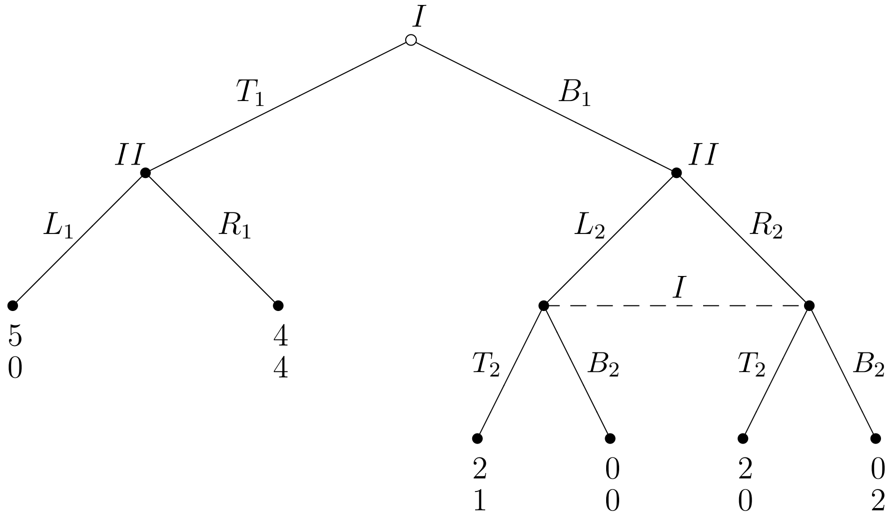
Esempio 1 Si consideri il seguente gioco in forma estesa:



a) scriverne la forma strategica;
b) determinarne gli equilibri di Nash in strategie pure (se esistono);
c) trovarne gli equilibri perfetti nei sottogiochi (se esistono)

Soluzione
La forma strategica è (è sottolineata la "best reply" per I e sopralineata quella per II):

$I \setminus II$	L_1L_2	L_1R_2	R_1L_2	R_1R_2
T_1T_2	$(\underline{5}, 0)$	$(\underline{5}, 0)$	$(\underline{4}, \overline{4})$	$(\underline{4}, \overline{4})$
T_1B_2	$(\underline{5}, 0)$	$(\underline{5}, 0)$	$(\underline{4}, \overline{4})$	$(\underline{4}, \overline{4})$
B_1T_2	$(2, \overline{1})$	$(2, 0)$	$(2, \overline{1})$	$(2, 0)$
B_1B_2	$(0, 0)$	$(0, \overline{2})$	$(0, 0)$	$(0, \overline{2})$

Vi sono pertanto quattro equilibri in strategie pure: (T_1T_2, R_1L_2), (T_1T_2, R_1R_2), (T_1B_2, R_1L_2), (T_1B_2, R_1R_2).

Il gioco dato ha due sottogiochi propri. Uno, quello a sinistra in figura, ha come equilibrio R_1. Il sottogioco a destra ha, come unico equilibrio, (T_2, L_2), come si verifica agevolmente dalla forma strategica riportata qui sotto:

$I \backslash II$	L_2	R_2
T_2	$(2,1)$	$(2,0)$
B_2	$(0,0)$	$(0,2)$

Pertanto, dei quattro equilibri di Nash, l'unico che è perfetto nei sottogiochi (cioè l'unico la cui restrizione ai sottogiochi è ancora un equilibrio) è (T_1T_2, R_1L_2).

Esempio 2 Trovare gli equilibri di Nash sia in pure che in miste per seguente gioco (Dilemma del Prigioniero), in cui: $a < b < c < d$.

I \ II	L	R
T	c, c	a, d
B	d, a	b, b

Soluzione

L'unico equilibrio di Nash in strategie pure è (B, R).

Vediamo le strategie miste. Se I gioca la strategia mista $(p, 1-p)$ e II gioca $(q, 1-q)$, il payoff atteso per I è:

