Decisori (razionali) interagenti

UNA INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEI GIOCHI

Edizioni PLUS, 2006
(pag. web: Edizioni Plus)

Definizioni formali

Fioravante PATRONE
http://www.fioravante.patrone.name/default.htm

versione del 13 maggio 2006

Indice

1 Giochi non cooperativi

Definizione 1 (game form in forma strategica) *Una game form in forma strategica, avente N come insieme (finito) di giocatori è $(N, (X_i)_{i\in N}, E, h)$, dove:*

- *X_i è un insieme finito per ogni $i \in N$*
- *E è un insieme finito*
- *$h : \prod_{i\in N} X_i \to E$ è una funzione*

Definizione 2 (gioco in forma strategica) *Un gioco in forma strategica, avente N come insieme (finito) di giocatori è $(N, (X_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N})$, dove, per ogni $i \in N$:*

- *X_i è un insieme finito*
- *$f_i : \prod_{i\in N} X_i \to \mathbb{R}$*

Notazione 1 *Dato $i \in N$, indichiamo con $(\tilde{x}_i, \hat{x}_{-i})$ l'elemento $x \in \prod_{i\in N} X_i$ tale che:*

- *$x_i = \tilde{x}_i$*
- *$x_j = \hat{x}_j$ per $j \neq i$*

Nota 1 Un gioco in forma strategica può anche essere definito senza utilizzare le funzioni di utilità ma solo le preferenze dei giocatori. In tal caso, avremo $(N, (X_i)_{i\in N}, (\succeq_i)_{i\in N})$, dove, per ogni $i \in N$:

- X_i è un insieme finito
- $\succeq_i$ è un preordine totale su X_i

Una relazione binaria su un insieme è detta preordine totale se è transitiva e totale.

Si noti che un gioco definito mediante le preferenze individua univocamente un gioco secondo la definizione 2, purché le preferenze dei giocatori siano rappresentabili mediante funzioni di utilità. Viceversa, possono esserci più giochi, secondo la definizione 2, a cui corrisponde uno stesso gioco definito utilizzando le preferenze (quanti essi possano essere dipende dalle assunzioni fatte sulle preferenze, ad esempio se si tratti di preferenze soddisfacenti le condizioni di von Neumann - Morgenstern). ▲

Definizione 3 (equilibrio di Nash)
Dato un gioco $G = (N, (X_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N})$, diciamo che $(\bar{x}_i)_{i\in N} \in (X_i)_{i\in N}$ è un equilibrio di Nash per G se, per ogni $i \in N$:

- $f_i(\bar{x}_i) \geq f_i(x_i, \bar{x}_{-i})$ *per ogni* $x_i \in X_i$

Definizione 4 (gioco in forma estesa) *Vedasi le note dettagliate in riferimento alla pag. 28 del libro (anche in riferimento a sottogiochi ed equilibri perfetti nei sottogiochi)*

Definizione 5 (estensione mista) *Dato un gioco $G = (N, (X_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N})$, finito, nel senso che, oltre ad N, tutti gli insiemi X_i sono finiti. Definiamo estensione mista di G il gioco $\hat{G} = (N, (\hat{X}_i)_{i\in N}, (\hat{f}_i)_{i\in N})$, dove:*

- $\hat{X}_i = \Delta(X_i)$, *ovvero* $\hat{X}_i$ *è l'insieme delle probabilità su* X_i
- $\hat{f}_i(p) = \sum_{x\in X} p(x)\hat{f}_i(x)$

Nota 2 Il simbolo p indica la probabilità su X, prodotto delle probabilità p_i. Dato $x \in (X_i)_{i\in N}$, $p(x) = p((x_i)_{i\in N}) = \prod_{i\in N} p_i(x_i)$ ▲

Nota 3 Spesso ci si riferisce ad un equilibrio di Nash per $\hat{G}$ come ad un equilibrio in strategie miste per G ▲

Teorema 1 (Nash, 1950) *Dato un gioco finito $G = (N, (X_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N})$, la sua estensione mista ha almeno un equilibrio di Nash.*

