Oligopolio

Appunti a cura di
Lucia PUSILLO e Silvia VILLA

dal sito:

Decisori (razionali) interagenti

Versione del 27 marzo 2007

Indice

1 Il modello di duopolio di Cournot (1838)

Due imprese chiamate impresa I e impresa II producono uno stesso bene, e devono decidere simultaneamente la quantità di bene da produrre. Supponiamo che non ci siano costi fissi e che il costo per produrre un'unità di bene sia una costante $c > 0$, la stessa per entrambe le imprese.

Assumiamo inoltre che il prezzo per unità di bene sia legato nel seguente modo alle quantità q_1 e q_2 di bene che le imprese I e II producono rispettivamente, per un totale di $Q = q_1 + q_2$:

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & se \;\; Q \leq a \\ 0 & se \;\; Q > a, \end{cases}$$

dove $a > 0$ è una costante.

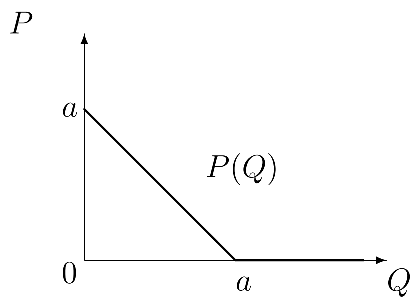


Figura 1

Il profitto dell' impresa i sarà quindi dato da

$$u_i(q_1, q_2) = P(Q)q_i - cq_i.$$

Supponiamo che $c < a$, altrimenti il prezzo di mercato per unità di bene, essendo minore o uguale ad a, non supererebbe mai il costo di produzione (il che renderebbe piuttosto banale il problema). Il modello di Cournot dà un' interpretazione di tale situazione come un gioco in forma normale in cui:

- i **giocatori** sono le due imprese;
- le **strategie** a disposizione dell'impresa i sono le possibili quantità di merce prodotta $q_i \geq 0$ ($i = 1, 2$);
- le **funzioni di utilità** delle imprese coincidono con le funzioni u_i per $i = 1, 2$.

Si noti, in particolare, che assumiamo coincidenza fra la funzione di utilità che usiamo per rappresentare le preferenze dei due giocatori ed i loro guadagni. Per trovare un equilibrio di Nash di tale gioco, è necessario trovare una coppia di strategie (q_1^*, q_2^*) in modo che ciascuna strategia sia per ciascun giocatore una miglior risposta alla strategia dell'altro. Osserviamo che, fissata una quantità q_2 prodotta dalla seconda impresa la miglior risposta dell'impresa I consiste nel produrre una quantità $R_I(q_2)$ tale che

$$u_1(R_I(q_2), q_2) = \max_{q_1 \in [0,+\infty)} u_1(q_1, q_2).$$

Dalle ipotesi fatte risulta

$$u_1(q_1, q_2) = (P(Q) - c)q_1 = \begin{cases} -q_1^2 + (a - c - q_2)q_1 & \text{se } q_1 \leq a - q_2 \\ -cq_1 & \text{se } q_1 > a - q_2. \end{cases}$$

Se $q_2 < a - c$ la situazione è quella rappresentata nel disegno sottostante.

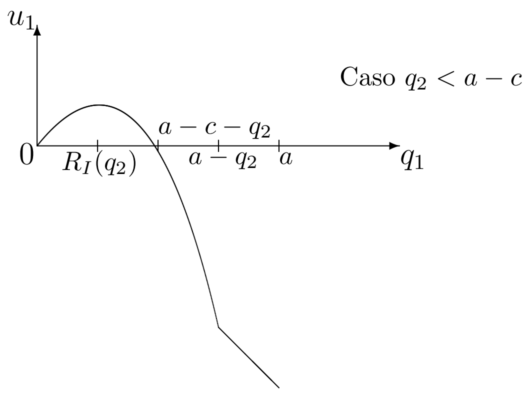


Figura 2

Pertanto la miglior risposta dell'impresa I alla strategia q_2 dell'impresa II è la quantità che corrisponde al vertice della parabola, ed è $R_I(q_2) = (a - c - q_2)/2$. Se invece $q_2 \geq a - c$, si verifica facilmente che $u_1(q_1, q_2) < 0$ per ogni $q_1 > 0$ e $u_1(0, q_2) = 0$. Pertanto $R_I(q_2) = 0$ in questo caso. Essendo la situazione simmetrica, lo stesso ragionamento si può fare per l'impresa II, perciò possiamo concludere

$$R_I(q_2) = \begin{cases} \frac{a-c-q_2}{2} & \text{se } q_2 < a - c \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad R_{II}(q_1) = \begin{cases} \frac{a-c-q_1}{2} & \text{se } q_1 < a - c \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{1}$$