$$cpq + ap(1-q) + d(1-p)q + b(1-p)(1-q) =$$

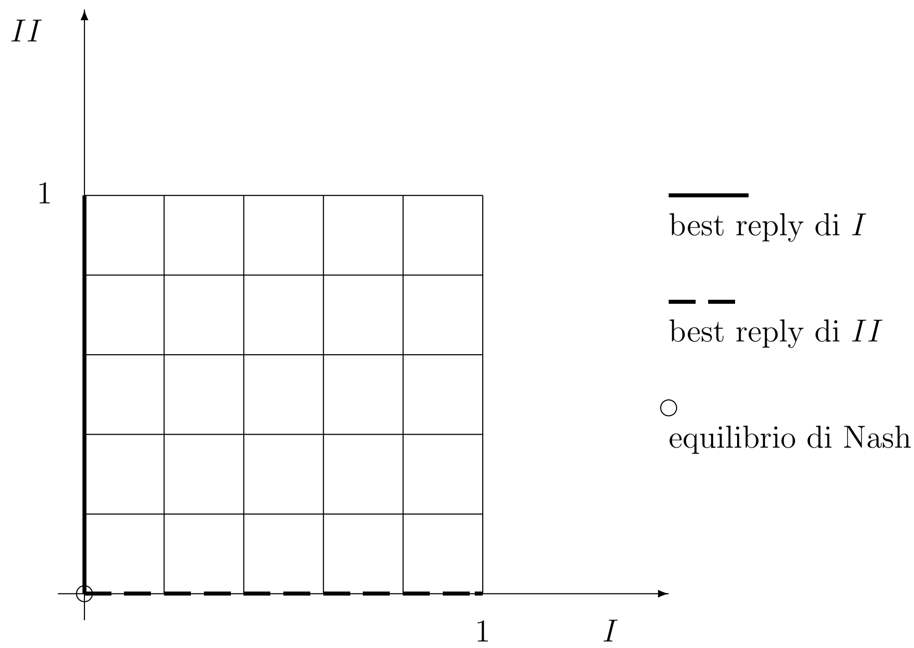
$$= [(c-d)q + (a-b)(1-q)]p + (d-b)q + b$$

Per ipotesi $c - d < 0$ e $a - b < 0$, quindi $(c-d)q < 0$ tranne che per $q = 0$, però in tal caso $(a-b)(1-q) < 0$, pertanto $(c-d)q + (a-b)(1-q) < 0$ qualunque sia q.

Pertanto il payoff per I è massimo (qualunque sia q) per $p = 0$. Quindi la "best reply" per I è sempre $p = 0$ per ogni q.

Discorso del tutto simmetrico vale per II, per il quale la "best reply" è $q = 0$ per ogni $p \in [0, 1]$.

Possiamo anche disegnare il grafico delle "best reply":



Quindi, l'estensione mista del dilemma del prigioniero ha un unico equilibrio di Nash che corrisponde all'unico equilibrio in strategie pure del gioco dato.

D'altronde, questi risultati erano ampiamente scontati: dato che la strategia T è fortemente dominata, qualunque strategia mista che sia "best reply" assegna sempre probabilità 0 a T. Per i dettagli, si può consultare la soluzione dell'esercizio seguente.

Esempio 3 Trovare gli equilibri di Nash per l'estensione mista del gioco:

$I \backslash II$	L	C	R
T	$(3,2)$	$(5,4)$	$(7,8)$
B	$(5,9)$	$(1,11)$	$(4,3)$

Soluzione

Osserviamo preliminarmente che la strategia L è fortemente dominata da C. Ne segue che ogni strategia mista di II che sia miglior risposta a una qualunque strategia di I assegna sempre probabilità 0 ad L (se per assurdo fosse assegnata ad L una probabilità positiva, converrebbe "trasferire" tale probabilità dalla strategia L alla strategia C, ottenendo un payoff atteso di II strettamente maggiore, in contraddizione con l'assunto che fosse una "miglior risposta").

Ci si può quindi restringere, nella ricerca di equilibri, alle strategie miste del tipo $(0, q, 1-q)$ per II (con ovvio significato dei simboli, si spera!).

Il payoff atteso per I da $(p, 1-p)$ e $(0, q, 1-q)$ è:

$$5pq + 7p(1-q) + 1(1-p)q + 4(1-p)(1-q) =$$

$$= (q+3)p + (4-3q)$$

Poiché il coefficiente di p è maggiore di 0, la "best reply" per I è sempre $p = 1$. Cosa che non dovrebbe sorprendere, visto che "eliminata" la strategie L la strategia B di I diventa fortemente dominata ...