Definizione 6 (maxmin) *Dato un gioco $G = (N, (X_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N})$, $\bar{x}_i \in X_i$ è detta strategia di* maxmin *per il giocatore $i \in N$, se:*

$$\phi_i(\bar{x}_i) \geq \phi_i(x_i)$$

Cioè, $\bar{x}_i$ è punto di massimo per la funzione ϕ_i, dove:

$$\phi_i(x_i) = \min\{f(x_i, x_{-i}) : x_{-i} \in X_{-i}\}$$

Il numero reale $\phi_i(\bar{x}_i)$ è detto valore di maxmin *(o anche:* valore conservativo*) per il giocatore i*

In maniera analoga si definiscono i concetti relativi al minmax*.*

Nota 4 La definizione data presuppone i minimi e massimi indicati esistano. Se il minimo è sostituito dall'estremo inferiore, si parla di maxinf. ▲

Nota 5 Dato un gioco finito G, nella "letteratura" della TdG spesso ci si riferisce al valore e strategia di maxmin per un giocatore intendendo con ciò il valore e strategia di maxmin per l'estensione mista di G. ▲

Definizione 7 (gioco a somma zero)
Dato un gioco a due giocatori (X, Y, f, g)*, diciamo che è* a somma zero *se* $f + g = 0$ *(cioè, se* $f(x, y) + g(x, y) = 0$ *per ogni* $(x, y) \in X \times Y$*).*

Nota 6 Un gioco a somma zero può essere descritto come (X, Y, f), visto che g può essere ricostruita a partire da f (semplicemente, $g = -f$). ▲

Nota 7 Per un gioco a somma zero, il valore di maxmin per il giocatore II coincide con l'opposto del valore di minmax per f. Infatti:

$$\max_{x \in X}\{\min_{y \in Y}\{g(x, y)\}\} = \max_{x \in X}\{\min_{y \in Y}\{-f(x, y)\}\} =$$

$$= \max_{x \in X}\{-\max_{y \in Y}\{f(x, y)\}\} = -\min_{x \in X}\{\max_{y \in Y}\{f(x, y)\}\}.$$

Per questo motivo, in un gioco a somma zero si concentra l'attenzione sul valore di maxmin e di minmax per la funzione f. Naturalmente, sempre nella stessa ottica si parla anche di strategia di minmax per il giocatore II. ▲

Teorema 2 (di minimax, di von Neumann, 1928) *Dato un gioco finito a due giocatori ed a somma zero* (X, Y, f)*, la sua estensione mista ha sempre (almeno) una strategia di maxmin per* I *ed una strategia di minmax* II*. Inoltre, il valore di maxmin coincide col valore di minmax.*

Nota 8 E' facile dimostrare che il valore di maxmin è in generale minore o uguale del valore di minimax. Quando i due valori coincidono, si dice che il gioco (a somma zero) ha valore. ▲

Nota 9 Dato un gioco a somma zero, si può dimostrare che, dato un equilibrio di Nash $(\bar{x}, \bar{y})$, la strategia $\bar{x}$ è una strategia di maxmin per I e la strategia $\bar{y}$ è una strategia di minmax per II; inoltre, il gioco ha valore (ed esso coincide con $f(\bar{x}, \bar{y})$). Viceversa, se il gioco ha valore, data una strategia $\hat{x}$ di maxmin per I ed una strategia $\hat{y}$ di maxmin per II, la coppia $(\hat{x}, \hat{y})$ è un equilibrio di Nash per il gioco. ▲

Nota 10 Per un gioco a somma zero, per una coppia $(\bar{x}, \bar{y})$ di strategie è equivalente dire che essa è un equilibrio di Nash o che è un *punto di sella* per f, nel senso che:

$$f(x, \bar{y}) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) \leq f(\bar{x}, y) \quad \text{per ogni } x \in X, y \in Y$$

▲

Definizione 8 (di equilibrio correlato) *Vedasi le note dettagliate in riferimento alla pag. 78 del libro.*

Definizione 9 (strategie dominanti e dominate)
Dato un gioco, $(N, (X_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in N})$, date $x'_i, x''_i \in X_i$, diremo che:

- *x'_i domina fortemente x''_i se:*

$$f_i(x'_i, x_{-i}) > f_i(x''_i, x_{-i}) \quad \textit{per ogni } x_{-i} \in X_{-i}$$

- *x'_i domina debolmente x''_i se:*

$$f_i(x'_i, x_{-i}) \geq f_i(x''_i, x_{-i}) \quad \textit{per ogni } x_{-i} \in X_{-i}$$