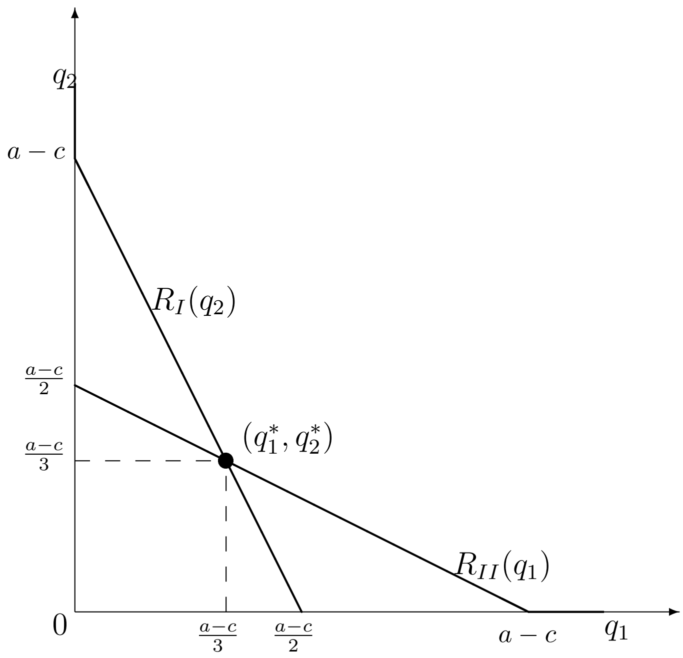


Figura 3

Esiste quindi un unico equilibrio di Nash, che coincide con l'intersezione tra i grafici delle funzioni di miglior risposta nel piano q_1q_2 e corrisponde quindi a $q_1^* = q_2^* = (a-c)/3$. Notiamo che all'equilibrio la quantità di bene prodotto è $2(a-c)/3$, per un profitto delle imprese $u_i(q_1^*, q_2^*) = (a-c)^2/9$ per $i = 1, 2$. Il prezzo è $(a+2c)/3$. Notare che, per l'ipotesi fatta che sia $c < a$, il prezzo di vendita è maggiore del costo unitario. Pertanto, ciascuna delle imprese realizza un profitto.

Supponiamo ora di essere in un regime di monopolio, cioè ad esempio che l'impresa II produca la quantità $q_2 = 0$. La miglior strategia in questo caso per l'impresa I, per quanto visto sopra, è produrre una quantità di bene $q_1 = (a-c)/2$ (quantità di monopolio), che corrisponde al profitto $u_1((a-c)/2, 0) = (a-c)^2/4$. Il prezzo sarà $(a+c)/2$ (si noti che il prezzo è maggiore di quello trovato prima nel caso del duopolio).

Osserviamo che se le due imprese potessero accordarsi per produrre ciascuna la metà di quella che abbiamo chiamato quantità di monopolio, e dividere il guadagno, il loro profitto sarebbe $(a-c)^2/8$, che è superiore al profitto nel caso di duopolio. Tuttavia, come si può facilmente verificare, tale situazione non rappresenta un equilibrio di Nash, dal momento che non è stabile. Infatti, se l'impresa I ad esempio decide di produrre metà della quantità di monopolio, produrre l'altra metà non è per l'impresa II la miglior risposta alla scelta di I (vedi Figura 3). Pertanto questo è un caso in cui l'equilibrio di Nash non è efficiente.

