicazione del modello matematico proposto in [Banzhaf], in cui il potere politico è misurato mediante il cosiddetto "indice di potere di Banzhaf". Tuttavia è stato lo stesso Banzhaf a prendere le distanze dal sistema adottato dalla contea di Nassau, affermando che i suoi studi erano stati applicati impropriamente. In effetti una delle ipotesi su cui si fonda il modello di Banzhaf è che i voti dei vari rappresentanti siano indipendenti. Nel caso della Contea di Nassau due dei rappresentanti afferiscono allo stesso distretto (quello di Hempstead), il che lascia qualche perplessità sul fatto che i loro voti possano considerarsi realmente indipendenti.

(a) Calcolare il valore Shapley del gioco fino al 1970 (soglia minima per l'approvazione delle leggi fissata a 58 voti su 115).
(b) Calcolare il valore Shapley del gioco a partire dal 1971 (soglia minima per l'approvazione delle leggi fissata a 63 voti su 115).
(c) Calcolare il valore Shapley del gioco al variare della soglia minima x per l'approvazione delle leggi.
(d) Per quale valore di x si ottiene la distribuzione del potere più equa?
(e) Assumiamo che i Supervisors [H1] e [H2], in quanto rappresentanti dello stesso distretto, votino sempre allo stesso modo. Come cambiano i risultati precedenti?
(f) Analizzare i risultati ottenuti, discutendo come varia la distribuzione del potere al variare di x.

Soluzione

(a) Si tratta di un gioco semplice superadditivo per il quale è possibile applicare la formula di Shapley-Shubik

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{P}(i)} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}$$

ove

$$\mathcal{P}(i) = \{S \subseteq N : \quad v(S) = 1\,, \quad v(S - \{i\}) = 0\}$$

Il problema non presenta difficoltà concettuali: per effettuare i calcoli, in questa e nelle domande successive, ho utilizzato un foglio di calcolo, che allego in appendice A. Se la soglia minima è fissata a 58 voti, il valore Shapley è

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0\right)$$

I Supervisors [N], [L], [G] sono privi di potere (il loro voto è ininfluente ai fini dell'approvazione o meno di una legge), mentre i Supervisors [H1], [H2], [O] hanno lo stesso potere. Più precisamente, per approvare una legge è necessario e sufficiente che essa sia votata da almeno due fra [H1], [H2], [O].

(b) Elevando a 63 voti la soglia minima di maggioranza il valore Shapley diventa

$$\left(\frac{17}{60}, \frac{17}{60}, \frac{13}{60}, \frac{7}{60}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}\right)$$

Il potere, in questo caso, sembra suddiviso più equamente: nessuno dei Supervisors è totalmente ininfluente, e le componenti del valore Shapley sono più "coerenti" con i pesi dei Supervisors.

(c) La risposta si trova nel foglio di calcolo allegato in appendice A: per ogni x intero compreso fra 1 e 115 ho calcolato il valore Shapley che si ottiene assumendo x come soglia minima da raggiungere per l'approvazione di una legge. Tuttavia, benché ciò sia possibile da un punto di vista prettamente matematico (in Teoria dei Giochi si parlerebbe di "gioco improprio"), è poco ragionevole considerare valori di x inferiori a 58, soprattutto se si assume che ad ogni votazione siano presenti tutti i Supervisors e che ogni Supervisor debba esprimersi con un parere "favorevole" o "contrario", senza possibilità di astenersi.

(d) La domanda non è ben posta, poiché non ho definito il concetto di "equità". Propongo allora questa definizione.

Sia $Q \in \mathbf{R}^6$ il vettore dei pesi dei Supervisors, normalizzato:

$$Q = \frac{1}{115}(31, 31, 28, 21, 2, 2)$$

Sia x un intero, compreso fra 1 e 115. Sia v_x la funzione caratteristica del gioco che si ottiene in corrispondenza della soglia minima x. Sia $\Phi(v_x)$ il valore Shapley di tale gioco.

Sia poi f la funzione

$$\begin{array}{cccc} f: & [1,115] \cap \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & |\Phi(x) - Q| \end{array}$$

Si tratta di una funzione che "misura" quanto si discosta il valore Shapley dal vettore dei pesi normalizzato, cioè quanto il potere effettivo si discosti dall'essere "proporzionale" al numero di abitanti dei vari distretti.

In questo contesto i valori di x per cui si ottiene la distribuzione di potere più equa sono quelli in corrispondenza dei quali la funzione f assume il minimo valore.

I calcoli (ancora una volta eseguiti tramite un foglio di calcolo, allegato in Appendice B) mostrano che la distribuzione più equa del potere si ha quando la soglia minima per l'approvazione delle leggi è fissata a $x = 65$

oppure $x = 66$ (non vi è differenza nello scegliere un valore piuttosto che un altro, poiché, per ogni coalizione S, si ha $v_{65}(S) = v_{66}(S)$).

Per tali valori di x il valore Shapley è

$$\Phi(v_{65}) = \left(\frac{4}{15}, \frac{4}{15}, \frac{13}{60}, \frac{13}{60}, \frac{1}{60}, \frac{1}{60}\right)$$

(e) Se si assume che i due rappresentanti della contea di Hempstead votino sempre allo stesso modo, si ottiene un gioco a 5 giocatori. Per i calcoli rimando, ancora una volta, al foglio di calcolo in Appendice B.

Con la soglia minima fissata a 58 il valore Shapley diventerebbe

$$(1, 0, 0, 0, 0)$$

In altre parole saremmo in presenza un unico dittatore.