- *x'_i domina strettamente x''_i se x'_i domina debolmente x''_i ed inoltre esiste un $x_{-i} \in X_{-i}$ tale che:*

$$f_i(x'_i, x_{-i}) > f_i(x''_i, x_{-i})$$

Diremo che una strategia $\bar{x}_i$ è fortemente (rispettivamente: debolmente, strettamente) dominata *se esiste una strategia x_i che la domina fortemente (rispettivamente: debolmente, strettamente).*

Diremo che una strategia $\bar{x}_i$ è fortemente (rispettivamente: debolmente, strettamente) dominante *se domina (rispettivamente: debolmente, strettamente) ogni strategia x_i t.c. $x_i \neq \bar{x}_i$.*

Nota 11 [Avvertenza importante]
La terminologia usata qui è *differente* da quella utilizzata nella stragrande maggioranza dei libri e della "letteratura" in genere di TdG. Usualmente si parla di dominanza stretta riferendosi a ciò che qui è chiamata dominanza forte e di dominanza debole per quella che qui è stata definita come dominanza stretta. ▲

Vediamo la definizione di eliminazione iterata di strategie.

Definizione 10 (eliminazione iterata di strategie dominate) *Sia dato un gioco $G^0 = (N, (X_i^0)_{i\in N}, (f_i^0)_{i\in N})$, finito o estensione mista di un gioco finito. Eliminando per ogni giocatore $i \in N$ le strategie fortemente dominate otteniamo un insieme di strategie X_i^1, e quindi un nuovo gioco, che indichiamo con G^1 (f^1 sarà la restrizione di f^0 ad $X^1 = \prod_{i\in N} X_i^1$). Iterando l'operazione di eliminazione, otteniamo una successione $(G^n)_{n\in\mathbb{N}}$ di giochi. Diremo che una strategia $x_i \in X_i^0$* sopravvive all'eliminazione iterata di strategie fortemente dominate *se $x_i \in X_i^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Analoga definizione si può dare per le strategie strettamente dominate (anche per quelle debolmente dominate).

Nota 12 Come detto, si può dare la definizione di eliminazione di strategie anche per quelle strettamente dominate e per quelle debolmente dominate. Tuttavia, mentre vi è molta flessibilità e libertà nella procedura di eliminazione iterata delle strategie fortemente dominate (altri algoritmi, diversi da quello indicato nella definizione, portano allo stesso risultato: ad esempio, per un gioco finito potremmo pensare di eliminare le strategie una ad una), nel caso della dominanza stretta e debole il risultato può dipendere dall'algoritmo specifico usato (questo è ovvio per le strategie debolmente dominate; per quelle strettamente dominate è facile fornire esempi). ▲

Definizione 11 (gioco bayesiano) *Un gioco bayesiano finito (con un insieme, finito, di giocatori N) è:*

$$\Gamma^b = (N, (A_i)_{i \in N}, (T_i)_{i \in N}, (p_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}).$$

dove ($A = \prod_{i \in N} A_i$, $T = \prod_{i \in N} T_i$ e $T_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} T_j$, per $i \in N$):

- *A_i è un insieme finito e non vuoto*
  (rappresenta l'insieme delle azioni *possibili del giocatore i)*
- *T_i è un insieme finito e non vuoto*
  (rappresenta l'insieme dei tipi *possibili del giocatore i)*
- *$u_i := A \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione*
  (rappresenta i payoff per il giocatore i: $u_i(a, t)$ è il payoff corrispondente al profilo di azioni $a \in A$ e al profilo di tipi $t \in T$)
- *$p_i := T_i \longrightarrow \Delta(T_{-i})$ è una funzione*

  (rappresenta i belief che i vari tipi del giocatore i hanno rispetto ai possibili profili di tipi per gli altri giocatori)

Si noti che $t_{-i} \in T_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} T_j$ indica, per ogni giocatore $j \neq i$, il profilo di tutti i suoi possibili tipi.

Dato un giocatore i, e dato un suo tipo $t_{ij} \in T_i$, $p_i(t_{ij})$ ne rappresenta i belief. In particolare, $p_i(t_{ij})(t_{-i})$ rappresenta la probabilità che il suddetto tipo assegna ad un possibile profilo di tipi degli altri giocatori.

Una strategia per il giocatore i è una applicazione $s_i : T_i \to A_i$. Se abbiamo un gioco bayesiano finito, una strategia mista sarà $\sigma_i : T_i \to \Delta(A_i)$.