1.1 Metodo di eliminazione iterata delle strategie fortemente dominate

Nel modello di duopolio di Cournot l'unico equilibrio di Nash che abbiamo trovato si può ottenere anche eliminando iterativamente le strategie fortemente dominate. Al primo passo vogliamo trovare una strategia a_1 per l'impresa I che domina fortemente ogni altra strategia q, con $q > a_1$, cioè tale che $u_1(a_1, y) > u_1(q, y)$ per ogni $q > a_1$ e per ogni $y \in [0, +\infty)$. Dalla Figura 2 si vede che $q \mapsto u_1(q, y)$ è strettamente decrescente su $[(a - c - y)/2, +\infty)$ per ogni $y \in [0, +\infty)$, cioè che

$$u_1(q_1, y) > u_1(q, y)$$

per ogni $q > q_1 > (a - c - y)/2$ e per ogni $y \geq 0$. D'altra parte

$$\sup_{y \in [0,+\infty)} \frac{a - c - y}{2} = \frac{a - c}{2} := a_1$$

che pertanto domina fortemente[1] tutte le strategie $q > (a - c)/2$. Analogamente, poiché il gioco è simmetrico rispetto ai giocatori, otteniamo che tutte le strategie $y > (a - c)/2$ per l'impresa II sono fortemente dominate e possono essere cancellate. Il secondo passo consiste nel trovare b_1 strategia per I tale che

$$u_1(b_1, y) > u_1(q, y) \quad \forall y \in [0, \frac{a - c}{2}] \text{ e } \forall q \in [0, b_1).$$

[1]Presentiamo qui in nota lo stesso tipo di considerazioni, espresse però in altri termini, in modo che chi legge possa scegliere la strada che più gli aggrada... Come detto, $q \mapsto u_1(q, y)$ è strettamente decrescente su $[(a - c - y)/2, +\infty)$ per ogni $y \in [0, +\infty)$. Pertanto abbiamo che:

$$u_1(q', y) > u_1(q'', y) \quad \text{per} \quad q' \geq \frac{a - c - y}{2},\ q'' > q'.$$

Allora, essendo $\frac{a-c}{2} \geq \frac{a-c-y}{2}$ per ogni $y \in [0, +\infty)$, possiamo scegliere $q' = \frac{a-c}{2}$ e quindi ricavare:

$$u_1(\frac{a - c}{2}, y) > u_1(q'', y) \quad \text{per} \quad q'' > \frac{a - c}{2}.$$

Visto che questa relazione vale per ogni $y \in [0, +\infty)$, otteniamo per l'appunto che $\frac{a-c}{2}$ domina fortemente ogni $q'' > \frac{a-c}{2}$.

Naturalmente, un adattamento analogo può essere fatto per gli step successivi.

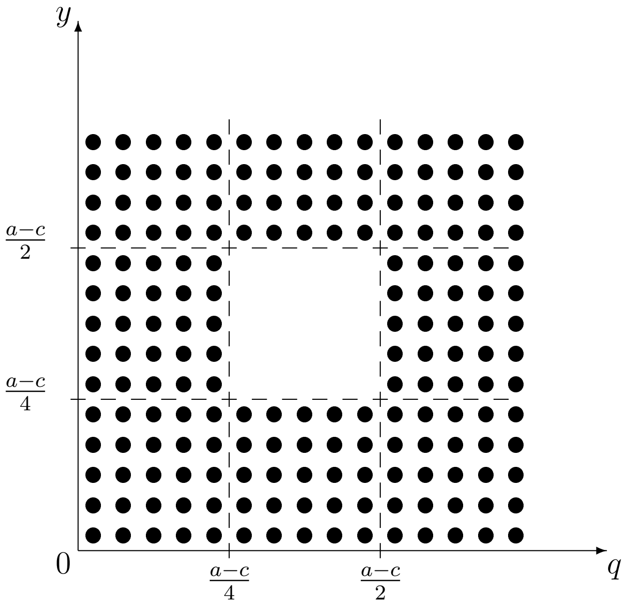
Ancora nella Figura 2 vediamo che $q \mapsto u_1(q,y)$ è strettamente crescente su $[0,(a-c-y)/2]$ per ogni $y \geq 0$ e pertanto

$$u_1(\frac{a-c-y}{2},y) > u_1(q_1,y) > u_1(q,y)$$

per ogni $q < q_1 < (a-c-y)/2$ e per ogni $y \geq 0$. Inoltre

$$\inf_{y\in[0,(a-c)/2)} \frac{a-c-y}{2} = \frac{a-c}{4} := b_1$$

che quindi domina fortemente tutte le strategie $q < (a-c)/4$. La situazione è quindi la seguente



Vogliamo determinare ora a_n e b_n per $n > 1$ strategie per l'impresa I in modo che

- a_n domini fortemente ogni strategia $q \in (a_n, a_{n-1}]$ per ogni $y \in [b_{n-1}, a_{n-1}]$;
- b_n domini fortemente ogni strategia $q \in [b_{n-1}, b_n)$ per ogni $y \in [b_{n-1}, a_n]$.