Con la soglia minima elevata a 63 il valore Shapley diventerebbe:

$$\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}, \frac{1}{20}\right)$$

Tale soluzione elimina la condizione di "dittatorialità". Tuttavia non elimina l'anomalia per cui i distretti O, N, L e G hanno lo stesso potere effettivo a fronte di un numero di voti molto diverso.

Con la soglia minima ulteriormente elevata a 65 il valore Shapley diventerebbe:

$$\left(\frac{7}{10}, \frac{7}{60}, \frac{7}{60}, \frac{1}{30}, \frac{1}{30}\right)$$

(f) La descrizione richiesta può essere effettuata distinguendo i seguenti casi.

- $0 \leq x \leq 57$
  È poco ragionevole considerare valori di x in questo range, poiché si consentirebbe l'approvazione di una legge senza che sia neanche raggiunta la maggioranza assoluta dei voti.
- $58 \leq x \leq 62$
  Valori di x in questo range espongono ad un rischio di "dittatura" da parte del distretto di Hempstead, qualora si ipotizzi che i suoi Supervisors [H1] e [H2] votino sempre allo stesso modo.
- $63 \leq x \leq 64$
  Nessuna legge può essere approvata senza il consenso di almeno uno dei due Supervisors del distretto di Hempstead. Tuttavia, essi non sono più in grado di far approvare una legge senza l'appoggio di almeno un altro Supervisor.

- $65 \leq x \leq 66$
  Si tratta dei valori di x per cui si ottiene la massima equità nella distribuzione del potere.
- $67 \leq x \leq 84$
  La maggioranza richiesta comincia ed essere troppo "qualificata": più è alto x e più è difficile far approvare una legge. C'è un rischio di "immobilismo" nella gestione del potere.
- $85 \leq x \leq 87$
  Valgono le considerazioni precedenti e. Inoltre, i Supervisors [H1] ed [H2] hanno potere di veto.
- $88 \leq x \leq 90$
  I giocatori [H1], [H2], [O] hanno potere di veto, mentre il voto dei giocatori [N], [L], [G] è ininfluente. In altre parole, una coalizione S è vincente se e solo se $\{[H1], [H2], [O]\} \subseteq S$.
- $91 \leq x \leq 94$
  I giocatori [H1], [H2], [O] hanno potere di veto, ma il loro voto non è sufficiente ad approvare una legge.
- $95 \leq x \leq 111$
  I giocatori [H1], [H2], [O] ed [N] hanno potere di veto, mentre il voto dei giocatori [L] e [G] è ininfluente. In altre parole, una coalizione S è vincente se e solo se $\{[H1], [H2], [O], [N]\} \subseteq S$.
- $112 \leq x \leq 113$
  I giocatori [H1], [H2], [O] ed [N] hanno potere di veto, ma il loro voto non è sufficiente ad approvare una legge. In altre parole, i giocatori [L] e [G] non sono ininfluenti.
- $114 \leq x \leq 115$
  L'unica coalizione vincente è N. In altre parole, è richiesta l'unanimità. Evidentemente in questa situazione tutti i giocatori hanno lo stesso potere (cioè le componenti del valore Shapley sono tutte uguali) e ciò non è un segnale di "equità", poiché si finisce per attribuire lo stesso peso ai vari Supervisors, a prescindere dal numero di cittadini che effettivamente essi rappresentano.

2 Un problema di allocazione di costi: rimborsi di spese di viaggio per la partecipazione a missioni scientifiche

Riferimenti bibliografici

L'esercizio è una rielaborazione personale di [Ferguson, cap. IV, es. 12, pag. 18], basata su una situazione che si è realmente presentata qualche anno fa.

Testo

Un assegnista di ricerca in Matematica si deve recare a tre convegni/scuole estive, per la partecipazione ai quali ha ottenuto tre finanziamenti distinti. I convegni si tengono in 3 settimane consecutive, nelle città di Rennes, Nordfjordeid, Goteborg. Si vuole ricercare un'equa allocazione, fra i tre enti finanziatori, dei costi sostenuti per le spese di viaggio. I costi dei viaggi di sola andata sono i seguenti:

- Genova-Rennes: 100 Euro
- Genova-Nordfjordeid: 170 Euro
- Genova-Goteborg: 170 Euro
- Rennes-Nordfjordeid: 170 Euro
- Nordfjordeid-Goteborg: costo incognito k

Rispondere alle seguenti domande.

(a) Scrivere un TU-game, in forma caratteristica (N, v), che descriva il problema in oggetto.

(b) Stabilire per quali valori di k il gioco è superadditivo.

(c) Calcolare il nucleo del gioco, precisando per quali valori di k è non vuoto.

(d) Calcolare il valore Shapley del gioco, precisando per quali valori di k appartiene al nucleo del gioco.

Soluzione

(a) I giocatori sono gli enti finanziatori dei tre convegni (1 per Rennes, 2 per Nordfjordeid, 3 per Goteborg):

$$N = \{1, 2, 3\}.$$

Ogni sottoinsieme S di N rappresenta una possibile scelta, per l'assegnista, dei convegni ai quali partecipare. Il gioco può essere studiato mediante la funzione caratteristica v, oppure mediante la sua opposta, la funzione di costo c, che associa ad ogni sottoinsieme S di N le spese di viaggio sostenute per partecipare a tutti e soli i convegni appartenenti ad S:

$$c(\emptyset) = 0$$

$$c(\{1\}) = 200$$

$$c(\{2\}) = 340$$

$$c(\{3\}) = 340$$

$$c(\{1,2\}) = 440$$

$$c(\{2,3\}) = \min\{340 + k, 680\}$$

$$c(\{1,3\}) = 540$$

$$c(\{1,2,3\}) = \min\{440 + k, 780\}$$

Le spese di viaggio relative alle coalizioni $\{2,3\}$ e $\{1,2,3\}$ tengono conto del fatto che, se il costo della tratta Nordfjordeid - Goteborg risultasse superiore a 340, allora sarebbe più conveniente tornare da Nordfjordeid a Genova e ripartire immediatamente per Goteborg.