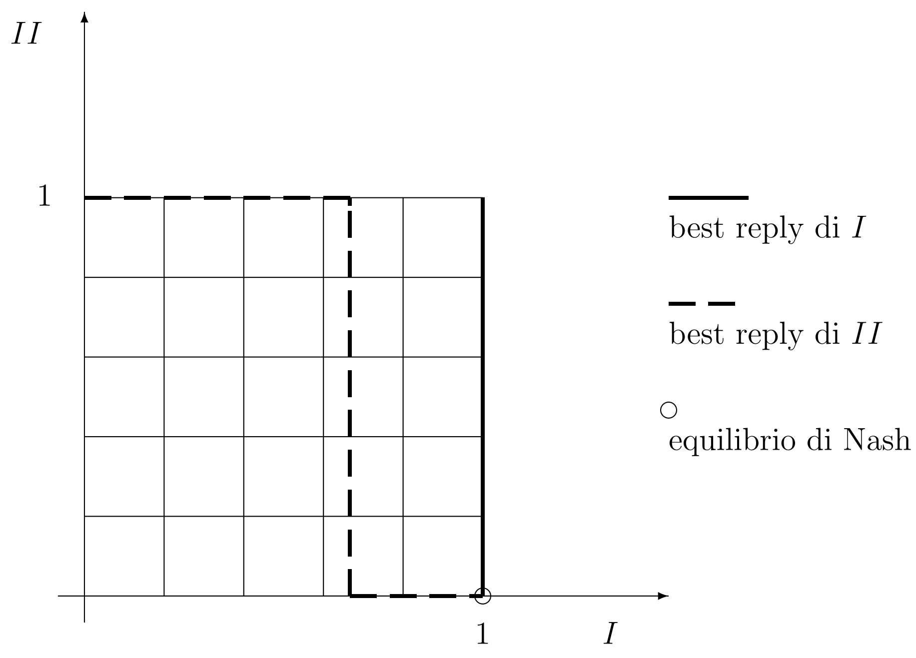
Per quanto riguarda II, il suo payoff atteso e:

$$4pq + 8p(1-q) + 11(1-p)q + 3(1-p)(1-q) =$$

$$= (-12p+8)q + (5p+3)$$

E, allora, se $p < 2/3$ la "best reply" per II è $q = 1$, per $p > 2/3$ è $q = 0$, ed infine per $p = 2/3$ è tutto l'intervallo $[0, 1]$.

Disegniamo i grafici delle migliori risposte per trovare gli equilibri di Nash:



Come era prevedibile, troviamo un solo equilibrio di Nash (che è, di fatto, in strategie pure): dopotutto la coppia (T, R) è l'unica che sopravvive all'eliminazione iterata di strategie fortemente dominate.

Esempio 4 Determinare gli eventuali equilibri di Nash in strategie pure del seguente gioco in forma strategica:

$I \backslash II$	L	C	R
T	$0, 1$	$-1, 3$	$1, 3$
M	$0, 2$	$1, 1$	$2, 0$
B	$1, 0$	$1, -1$	$3, 0$

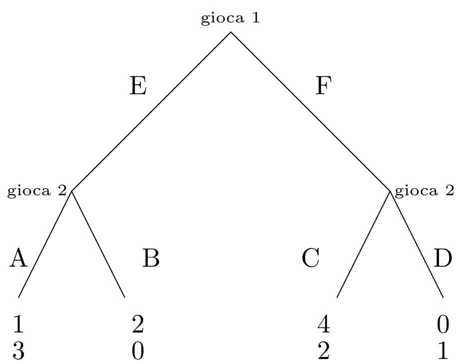
Esistono strategie debolmente dominate? E strategie fortemente dominate?

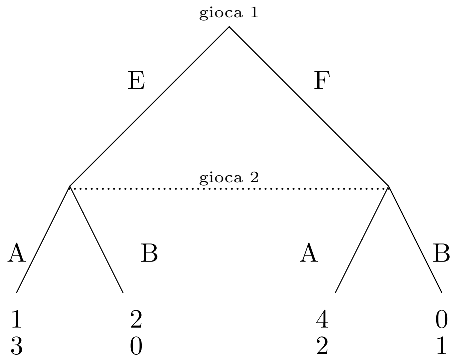
Soluzione
Indichiamo la "best reply" sottolineando i vari elementi della matrice:

$I \backslash II$	L	C	R
T	$0, 1$	$-1, \underline{3}$	$1, \underline{3}$
M	$0, \underline{2}$	$\underline{1}, 1$	$2, 0$
B	$\underline{1}, \underline{0}$	$\underline{1}, -1$	$\underline{3}, \underline{0}$

Quindi gli equilibri di Nash sono (B, L) e (B, R).
La strategia T è fortemente dominata da B. La strategia T è debolmente dominata da M e da B. La strategia M è debolmente dominata da B. Il giocatore II non ha strategie dominate.

Esempio 5 Si considerino i seguenti due giochi in forma estesa:





Scrivere la forma strategica di entrambi (uno è a informazione perfetta, mentre l'altro non lo è).