In maniera analoga al primo passo quindi vogliamo trovare una strategia a_n per l'impresa I tale che $u_1(a_n,y) > u_1(q,y)$ per ogni $a_n < q \leq a_{n-1}$ e per ogni $y \in [b_{n-1}, a_{n-1}]$ (lo stesso sarà valido in maniera simmetrica per l'impresa II). Nuovamente dalla Figura 2 si vede che

$$u_1(\frac{a-c-y}{2},y) > u_1(q_1,y) > u_1(q,y)$$

per ogni $q > q_1 > (a - c - y)/2$ e per ogni $y \geq 0$. D'altra parte

$$\sup_{y \in [b_{n-1}, a_{n-1}]} \frac{a - c - y}{2} = \frac{a - c - b_{n-1}}{2} := a_n.$$

Analogamente

$$b_n = \inf_{y \in [b_{n-1}, a_n]} \frac{a - c - y}{2} = \frac{a - c - a_n}{2}.$$

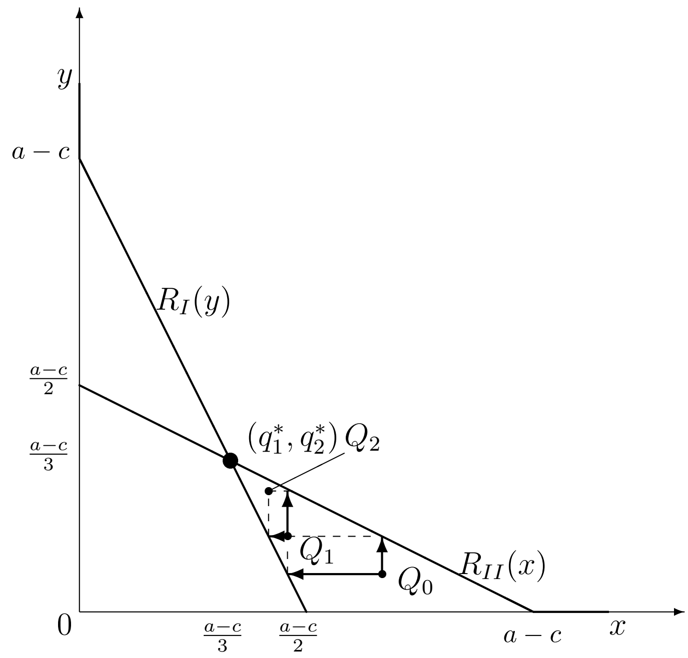
Pertanto abbiamo ottenuto due successioni limitate, definite per ricorrenza, con a_n decrescente e b_n crescente. Tali successioni ammettono limiti rispettivamente L e l che devono soddisfare

$$\begin{cases} L = \frac{a-c-l}{2} \\ l = \frac{a-c-L}{2} \end{cases}$$

da cui deduciamo che $L = l = (a - c)/3$. Quindi il procedimento di eliminazione delle strategie fortemente dominate porta ad un'unica coppia di strategie che ovviamente coincide con l'unico equilibrio di Nash trovato prima.

1.2 La dinamica di best-reply

Consideriamo una successione discreta di tempi $t = 0, 1, 2, \ldots$ e scegliamo una situazione iniziale $Q_0 = (x_0, y_0)$ in cui supponiamo che le imprese adottino due strategie arbitrarie. La dinamica di miglior risposta funziona nel modo seguente: al tempo successivo, $t = 1$ ciascuna impresa sceglie la miglior risposta alla scelta precedente dell'impresa concorrente. Nel nostro caso si ha $Q_1 = (R_I(y_0), R_{II}(x_0))$. Si può quindi definire per ricorrenza una successione di profili di strategie Q_t. La questione interessante è che nel caso del duopolio di Cournot, la successione Q_t converge proprio all'equilibrio stesso, per qualunque stato iniziale scelto. In particolare, se il punto di partenza è l'equilibrio di Nash, allora la successione sopra descritta è costante. Rappresentiamo graficamente quanto appena detto.