(b) Il gioco è superadditivo se, per ogni coppia di coalizioni disgiunte S e T, si ha $c(S \cup T) \leq c(S) \cup c(T)$. Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} c(\{1,2,3\}) \leq c(\{1\}) + c(\{2\}) + c(\{3\}) \\ c(\{1,2\}) \leq c(\{1\}) + c(\{2\}) \\ c(\{1,3\}) \leq c(\{1\}) + c(\{3\}) \\ c(\{2,3\}) \leq c(\{2\}) + c(\{3\}) \\ c(\{1,2,3\}) \leq c(\{1,2\}) + c(\{3\}) \\ c(\{1,2,3\}) \leq c(\{1,3\}) + c(\{2\}) \\ c(\{1,2,3\}) \leq c(\{2,3\}) + c(\{1\}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min\{440 + k, 780\} \leq 200 + 340 + 340 \\ 440 \leq 200 + 340 \\ 540 \leq 200 + 340 \\ \min\{340 + k, 680\} \leq 340 + 340 \\ \min\{440 + k, 780\} \leq 440 + 340 \\ \min\{440 + k, 780\} \leq 540 + 340 \\ \min\{440 + k, 780\} \leq \min\{340 + k, 680\} + 200 \end{cases}$$

Tale sistema è verificato per ogni valore di k. Pertanto il gioco è sempre superadditivo.

In realtà ciò poteva essere dedotto subito, senza effettuare calcoli: la superadditività del gioco è una conseguenza del fatto che, in genere, aggiungendo una tappa intermedia ad un viaggio, il costo del viaggio aumenta. Qualora ciò non dovesse accadere (ad es. perché sulla tratta "diretta" sono già esauriti i biglietti più economici), saremo noi ad aggiungere la tappa intermedia, per spendere meno. Ciò equivale ad "imporre" la superadditività del gioco (sulla tratta in questione si potrebbe addirittura parlare di additività)!

Questo, ovviamente, nell'ipotesi che il tempo per noi non abbia un costo (ma anche se lo avesse, la nostra discussione resterebbe valida: si tratterebbe solo di inglobare nella funzione di utilità il costo derivante dall'aumento del tempo di viaggio dovuto all'aggiunta della tappa intermedia).

A conferma di quanto detto osserviamo che, se nella definizione della funzione di costo si fosse posto

$$c(\{2,3\}) = 340 + k \qquad \text{e} \qquad c(\{1,2,3\}) \;=\; 440 + k$$

(cioè se non si fosse tenuto conto della possibilità di effettuare "via Genova" il viaggio fra Nordfjordeid e Goteborg), si sarebbe ottenuto un gioco superadditivo solo per $k \leq 340$.

(c) Il nucleo del gioco è l'insieme dei punti $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ che soddisfano le condizioni:

$$\begin{cases} x + y + z = c(\{1,2,3\}) \\ x \leq c(\{1\}) \\ y \leq c(\{2\}) \\ z \leq c(\{3\}) \\ x + y \leq c(\{1,2\}) \\ x + z \leq c(\{1,3\}) \\ y + z \leq c(\{2,3\}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = \min\{440 + k, 780\} \\ x \leq 200 \\ y \leq 340 \\ z \leq 340 \\ x + y \leq 440 \\ x + z \leq 540 \\ y + z \leq \min\{340 + k, 680\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=\min\{440+k,780\} \\ 200 \geq x \geq \min\{440+k,780\}-\min\{340+k,680\} \\ 340 \geq y \geq -540+\min\{440+k,780\} \\ 340 \geq z \geq -440+\min\{440+k,780\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=\min\{440+k,780\} \\ 100 \leq x \leq 200 \\ 240-\min\{340,k\} \leq y \leq 340 \\ \min\{340,k\} \leq z \leq 340 \end{cases}$$

In particolare:

- Per $k < 340$ il nucleo è un politopo di dimensione 2.
- Per $k \geq 340$ il nucleo è un politopo di dimensione 1. La dimensione è inferiore, rispetto al caso precedente: ciò è una conseguenza del fatto che, per $k \geq 340$, il viaggio fra Nordfjordeid e Goteborg viene effettuato "via Genova". Ciò non solo garantisce la superadditività del gioco, ma anche una situazione di additività sulla tratta Nordfjordeid - Genova - Goteborg.

(d) Poiché si tratta di gioco "piccolo" (i giocatori sono tre) il valore Shapley può essere facilmente calcolato con la formula dei "contributi marginali". Ometto i calcoli, che non presentano alcuna difficoltà.

- Per $k < 340$ il valore Shapley è
$$\Phi(v) = \left(150, 120+\frac{k}{2}, 170+\frac{k}{2}\right)$$
(appartiene al nucleo)
- Per $k \geq 340$ il valore Shapley è
$$\Phi(v) = (150, 290, 340)$$
(appartiene al nucleo)

3 Votazioni nel Consiglio di Sicurezza dell'ONU

Bibliografia

La domanda (a) è tratta da [Ferguson, cap. IV, es. 11, pag. 18]
La domanda (b) è inventata.

Testo

Il Consiglio di Sicurezza delle Nazioni Unite è costituito da 15 Stati, di cui 5 sono Membri Permanenti. Una delibera è approvata quando riceve il voto favorevole di tutti i Membri Permanenti ed almeno altri 4 voti favorevoli. Volendo si può pensare ad un gioco in cui ognuno dei Membri Permanenti ha un voto di peso 7, ognuno dei Membri non permanenti ha un voto di peso 1, ed è richiesto il raggiungimento di una soglia minima di 39 voti.