Dato un profilo di strategie $(s_i)_{i \in N}$, resta univocamente determinato il payoff atteso per ogni tipo $t_{rs} \in T_r$ di ciascun giocatore:

$$\sum_{\substack{j \neq i \\ t_{jh} \in T_j}} p_r(t_s)(t_{jh}) \cdot u_r\left((s_r(t_{rs}), t_{rs}), (s_j(t_{jh}), t_{jh})\right)$$

Potendo calcolare, per ogni profilo di strategie, il payoff (atteso) per i vari tipi dei vari giocatori, si può definire l'equilibrio Nash-bayesiano di un gioco bayesiano (o a informazione completa che dir si voglia).

Definizione 12 (equilibrio Nash-bayesiano) *Per ogni giocatore $r \in N$, per ogni tipo $t_{rs} \in T_r$ del giocatore r:*

$$\sum_{\substack{j \neq i \\ t_{jh} \in T_j}} p_r(t_s)(t_{jh}) \cdot u_r\left((s_r(t_{rs}), t_{rs}), (s_j(t_{jh}), t_{jh})\right) \geq$$

$$\geq \sum_{\substack{j \neq i \\ t_{jh} \in T_j}} p_r(t_s)(t_{jh}) \cdot u_r\left((a, t_{rs}), (s_j(t_{jh}), t_{jh})\right) \quad \textit{per ogni } a \in A_r$$

2 Giochi cooperativi

Definizione 13 (giochi di contrattazione e loro soluzioni) *Vedasi le note dettagliate in riferimento alla pag. 153 del libro.*

Definizione 14 (TU game) *Sia N un insieme finito. E sia $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ una applicazione t.c. $v(\emptyset) = 0$. La coppia (N, v) si dice "gioco a pagamenti laterali" o "gioco a utilità trasferibile" (TU-game). I sottoinsiemi di N sono detti* coalizioni.

Nota 13 Dato un insieme A, il simbolo $\mathcal{P}(A)$ indica l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A (compreso l'insieme vuoto, $\emptyset$, e l'insieme A stesso). ▲

Nota 14 Un TU-game $G = (N, v)$ verrà indicato come G, (N, v) o anche semplicemente come v qualora sia evidente dal contesto chi sia N. ▲

Definizione 15 (coesività, superadditività e convessità)
Sia $G = (N, v)$ un TU-game. G si dice

- *coesivo se:*

$$\textit{per ogni } \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}, \textit{ partizione di } N, \textit{ si ha } v(N) \geq \sum_{i=1}^{k} v(S_i)$$

- *superadditivo se:*

$$\textit{per ogni } S, T \subseteq N \textit{ t.c. } S \cap T = \emptyset \textit{ si ha: } v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$$

- *convesso se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:*

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T), \quad \textit{per ogni} \;\; S, T \subseteq N.$$

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T), \quad \textit{per ogni} \;\; S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}.$$

Nota 15 Nota: se un TU-game è convesso, allora è superadditivo. E se è superadditivo allora è coesivo. ▲

Definizione 16 (allocazione, imputazione) *Sia $G = (N, v)$ un TU-game. Un elemento $x \in \mathbb{R}^N$ (se $N = \{1, \ldots, n\}$ scriveremo $x \in \mathbb{R}^n$) si dice allocazione (per G). Se $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ l'allocazione x si dice pre-imputazione per G.*

Una pre-imputazione che soddisfa anche la condizione $x_i \geq v(\{i\})$ per ogni $i \in N$ è detta imputazione per G.

Indicheremo con $I(v)$ o $I(G)$ l'insieme delle imputazioni per il gioco G.

Nota 16 Dato un TU-game $G = (N, v)$, non è detto che esso abbia imputazioni. Esse esistono se il gioco è coesivo (a fortiori, se il gioco è superadditivo). ▲

Notazione 2 *Data una allocazione $x \in \mathbb{R}^N$ e data una coalizione $S \subseteq N$, indichiamo con $x(S)$ il numero $\sum_{i \in S} x_i$.*

Nota 17 Poiché $\sum_{i \in \emptyset} x_i = 0$, abbiamo $x(\emptyset) = 0$. ▲

Definizione 17 (nucleo) *Sia (N, v) un TU-game. Indichiamo con $C(v)$ il nucleo del gioco, dove:*

$$C(v) = \{x \in I(v) : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \;\; \textit{per ogni} \; S \subseteq N, \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}$$

Utilizzando la notazione introdotta poco sopra, la condizione $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$ può essere riscritta come: $x(S) \geq v(S)$

Introduciamo ora il valore Shapley.