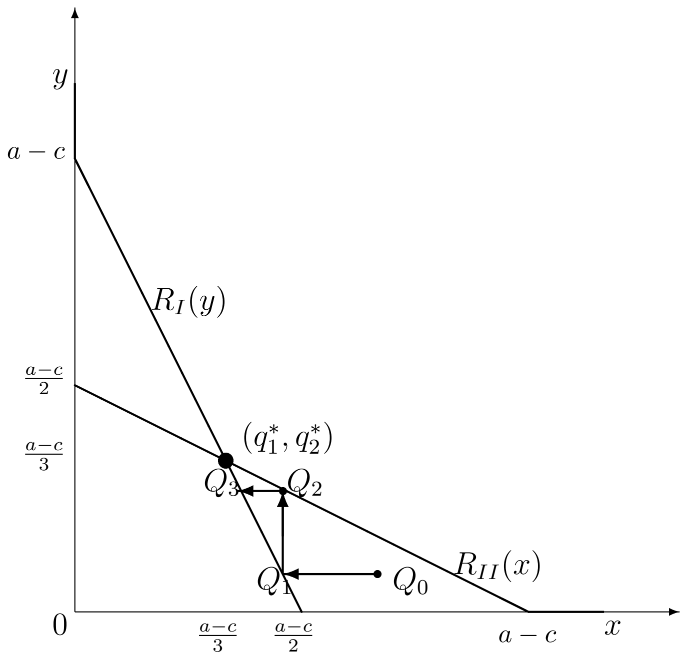
Un'altra dinamica piuttosto naturale che possiamo considerare è quella ottenuta analogamente a prima, ma considerando le miglior risposte a tempi "alternati", ovvero, fissati la base $Q_0 = (x_0, y_0)$ e una successione discreta di tempi $t = 0, 1, 2, \ldots$ possiamo costruire una successione di stadi $Q_n = (x_n, y_n)$ in questo modo:

$$\begin{cases} (x_1, y_1) = (R_I(y_0), y_0) \\ (x_2, y_2) = (x_1, R_{II}(x_1)) \end{cases}$$

e, in generale,

$$\begin{cases} (x_t, y_t) = (R_I(y_{t-1}), y_{t-1}) & \text{se } t \text{ è dispari} \\ (x_t, y_t) = (x_{t-1}, R_{II}(x_{t-1})) & \text{se } t \text{ è pari.} \end{cases}$$

In questo modo otteniamo una "ragnatela" che è di nuovo convergente all'equilibrio di Nash.



Notiamo come questa dinamica corrisponda a giocatori non molto intelligenti: quello che infatti loro fanno è scegliere la loro strategia in modo da massimizzare il profitto nel caso l'avversario giocasse esattamente come al tempo precedente, come se si aspettassero che l'avversario non cambiasse la propria strategia.

2 Il modello di Bertrand

Nel modello di Cournot ogni impresa sceglie la quantità di bene da produrre, mentre il prezzo è determinato dalla domanda di mercato. Nel 1883 Joseph Bertrand costruì un altro modello, differente da quello di Cournot, in cui due imprese decidono, indipendentemente e simultaneamente, i prezzi del loro prodotto, e producono una quantità di bene sufficiente a soddisfare la domanda. In questo modello la domanda è funzione del prezzo. Analogamente a quanto fatto per il modello di Cournot, supponiamo che non esistano costi fissi di produzione e che il costo marginale sia c. Anche in questo caso la situazione si può interpretare come un gioco in forma normale, in cui i giocatori sono le due imprese, le strategie sono i prezzi possibili, che variano in $[0, +\infty)$, e le funzioni di utilità sono date dal profitto. Consideriamo dapprima il caso in cui i prodotti delle due imprese siano indistinguibili e il consumatore scelga cosa acquistare solo in base al prezzo. Siano quindi p_1 e p_2 i prezzi scelti e $P = \min\{p_1, p_2\}$. La domanda del prodotto, in funzione del prezzo è data da

$$D(P) = (a - P)_+ = \begin{cases} a - P & \text{se } 0 \le P \le a \\ 0 & \text{se } P > a, \end{cases}$$

con $a > c$. Assumiamo che se le due imprese scelgono lo stesso prezzo, allora si dividono il mercato a metà, e che l'impresa che fissa il prezzo più alto non produca nulla. Le funzioni di utilità per le due imprese sono quindi

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_1 - c)(a - p_1)_+ \text{ se } p_1 < p_2 \\ (p_1 - c)(a - p_1)_+/2 \text{ se } p_1 = p_2 \\ 0 \text{ se } p_1 > p_2 \end{cases}$$

$$u_2(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_2 - c)(a - p_2)_+ \text{ se } p_2 < p_1 \\ (p_2 - c)(a - p_2)_+/2 \text{ se } p_1 = p_2 \\ 0 \text{ se } p_2 > p_1 \end{cases}$$