(a) Calcolare il valore Shapley del gioco.

(b) Siano $p, m \in \mathbf{Z}$, con $0 \leq p \leq m \leq 15$. Calcolare il valore di Shapley del gioco, nell'ipotesi in cui il numero di Stati con potere di veto sia p ed il numero minimo di voti favorevoli richiesti sia m.

Soluzione

(a) Trattandosi di un gioco semplice, si può applicare la formula di Shapley-Shubik.

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{P}(i)} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}$$

ove

$$\mathcal{P}(i) = \{S \subseteq N : \quad v(S) = 1\,, \quad v(S - \{i\}) = 0\}$$

In questo caso i giocatori sono 15 e sarebbe troppo complesso procedere come in alcuni dei precedenti esercizi, cioè considerare tutte le possibili coalizioni, con l'ausilio di un foglio di calcolo. La forte simmetria del problema consente comunque di trovare il valore Shapley sfruttando semplici nozioni di calcolo combinatorio.

Sia i uno Stato senza potere di veto. Una coalizione S soddisfa le due proprietà $v(S) = 1$ e $v(S - \{i\}) = 0$ se e solo se si verificano le seguenti condizioni:

- S è costituita da almeno 9 Stati
  (se così non fosse, si avrebbe $v(S) = 0$);
- S è costituita da meno di 10 Stati
  (se così non fosse, si avrebbe $v(S) = v(S - \{i\})$);
- S contiene i
  (se così non fosse, si avrebbe $v(S) = v(S - \{i\})$);
- S contiene i 5 Stati con potere di veto
  (se così non fosse, si avrebbe $v(S) = 0$).

Pertanto è sufficiente contare quante sono le coalizioni costituite dai 5 Stati con potere di veto, dallo Stato i e da 3 qualunque fra i rimanenti 9 Stati. Esse sono

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$

Pertanto

$$\Phi_i(v) = \binom{9}{3} \cdot \frac{(9-1)!(15-9)!}{15!} = \frac{4}{2145} \sim 0.0019$$

Le proprietà di simmetria e di efficienza del valore Shapley consentono di calcolare immediatamente la componente $\Phi_i(v)$ quando i è uno Stato con potere di veto:

$$\Phi_i(v) = \frac{1}{5}\left(1 - 10 \cdot \frac{4}{2145}\right) = \frac{421}{2145} \sim 0.1963$$

In particolare osservo che, se j è uno Stato con potere di veto e i è uno Stato senza potere di veto, si ha:

$$\frac{\Phi_j}{\Phi_i} = \frac{421}{4} = 105.25$$

Segnalo che esistono dei software (ad es. [Moretti]) che consentono di risolvere questo tipo di problemi evitando di fare "a mano" i calcoli.

(b) Si può ripetere il ragionamento fatto nel punto precedente.
Se i è uno Stato senza potere di veto:

$$\Phi_i(v) = \binom{15-p-1}{m-p-1} \cdot \frac{(m-1)!(15-m)!}{15!}$$

Se j è uno Stato con potere di veto:

$$\Phi_j(v) = \frac{1}{p}\left[1 - (15-p) \cdot \binom{15-p-1}{m-p-1} \cdot \frac{(m-1)!(15-m)!}{15!}\right]$$

In Appendice C allego la stampa di un foglio di calcolo, che mostra i risultati numerici, in particolare il quoziente $\frac{\Phi_j}{\Phi_i}$, al variare di p e m.

4 Alcune domande inerenti il gioco dell'aeroporto

Riferimenti bibliografici

Le domande (a) e (b) di questo esercizio sono tratte da [Ferguson, cap. IV, es. 15, pag.19]. Le domande (c) e (d) sono tratte da [Patrone, problema 48, pag. 244].

Testo

Si consideri un aeroporto in cui avvengono, in un certo intervallo di tempo, n atterraggi da parte di n aerei differenti. Denotiamo con $1, \dots, n$ gli aerei, ordinati dal più piccolo al più grande. Sia c_j il costo fisso (relativo all'intervallo di tempo considerato) di una pista di atterraggio idonea ad accogliere l'aereo j. Per le ipotesi fatte si ha $0 < c_1 < c_2, \dots < c_n$. Sia v la funzione caratteristica del gioco dell'aeroporto.

(a) Per ogni $k = 1, 2, \dots, n$ si consideri il gioco (R_k, v_k), ove:

$$R_k = \{k, k+1, \dots, n\}$$

$$v_k(S) = \begin{cases} -(c_k - c_{k-1}) & \text{se } S \cap R_k \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } S \cap R_k = \emptyset \end{cases}$$

(il testo non lo dice, ma suppongo si debba porre convenzionalmente $c_0 = 0$).
Dimostrare che

$$v = \sum_{k=1}^{n} v_k$$

(b) Calcolare il valore Shapley del gioco dell'aeroporto.

(c) Si consideri un aeroporto in cui avvengono, ogni anno, un atterraggio di un piccolo aereo ed un atterraggio di un grande aereo. La pista dura 10 anni e costa 100 milioni se lunga quanto serve per l'aereo piccolo e 200 milioni se va bene per entrambi. Trascuriamo fattori si sconto e spalmiamo la cifra occorrente su 10 anni. Calcolare il valore Shapley del gioco, considerato su un arco temporale di un anno.

(d) Calcolare il valore Shapley del gioco, considerato su un arco temporale di due anni.