Calcolare gli equilibri di Nash in strategie pure e gli equilibri perfetti nei sottogiochi di quello dei due che è a informazione perfetta.

Calcolare gli equilibri di Nash in strategie miste di quello non a informazione perfetta.

Soluzione

La forma strategica del primo gioco è:

$I\backslash II$	AC	AD	BC	BD
E	$1,\underline{3}$	$\underline{1},\underline{3}$	$2,0$	$\underline{2},0$
F	$\underline{4},\underline{2}$	$0,1$	$\underline{4},\underline{2}$	$0,1$

Nella forma strategica abbiamo già sottolineato i payoff per mostrare la best reply e trovare gli equilibri di Nash. Gli equilibri di Nash sono (E, AD), (F, AC) e (F, BC). Di questi (F, AC) è l'unico equilibrio perfetto nei sottogiochi (cosa che si verifica agevolmente applicando l'induzione a ritroso).

La forma strategica del secondo gioco è:

$I\backslash II$	A	B
E	$1,\underline{3}$	$\underline{2},0$
F	$\underline{4},\underline{2}$	$0,1$

Anche qui abbiamo sottolineato, etc... Il gioco ha un solo equilibrio di Nash: (F, A).

Per quanto riguarda le strategie miste, usiamo come di solito $p, 1-p$ e $q, 1-q$ per indicare le strategie miste rispettivamente di I e II.
Il payoff atteso di I è:

$$f(p,q) = pq + 2p(1-q) + 4(1-p)q = pq + 2p - 2pq + 4q - 4pq =$$

$$= -5pq + 2p + 4q = p(2-5q) + 4q$$

Quindi per $q < 2/5$ la best reply per I è $p = 1$, per $q = 2/5$ è tutto $[0,1]$, per $q > 2/5$ la best reply è $p = 0$.
Per II il payoff atteso è:

$$g(p,q) = 3pq + 2p(1-q) + (1-p)(1-q) = 3pq + 2q - 2pq + 1 - p - q + pq =$$

$$= 2pq - p + 1 + q = q(2p+1) + (1-q)$$

La best reply per II è sempre $q = 1$, qualunque sia p.

In figura 1 disegniamo le best reply:

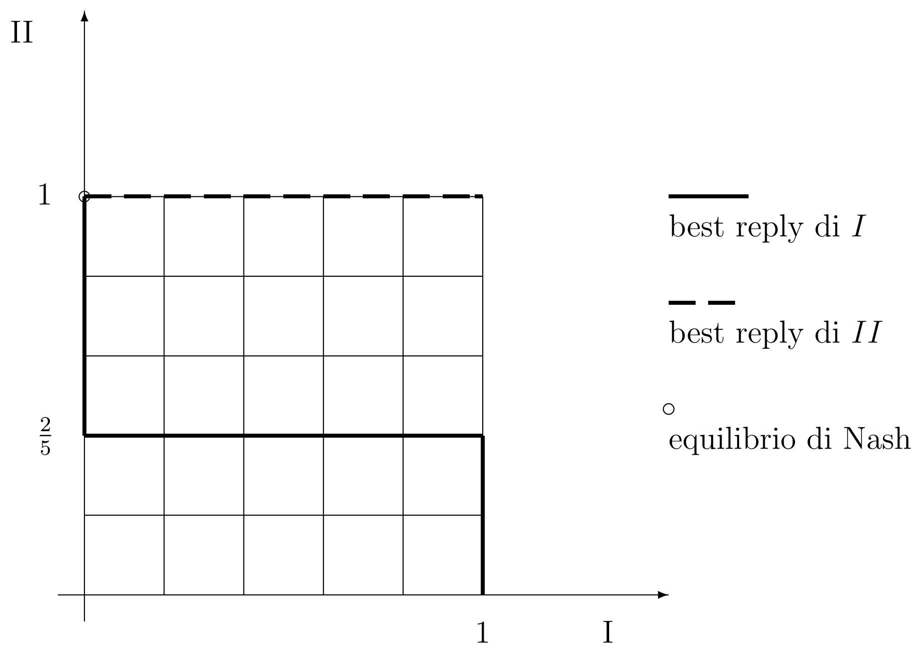


Figura 1: I grafici delle corrispondenze di miglior risposta

Le best reply ci permettono di individuare gli equilibri di Nash in strategie

miste. L'unico che troviamo è indicato in figura, e corrisponde a $p = 0$ e $q = 1$. Vale a dire, si tratta dell'equilibrio in strategie pure che già avevamo trovato.
Potevamo in realtà risparmiarci i conti, semplicemente osservando che la strategia A domina strettamente B.