In questo caso c'è un solo equilibrio di Nash: la coppia (c, c), e in corrispondenza di tale equilibrio le imprese hanno utilità nulla! Verifichiamo dapprima che (c, c) è equilibrio di Nash, e poi che non ci sono altri equilibri. Supponiamo che l'impresa I fissi il prezzo c. L'impresa II non può scegliere nulla di meglio di c, infatti se sceglie un prezzo inferiore ottiene un payoff negativo, mentre se ne fissa uno maggiore, ottiene comunque utilità nulla. Poichè la situazione è simmetrica, (c, c) è equilibrio di Nash. D'altra parte nessun altro punto $(\bar{p}_1, \bar{p}_2) \neq (c, c)$ può essere equilibrio, infatti:

1. se $\bar{p}_i < c$, ($i = 1$ o $i = 2$) allora l'impresa che ha fissato il prezzo più basso ottiene un'utilità negativa, e può incrementarla fissando il prezzo c;

2. se $\bar{p}_1 = c$ e $\bar{p}_2 > c$ (o viceversa) allora l'impresa I aumenta la sua utilità alzando il prezzo, e mantenendolo inferiore ad a e $\bar{p}_2$;

3. se $\bar{p}_1 \ge \bar{p}_2 > c$ allora l'impresa I può aumentare la sua utilità abbassando il prezzo sotto $\bar{p}_2$ ed a, in modo da ottenere utilità strettamente postiva.

In ogni caso $(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$ non può essere equilibrio di Nash. Questo risultato è conosciuto come il **paradosso di Bertrand**.

Descriviamo adesso un altro modello derivato dal modello di Bertrand in cui consideriamo non prodotti omogenei ma differenziati. Assumiamo quindi che questa volta la domanda del prodotto sia diversa per ciascuna impresa e data da

$$q_1(p_1, p_2) = (a - p_1 + bp_2)_+$$
$$q_2(p_1, p_2) = (a - p_2 + bp_1)_+$$

dove a è la quantità di merce che viene comunque prodotta anche se il prezzo di vendita è uguale a zero e $b > 0$ indica in che misura il prodotto dell'impresa I è un sostituto del prodotto dell'impresa II e viceversa. Assumiamo $b < 1$ per semplicità.
Le funzioni di utilità in questo caso sono

$$u_1(p_1, p_2) = q_1(p_1, p_2)(p_1 - c) = (a - p_1 + bp_2)_+(p_1 - c)$$
$$u_2(p_1, p_2) = q_2(p_1, p_2)(p_2 - c) = (a - p_2 + bp_1)_+(p_2 - c)$$

quindi la coppia di prezzi (p_1^*, p_2^*) è un equilibrio di Bertrand-Nash se risolve i seguenti problemi:

$$\underset{p_1}{\text{argmax}}\ u_1(p_1, p_2^*) = \underset{p_1}{\text{argmax}}\ (a - p_1 + bp_2^*)_+(p_1 - c) = p_1^*$$

$$\underset{p_2}{\text{argmax}}\ u_2(p_1^*, p_2) = \underset{p_2}{\text{argmax}}\ (a - p_2 + bp_1^*)_+(p_2 - c) = p_2^*$$ Assumendo che $a - p_1 + bp_2 > 0$ le condizioni

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_1} = -2p_1 + a + c + bp_2^* = 0 \implies p_1^* = \frac{a + c + bp_2^*}{2}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial p_2} = -2p_2 + a + c + bp_1^* = 0 \implies p_2^* = \frac{a + c + bp_1^*}{2}$$

sono necessarie e sufficienti per l'equilibrio.
La soluzione di questa coppia di equazioni è

$$p_1^* = p_2^* = \frac{a + c}{2 - b}$$

che è l'equilibrio di Bertrand-Nash.