Soluzione

(a) Se S è la coalizione vuota, evidentemente si ha

$$\sum_{k=1}^{n} v_k(S) = 0 = v(S)$$

Siano S una coalizione non vuota ed m il massimo di S. L'intersezione fra S e R_k è vuota se e solo se $k \geq m+1$. Pertanto:

$$\sum_{k=1}^{n} v_k(S) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} v_k(S) + \sum_{k=m+1}^{n} v_k(S) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (c_{k-1} - c_k) + \sum_{k=m+1}^{n} (0) =$$

$$= c_0 - c_m - c_0 =$$

$$= 0 - c_m =$$

$$= -\max\{c_i : \quad i \in S\} =$$

$$= v(S)$$

(b) Il testo suggerisce di sfruttare l'additività del valore Shapley. Sia allora k un intero compreso fra 0 e n. Calcolo il valore Shapley per il gioco (N, v_k). La notevole simmetria del problema suggerisce di utilizzare le proprietà del valore Shapley, piuttosto che alle formule che consentono di calcolarlo.

Sia i un intero compreso fra 0 e $k-1$. Poiché $i \notin R_k$, si ha

$$S \cap R_k = (S \cup i) \cap R_k$$

e quindi

$$v_k(S) = v_k(S \cup i)$$

In altre parole, i è un dummy player e, per le proprietà assiomatiche del valore Shapley:

$$\Phi_i(v_k) = 0.$$

Sia ora i un intero compreso fra k e n. Allora per ogni coalizione S si ha

$$v_k(S \cup \{i\}) = -c_k + c_{k-1}$$

Il valore a II membro non dipende da i. Pertanto, per l'assioma di simmetria del valore Shapley, dovrà essere

$$\Phi_i(v_k) = \Phi_j(v_k) \qquad \forall\, i, j \;:\quad k \leq i, j \leq m$$

Il valore di $\Phi_i(v_k)$ può essere allora calcolato sfruttando la proprietà di efficienza del valore Shapley:

$$\begin{aligned}
&\Phi_i(v_k) = \\
&= \frac{1}{n-k+1} \sum_{j=k}^{n} \Phi_i(v_k) = \\
&= \frac{1}{n-k+1} \left(\sum_{j=1}^{n} \Phi_i(v_k) - \sum_{j=1}^{k-1} \Phi_i(v_k) \right) = \\
&= \frac{1}{n-k+1} \left(v(N) - \sum_{j=1}^{k-1} 0 \right) = \\
&= \frac{1}{n-k+1} \left(c_{k-1} - c_k \right)
\end{aligned}$$

Ricapitolando, le componenti del valore Shapley del gioco (N, v_k) sono:

- se $1 \leq i \leq k-1$:
  $$\Phi_i(v_k) = 0$$
- se $k \leq i \leq n$:
  $$\Phi_i(v_k) = \frac{1}{n-k+1} \left(c_{k-1} - c_k \right)$$

È ora possibile sfruttare l'additività per calcolare il valore Shapley del gioco dell'aeroporto. Per ogni i compreso fra 1 e n:

$$\Phi_i(v) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_i(v_k) = \sum_{k=1}^{i} \frac{c_{k-1} - c_k}{n-k+1}$$

(c) Se si considera un arco temporale di un anno, si ha un gioco con due giocatori, con $c_1 = 10\,000\,000$ e $c_2 = 20\,000\,000$. Le componenti del valore Shapley sono

$$\Phi_1(v) = \sum_{k=1}^{1} \frac{c_{k-1} - c_k}{3-k} = \frac{-10\,000\,000}{2} = -5\,000\,000$$

$$\Phi_2(v) = \sum_{k=1}^{2} \frac{c_{k-1} - c_k}{3-k} = \frac{-10\,000\,000}{2} + \frac{-10\,000\,000}{1} = -15\,000\,000$$

(d) Se si considera un arco temporale di due anni, si ha un gioco con quattro giocatori (ad es. i giocatori 1 e 3 siano gli atterraggi degli aerei piccoli ed i giocatori 2 e 4 siano gli atterraggi degli aerei grandi). Le componenti del valore Shapley relative ai giocatori 1 e 2 continuano ad essere $-5\,000\,000$ e $-15\,000\,000$. Per simmetria anche le componenti 3 e 4 sono, rispettivamente, $-5\,000\,000$ e $-15\,000\,000$.

5 Caratterizzazione del nucleo di un gioco semplice

Riferimenti bibliografici

[Ferguson, es. 17 pag. IV-19] e [Patrone, problema 46, pag. 244]

Nota: in origine ho risolto questo esercizio nella forma presentata in [Ferguson]. Tuttavia, dopo aver risolto l'esercizio mi rimaneva qualche perplessità sulla definizione di "giocatore con potere di veto", che per Ferguson è un giocatore i tale che $v(N-\{i\}) = 0$. Mi sono poi reso conto che la definizione di Ferguson sottintende la superadditività del gioco. Pertanto ho deciso di rielaborare il lavoro fatto, facendo un mix fra le domande poste in [Patrone, problema 46], le domande poste da [Ferguson], ed aggiungendo la domanda [b], che mi sono... posto da solo!

Testo

In un gioco semplice (N, v), un giocatore i è detto "giocatore con potere di veto" se $v(N - \{i\}) = 0$.

(a) Esprimere in termini formali cosa vuol dire che un giocatore ha "potere di veto".

(b) Esibire un esempio reale (cioè non un esempio puramente insiemistico, ma un esempio tratto dalla vita di tutti i giorni) di gioco semplice in cui esista un giocatore i che non abbia potere di veto ma tale che $v(N - \{i\}) = 0$.

(c) Caratterizzare il nucleo di un gioco semplice.

Soluzione

(a) Secondo [Ferguson] un giocatore ha potere di veto se $v(N - \{i\}) = 0$. Tuttavia mi pare che tale definizione sottintenda, da parte di Ferguson, l'assunzione che il gioco sia superadditivo. In un gioco semplice generico (non necessariamente superadditivo) mi sembra più corretto dire che *un giocatore i ha potere di veto se, per ogni coalizione S, con $i \notin S$, si ha* $v(S) = 0$.