Nota 18 Nota: da qui in avanti assumeremo che sia $N = \{1, \ldots, n\}$. Questa assunzione ha solo la funzione di alleggerire e semplificare le notazioni. ▲

Indichiamo con $\mathcal{G}(N)$ l'insieme di tutti i giochi (N, v) che sono definiti sull'insieme di giocatori N. Diciamo "valore" una funzione $\Phi : \mathcal{G}(N) \to \mathbb{R}^n$. Vale a dire, un "valore" è una regola che ad ogni gioco avente N come insieme dei giocatori associa una allocazione.

Sia $\sigma : N \to N$ una permutazione di N, cioè una corrispondenza biunivoca da N in N. Dato un gioco v su N, indichiamo con σv il gioco seguente: $\sigma v(S) = v(\sigma(S))$

Ci serve ancora una definizione preliminare:

Definizione 18 (Dummy player) *Dato un gioco v, il giocatore i si dice* dummy player *se:*

$$v(S \cup \{i\} = v(S) + v(\{i\}) \quad \text{per ogni } S \subseteq N$$

Introduciamo ora le proprietà che caratterizzano il valore Shapley.

Proprietà 1 (Anonimità) *Sia v un gioco e $\sigma : N \to N$ una permutazione. Allora, $\Phi_{\sigma(i)}(\sigma v) = \Phi_i(v)$.*

Proprietà 2 (Efficienza) *Per ogni gioco v, $\Phi(v)$ è una pre-imputazione.*

Proprietà 3 (Dummy player) *Se in un gioco v il giocatore i è un "dummy player", allora $\Phi_i(v) = v(i)$.*

Proprietà 4 (Additività) *$\Phi_i(v + w) = \Phi_i(v) + \Phi_i(w)$, per ogni $i \in N$.*

Teorema 3 (Shapley, 1953) *Esiste ed è unica $\Phi : \mathcal{G}(N) \to \mathbb{R}^n$ che soddisfa le proprietà 1, 2, 3, 4. Inoltre, si ha:*

$$\Phi_i(v) = (\frac{1}{n!}) \sum_{\sigma} m_i^\sigma(v) \text{ per ogni } i \in N$$

Nota 19 Data una permutazione $\sigma : N \to N$, definiamo:

$$m_i^\sigma(v) = v(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j)\}) - v(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\}),$$

dove $i = \sigma(j)$. ▲

Definizione 19 *Dato un TU-game (N, v), sia S una coalizione e $x \in \mathbb{R}^N$ una allocazione; si dice rimpianto o eccesso di S rispetto ad x la quantità:*

$$e(S, x) = v(S) - x(S)$$

E' possibile definire un vettore $\vartheta(x) \in \mathbb{R}^{2^n}$ nel seguente modo:

$$\vartheta_1(x) = max\ \{e(S,x) | S \subseteq N\} = e(S_1, x)$$

$$\vartheta_i(x) = max\ \{e(S,x) | S \subseteq N, S \neq S_j, j = 1, \ldots, i-1\} = e(S_i, x)$$
per $i = 2, \ldots, 2^n$

Le componenti di $\vartheta(x)$ sono i rimpianti generati da x al variare di S, in ordine debolmente decrescente.

Definizione 20 *Dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, si dice che x è lessicograficamente minore di y e si indica con $x <_L y$, se esiste $i \geq 1$ per cui:*

$$\begin{array}{ll} x_j = y_j & j < i \\ x_i < y_i & \end{array}$$

Definizione 21 (pre-nucleolo, nucleolo)
Dato un gioco v si dice pre-nucleolo (rispettivamente: nucleolo) del gioco il vettore $\nu(X)$ che genera il minimo, secondo l'ordine lessicografico, dei vettori $\vartheta(x)$ al variare di x nell'insieme delle pre-imputazioni (rispettivamente: imputazioni).

Nota 20 Il pre-nucleolo è univocamente determinato. Lo stesso vale per il nucleolo, qualora l'insieme delle imputazioni sia non vuoto. ▲

Nota 21 Il nucleolo è un elemento del nucleo se questo è non vuoto. ▲