3 Il modello di duopolio di Stackelberg

Nei modelli di Cournot e e Bertrand, i giocatori agiscono contemporaneamente. Stackelberg nel 1934 propose un modello dinamico di duopolio in cui

un'impresa leader muove per prima e una subordinata o follower muove per seconda.
Seguendo il modello di Stackelberg sviluppiamo un modello in cui le imprese scelgono le quantità da produrre in modo sequenziale.
La progressione del gioco è la seguente:

1. l'impresa I sceglie la quantità q_1 da produrre;
2. l'impresa II osserva q_1 e sceglie una quantità $q_2 \geq 0$ da produrre a sua volta;
3. l'utilità dell'impresa i (come negli altri modelli considerati in precedenza) è data dalla funzione profitto

$$u_i(q_1, q_2) = q_i[P(Q) - c]$$

con le stesse notazioni adottate per il modello di Cournot. La differenza rispetto al modello di Cournot è che lo spazio delle strategie per l'impresa II è un insieme di funzioni $q_2(q_1)$. Poiché il gioco è a informazione perfetta, si può ricavare l'esito con l'induzione a ritroso. Si calcola prima la reazione dell'impresa II ad una quantità arbitraria offerta dall'impresa I e poi la miglior risposta a questa quantità per l'impresa I. Sia q_1 una quantità arbitraria offerta dall'impresa I . La miglior risposta a questa quantità è

$$R_{II}(q_1) = \frac{a - c - q_1}{2},$$

come abbiamo visto in 1. Poiché l'impresa I sa che l'impresa II sceglierà questa miglior risposta, decide di produrre la quantità $q_1^* = R_I(R_{II}(q_2))$, cioè q_1^* che massimizza

$$u_1(q_1, R_{II}(q_1)) = q_1(a - q_1 - (a - c - q_1)/2) - cq_1 = -\frac{1}{2}q_1^2 + \frac{a - c}{2}q_1.$$

Poichè questa è una funzione quadratica il massimo è raggiunto per $q_1^* = (a - c)/2$. Allora la miglior risposta dell'impresa II è $q_2^* = (a - c)/4$. Il profilo di strategie $(q_1^*.q_2^*)$ ottenuto mediante l'induzione a ritroso si chiama equilibrio di Stackelberg. Notiamo che nell'equilibrio di Stackelberg il prezzo è $(a + 3c)/4$, quindi maggiore che non nel caso del modello di Cournot.

3.1 Confronto con il modello di Cournot

Confrontiamo l'equilibrio di Stackelberg con quello di Cournot. Nel modello di Stackelberg l'impresa I (leader) produce la quantità di monopolio, mentre l'impresa II (follower) produce meno che nel modello di Cournot. Inoltre, nel caso di Stackelberg, la quantità aggregata prodotta è

$$Q_S = \frac{a-c}{2} + \frac{a-c}{4} = \frac{3}{4} \cdot (a-c)$$

mentre nel caso di Cournot ricordiamo che è

$$Q_c = \frac{2}{3} \cdot (a-c),$$

perciò $Q_c < Q_S$. Questo significa che il prezzo per il consumatore è minore nel caso di duopolio di Stackelberg rispetto a quello di Cournot. Inoltre il payoff dell'impresa I nel caso di Stackelberg è $u_1(q_1^*, q_2^*) = (a-c)^2/8$ e quello dell'impresa II è invece $u_2(q_1^*, q_2^*) = (a-c)^2/16$. Pertanto il profitto dell'impresa I è superiore rispetto a quello che risulta dal modello di Cournot, e quello dell'impresa II è invece minore. Quello che accade è che annunciando la sua strategia, l'impresa I aumenta la sua utilità. L'avere più informazione per l'impresa II produce quindi un effetto negativo. Riassumiamo i risultati ottenuti nella seguente tabella.

	duopolio di Cournot	"monopolio" di Cournot	duopolio di Stackelberg	duopolio di Bertrand
quantità prodotta	$q_1^* = \frac{a-c}{3}$ $q_2^* = \frac{a-c}{3}$	$q_1^* = \frac{a-c}{4}$ $q_2^* = \frac{a-c}{4}$	$q_1^* = \frac{a-c}{2}$ $q_2^* = \frac{a-c}{4}$	$q_1^* = \frac{a-c}{2}$ $q_1^* = \frac{a-c}{2}$
profitto	$\frac{(a-c)^2}{9}$ $\frac{(a-c)^2}{9}$	$\frac{(a-c)^2}{8}$ $\frac{(a-c)^2}{8}$	$\frac{(a-c)^2}{8}$ $\frac{(a-c)^2}{16}$	0 0
prezzo	$\frac{a+2c}{3}$	$\frac{a+c}{2}$	$\frac{a+3c}{4}$	c