(b) Considero il seguente gioco, ispirato dai criteri che dovrebbero stare alla base della costituzione di una maggioranza parlamentare in seguito ad elezioni politiche. Le ipotesi che assumo sono le seguenti (probabilmente poco realistiche con l'attuale sistema maggioritario).

- Esistono n partiti (i giocatori), che possono essere totalmente ordinati con il seguente criterio: i precede j se e solo se il partito i è più "a sinistra" (nel senso politico del termine) del partito j.
- Le coalizioni si formano a posteriori, dopo le elezioni.
- Sia p_i la percentuale di seggi assegnati al partito i. Per ogni coalizione S si pone $v(S) = 1$ se e solo se si verificano simultaneamente le seguenti condizioni:
  - S ha la maggioranza assoluta dei voti in Parlamento:
    $$\sum_{i \in S} p_i > 50\%$$
  - S è costituita da partiti con ideologie "adiacenti":
    $$S = \mathbf{Z} \cap [\min S, \max S]$$
  - S contiene il numero di partiti strettamente indispensabile a raggiungere la maggioranza:
    $$\sum_{i \in S - \{\min S\}} p_i \leq 50\% \qquad , \qquad \sum_{i \in S - \{\max S\}} p_i \leq 50\%$$
    (perché includere un partito nella coalizione, e quindi rinunciare ad una "fetta" di potere, se si può raggiungere la maggioranza anche senza?)

  Se almeno una di queste condizioni non è soddisfatta, si pone $v(S) = 0$ (la coalizione non si può formare).
  Inoltre si pone, per definizione, $v(N) = 1$. Da un punto di vista della Teoria dei Giochi ciò è fatto per soddisfare l'ipotesi che, nei giochi semplici, sia $v(N) = 1$. Da un punto di vista "politico" la coalizione N si può interpretare come "governo tecnico di transizione", "governo delle grandi intese", ecc.

È evidente che, in generale, si tratta di un gioco semplice non superadditivo e che può accadere che un giocatore i che non abbia potere di veto, ma $v(N - \{i\}) = 0$.

(c) Sia P l'insieme dei giocatori con diritto di veto. Siano n e p, rispettivamente, il numero di elementi di N ed il numero di elementi di P. Il nucleo può essere caratterizzato come segue.

- se $p = 0$:
  $$\text{nucleo}(v) = \emptyset$$
- se $p \neq 0$:
  $$\text{nucleo}(v) = \left\{ (x_i)_{i \in N} \; : \; \sum_{i \in N} x_i = 1; \; x_i = 0 \, \forall i \notin P; \; x_i \geq 0 \, \forall i \in N \right\}$$
  (è un politopo di dimensione $p - 1$).

Svolgo la dimostrazione in tre passi.

<u>Passo 1 (caso $p \neq 0$, inclusione " $\supseteq$")</u>

Sia $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un'allocazione che soddisfa le condizioni

$$\sum_{i \in N} x_i = 1$$

$$x_i = 0 \quad \forall i \in P$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in N$$

Bisogna provare che x appartiene al nucleo.

La condizione di razionalità collettiva è evidentemente verificata. Dobbiamo verificare la condizione di razionalità intermedia, per ogni $S \subseteq N$. Distinguiamo due sottocasi.

- Sia $S \supseteq P$. Allora si avrà:

$$\sum_{j \in S} x_j =$$

$$= \sum_{j \in N} x_j - \sum_{j \in N-S} x_j =$$

$$= 1 - 0 = 1 = \geq v(S)$$

(poiché $v(S) \in \{0, 1\}$).

- Sia $S \not\supseteq P$. Allora esiste un giocatore k, con potere di veto, che non appartiene a S. Pertanto $v(S) = 0$ e:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq 0 = v(S)$$

(poiché $x_i \geq 0 \quad \forall i \in N$).

<u>Passo 2 (caso $p \neq 0$, inclusione " $\subseteq$")</u>

Sia $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un'allocazione appartenente al nucleo. Essa soddisfa le condizioni di razionalità collettiva ed intermedia:

$$\sum_{i \in N} x_i = 1$$

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall S \subseteq N$$

Dobbiamo provare che

$$\sum_{i \in N} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i \in N$$

$$x_i = 0 \quad \forall i \notin P$$

Le prime due condizioni sono evidentemente soddisfatte (si tratta della razionalità collettiva e della razionalità individuale). Dimostriamo la terza.
Sia dunque $k \in N - P$. Supponiamo, per assurdo, che $x_k \neq 0$. Allora, per ogni coalizione S non contenente k, si ha:

$$v(S) \leq \sum_{j \in S} x_j \leq \sum_{j \in N-\{k\}} x_j = 1 - x_k < 1$$

e quindi, poiché il gioco è semplice,

$$v(S) = 0$$

Ciò contraddice l'ipotesi che k non sia un giocatore con potere di veto.

Passo 3 (caso $p = 0$) Supponiamo, per assurdo, che il nucleo non sia vuoto. Allora, procedendo come nel "passo 2", si ricava

$$x_i = 0 \quad \forall i \notin P.$$

In questo caso si ha $P = \emptyset$, pertanto:

$$x_i = 0 \quad \forall i \in N$$

Ciò è in contraddizione con la condizione di razionalità collettiva

$$\sum_{i \in N} x_i = 1$$

Pertanto il nucleo è vuoto.

6 Bibliografia

- [**Banzhaf**]: John Banzhaf, "Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis", Rutgers Law Review 19 (1965), 317–343

  Si tratta dell'articolo in cui è stato introdotto l'indice di potere, che ha poi preso il nome di "indice di Banzhaf", sulla base del quale la Contea di Nassau (NY) ha istituito il proprio sistema di voto (esercizio 1).

- [**Ferguson**]: Thomas Ferguson, "Game Theory", testo disponibile online, http://www.math.ucla.edu/∼ tom/Game_Theory/Contents.html

  È la fonte di alcuni degli esercizi risolti in queste pagine. Ringrazio Silvia Villa per avermi segnalato questo testo.

- [**Moretti**]: Stefano Moretti, software online per il calcolo degli indici di potere, disponibile sulla pagina web http://www.diptem.unige.it/patrone

  Con questo software è possibile evitare di fare "a mano" alcuni dei calcoli effettuati in queste pagine (ad esempio quelli dell'esercizio 3).

- [**Patrone**]: Fioravante Patrone, "Decisori (razionali) interagenti. Una introduzione alla teoria dei giochi", Ed. Plus (2006)

  È il testo di riferimento per le notazioni adottate, nonché la fonte degli esercizi, insieme a [Ferguson]. Ringrazio l'autore, Fioravante Patrone, per aver letto la prima versione di questi appunti ed avermi suggerito modifiche e correzioni.

7 Appendici

Appendice A

Calcolo dell'indice di Shapley-Shubik per l'esercizio 1

	dati								shapley					
	H1	H2	OB	NH	LB	GC	min		H1	H2	OB	NH	LB	GC
	31	31	28	21	2	2	63		17/60	17/60	13/60	7/60	1/20	1/20
	64 coalizioni								calcoli per shapley					
0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	31		0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	31		0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0	62		0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	28		0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	59		0	0	0	0	0	0
6	0	1	1	0	0	0	59		0	0	0	0	0	0
7	1	1	1	0	0	0	90		1/60	1/60	1/60	0	0	0
8	0	0	0	1	0	0	21		0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0	0	52		0	0	0	0	0	0
10	0	1	0	1	0	0	52		0	0	0	0	0	0
11	1	1	0	1	0	0	83		1/60	1/60	0	1/60	0	0
12	0	0	1	1	0	0	49		0	0	0	0	0	0
13	1	0	1	1	0	0	80		1/60	0	1/60	1/60	0	0
14	0	1	1	1	0	0	80		0	1/60	1/60	1/60	0	0
15	1	1	1	1	0	0	111		0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	1	0	2		0	0	0	0	0	0
17	1	0	0	0	1	0	33		0	0	0	0	0	0
18	0	1	0	0	1	0	33		0	0	0	0	0	0
19	1	1	0	0	1	0	64		1/60	1/60	0	0	1/60	0
20	0	0	1	0	1	0	30		0	0	0	0	0	0
21	1	0	1	0	1	0	61		0	0	0	0	0	0
22	0	1	1	0	1	0	61		0	0	0	0	0	0
23	1	1	1	0	1	0	92		1/60	1/60	0	0	0	0
24	0	0	0	1	1	0	23		0	0	0	0	0	0
25	1	0	0	1	1	0	54		0	0	0	0	0	0
26	0	1	0	1	1	0	54		0	0	0	0	0	0
27	1	1	0	1	1	0	85		1/60	1/60	0	0	0	0
28	0	0	1	1	1	0	51		0	0	0	0	0	0
29	1	0	1	1	1	0	82		1/60	0	1/60	1/60	0	0
30	0	1	1	1	1	0	82		0	1/60	1/60	1/60	0	0
31	1	1	1	1	1	0	113		0	0	0	0	0	0

32	0	0	0	0	0	1	2		0	0	0	0	0	0
33	1	0	0	0	0	1	33		0	0	0	0	0	0
34	0	1	0	0	0	1	33		0	0	0	0	0	0
35	1	1	0	0	0	1	64		1/60	1/60	0	0	0	1/60
36	0	0	1	0	0	1	30		0	0	0	0	0	0
37	1	0	1	0	0	1	61		0	0	0	0	0	0
38	0	1	1	0	0	1	61		0	0	0	0	0	0
39	1	1	1	0	0	1	92		1/60	1/60	0	0	0	0
40	0	0	0	1	0	1	23		0	0	0	0	0	0
41	1	0	0	1	0	1	54		0	0	0	0	0	0
42	0	1	0	1	0	1	54		0	0	0	0	0	0
43	1	1	0	1	0	1	85		1/60	1/60	0	0	0	0
44	0	0	1	1	0	1	51		0	0	0	0	0	0
45	1	0	1	1	0	1	82		1/60	0	1/60	1/60	0	0
46	0	1	1	1	0	1	82		0	1/60	1/60	1/60	0	0
47	1	1	1	1	0	1	113		0	0	0	0	0	0
48	0	0	0	0	1	1	4		0	0	0	0	0	0
49	1	0	0	0	1	1	35		0	0	0	0	0	0
50	0	1	0	0	1	1	35		0	0	0	0	0	0
51	1	1	0	0	1	1	66		1/60	1/60	0	0	0	0
52	0	0	1	0	1	1	32		0	0	0	0	0	0
53	1	0	1	0	1	1	63		1/60	0	1/60	0	1/60	1/60
54	0	1	1	0	1	1	63		0	1/60	1/60	0	1/60	1/60
55	1	1	1	0	1	1	94		0	0	0	0	0	0
56	0	0	0	1	1	1	25		0	0	0	0	0	0
57	1	0	0	1	1	1	56		0	0	0	0	0	0
58	0	1	0	1	1	1	56		0	0	0	0	0	0
59	1	1	0	1	1	1	87		1/30	1/30	0	0	0	0
60	0	0	1	1	1	1	53		0	0	0	0	0	0
61	1	0	1	1	1	1	84		1/30	0	1/30	0	0	0
62	0	1	1	1	1	1	84		0	1/30	1/30	0	0	0
63	1	1	1	1	1	1	115		0	0	0	0	0	0

Appendice B

Calcolo dei valori assunti dalla funzione f introdotta nell'esercizio 1(d)

	H1	H2	O	N	L	G	f
	31	31	28	21	2	2	
	27%	27%	24%	18%	2%	2%	
1	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0,0719
2	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0,0719
3	7/30	7/30	7/30	7/30	1/30	1/30	0,0058
4	7/30	7/30	7/30	7/30	1/30	1/30	0,0058
5	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
6	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
7	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
8	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
9	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
10	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
11	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
12	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
13	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
14	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
15	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
16	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
17	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
18	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
19	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
20	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
21	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
22	17/60	17/60	17/60	1/12	1/30	1/30	0,0123
23	17/60	17/60	17/60	1/12	1/30	1/30	0,0123
24	19/60	19/60	19/60	1/60	1/60	1/60	0,0373
25	19/60	19/60	19/60	1/60	1/60	1/60	0,0373
26	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0,0502
27	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0,0502
28	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0,0502
29	11/30	11/30	1/6	1/30	1/30	1/30	0,0475
30	11/30	11/30	1/6	1/30	1/30	1/30	0,0475
31	2/5	2/5	1/10	1/15	1/60	1/60	0,0681
32	4/15	4/15	1/6	2/15	1/12	1/12	0,0170
33	17/60	17/60	3/20	3/20	1/15	1/15	0,0150
34	1/4	1/4	13/60	13/60	1/30	1/30	0,0032
35	1/4	1/4	13/60	13/60	1/30	1/30	0,0032
36	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
37	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
38	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
39	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
40	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
41	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
42	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
43	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
44	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
45	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
46	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
47	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
48	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
49	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
50	4/15	4/15	13/60	13/60	1/60	1/60	0,0019
51	4/15	4/15	13/60	13/60	1/60	1/60	0,0019
52	3/10	3/10	11/60	11/60	1/60	1/60	0,0055
53	17/60	17/60	13/60	7/60	1/20	1/20	0,0076
54	19/60	19/60	1/5	1/10	1/30	1/30	0,0137
55	19/60	19/60	4/15	1/30	1/30	1/30	0,0278
56	19/60	19/60	4/15	1/30	1/30	1/30	0,0278
57	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0,0502

58	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0,0502
59	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0,0502
60	19/60	19/60	4/15	1/30	1/30	1/30	0,0278
61	19/60	19/60	4/15	1/30	1/30	1/30	0,0278
62	19/60	19/60	1/5	1/10	1/30	1/30	0,0137
63	17/60	17/60	13/60	7/60	1/20	1/20	0,0076
64	3/10	3/10	11/60	11/60	1/60	1/60	0,0055
65	4/15	4/15	13/60	13/60	1/60	1/60	0,0019
66	4/15	4/15	13/60	13/60	1/60	1/60	0,0019
67	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
68	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
69	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
70	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
71	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
72	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
73	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
74	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
75	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
76	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
77	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
78	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
79	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
80	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
81	1/4	1/4	13/60	13/60	1/30	1/30	0,0032
82	1/4	1/4	13/60	13/60	1/30	1/30	0,0032
83	17/60	17/60	3/20	3/20	1/15	1/15	0,0150
84	4/15	4/15	1/6	2/15	1/12	1/12	0,0170
85	2/5	2/5	1/10	1/15	1/60	1/60	0,0681
86	11/30	11/30	1/6	1/30	1/30	1/30	0,0475
87	11/30	11/30	1/6	1/30	1/30	1/30	0,0475
88	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0,0502
89	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0,0502
90	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0,0502
91	19/60	19/60	19/60	1/60	1/60	1/60	0,0373
92	19/60	19/60	19/60	1/60	1/60	1/60	0,0373
93	17/60	17/60	17/60	1/12	1/30	1/30	0,0123
94	17/60	17/60	17/60	1/12	1/30	1/30	0,0123
95	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
96	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
97	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
98	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
99	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
100	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
101	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
102	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
103	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
104	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
105	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
106	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
107	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
108	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
109	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
110	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
111	1/4	1/4	1/4	1/4	0	0	0,0060
112	7/30	7/30	7/30	7/30	1/30	1/30	0,0058
113	7/30	7/30	7/30	7/30	1/30	1/30	0,0058
114	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0,0719
115	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0,0719

Appendice C

Calcolo del rapporto fra il potere di uno Stato Membro Permanente ed il potere di uno Stato non Membro Permanente (esercizio 3)

		m														
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
	1	infinito	196	91	56	39	28	21	16	12	9	7	5	4	2	1
	2	-	infinito	676	221	107	62	39	26	18	12	9	6	4	2	1
	3	-	-	infinito	1816	451	178	87	48	29	18	11	7	4	2	1
	4	-	-	-	infinito	3751	748	248	105	51	27	15	9	5	3	1
	5	-	-	-	-	infinito	6004	999	284	105	46	22	11	6	3	1
	6	-	-	-	-	-	infinito	7506	1071	267	88	34	15	7	3	1
	7	-	-	-	-	-	-	infinito	7353	918	203	60	21	8	3	1
p	**8**	-	-	-	-	-	-	-	infinito	5630	625	124	33	11	4	1
	9	-	-	-	-	-	-	-	-	infinito	3336	333	60	15	4	1
	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	infinito	1501	136	22	5	1
	11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	infinito	496	41	6	1
	12	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	infinito	114	9	1
	13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	infinito	16	1
	14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	infinito	1
	15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	infinito