

Un problema di travaso

Appunti a cura di
Fioravante PATRONE
<http://www.diptem.unige.it/patrone/default.htm>

versione del: 24 maggio 2008

Abbiamo:

1 bicchiere di latte }
1 bicchiere di vino } di identico volume

Prendo 1 cucchiaino di latte e lo metto nell'altro bicchiere. Mescolo bene. Poi da questo bicchiere risposto 1 cucchiaino (di identico volume del precedente!) di questa miscela nel bicchiere che contiene solo latte.

Domanda 1 *C'è più vino nel bicchiere che originariamente conteneva solo latte o c'è più latte in quello che originariamente conteneva solo vino?*

Osservazione 1 *Provare a rispondere sulla base dell'“intuizione”, prima di usare tutti i mezzi ritenuti opportuni per dare la risposta. Non “girare pagina”, se non si vuole vedere la soluzione.*

Fioravante PATRONE
Dipartimento di Ingegneria della
Produzione, Termoeconomica e
Modelli Matematici
P.le Kennedy - Pad D
16129 Genova - ITALY
patrone@diptem.unige.it

<http://www.diptem.unige.it/patrone>
<http://tdg.dima.unige.it>
<http://www.citg.unige.it/citg.htm>
<http://www.scallywag.it>

<http://dri.diptem.unige.it/>

homepage
web teaching
web server “CITG”
web page del gruppo
Scaallywag

Decisori (razionali) interagenti

Soluzione 1

<i>FASI</i>	<i>Contenuto nel bicchiere 1</i>	<i>Contenuto nel bicchiere 2</i>
<p><i>inizio</i></p> <p><i>1° spostamento</i></p> <p><i>dopo 1° spostamento</i></p> <p><i>2° spostamento</i></p> <p><i>dopo 2° spostamento</i></p>	<p style="text-align: center;">L</p> <p style="text-align: center;">$L - \alpha L$</p> <p style="text-align: center;">$L - \alpha L + \frac{\alpha}{1+\alpha}(V + \alpha L) =$</p> <p style="text-align: center;">$= \frac{(1-\alpha^2)L + \alpha^2 L + \alpha V}{1+\alpha} =$</p> <p style="text-align: center;">$= \frac{L + \alpha V}{1+\alpha}$</p>	<p style="text-align: center;">V</p> <p style="text-align: center;">$V + \alpha L$</p> <p style="text-align: center;">$V + \alpha L - \frac{\alpha}{1+\alpha}(V + \alpha L) =$</p> <p style="text-align: center;">$= \frac{V + \alpha V + \alpha L + \alpha^2 L - \alpha V - \alpha^2 L}{1+\alpha} =$</p> <p style="text-align: center;">$= \frac{V + \alpha L}{1+\alpha}$</p>

Con $L =$ latte contenuto originariamente nel 1° bicchiere

$V =$ vino contenuto originariamente nel 2° bicchiere

$L = V$

$\alpha = \frac{\text{volume cucchiaino}}{\text{volume latte}} = \frac{\text{volume cucchiaino}}{\text{volume vino}}$

Soluzione 2 (Altro modo)

I bicchieri contengono un volume di liquido pari a B .

Il cucchiaino contiene un volume di liquido pari a γ .

<i>FASE</i>	<i>Bicchiere sx</i>	<i>Bicchiere dx</i>
<i>inizio</i>	$V \quad 0$ $L \quad B$	$V \quad B$ $L \quad 0$
<i>1° travaso</i>	$V \quad 0$ \longrightarrow $L \quad \gamma$	
<i>dopo 1° travaso</i>	$V \quad 0$ $L \quad B - \gamma$	$V \quad B$ $L \quad \gamma$
<i>2° travaso</i>	$V \quad \gamma \frac{B}{\gamma+B}$ \longleftarrow $L \quad \gamma \frac{\gamma}{\gamma+B}$	
<i>fine</i>	$V \quad \gamma \frac{B}{\gamma+B}$ $L \quad B - \gamma + \gamma \frac{\gamma}{\gamma+B}$	$V \quad B - \gamma \frac{B}{\gamma+B}$ $L \quad \gamma - \gamma \frac{\gamma}{\gamma+B}$

Nel 2° travaso, dopo aver determinato la proporzione con cui abbiamo i due liquidi nel bicchiere destro, $\frac{B}{\gamma+B}$ di vino e $\frac{\gamma}{\gamma+B}$ di latte, possiamo determinare i volumi di liquido trasportato:

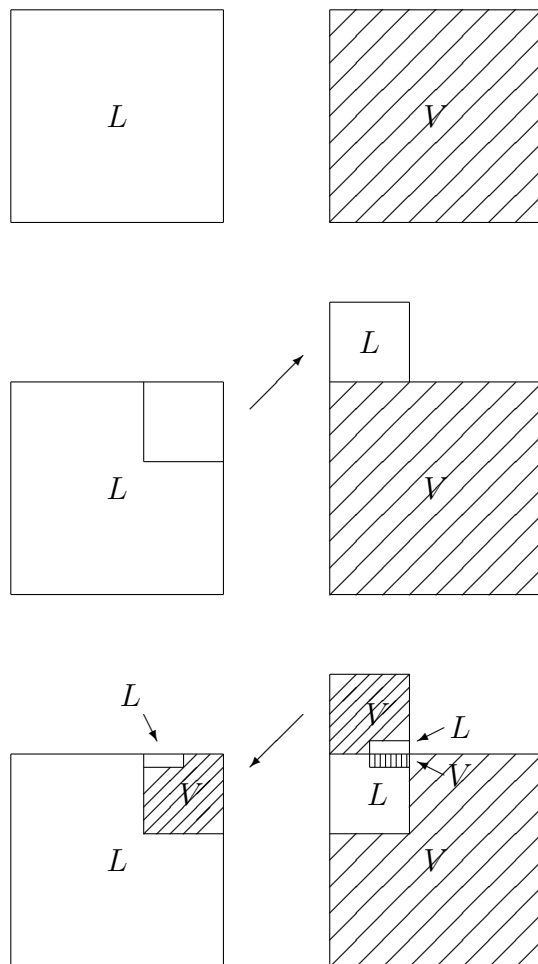
$$vino = \gamma \frac{B}{\gamma + B} \quad latte = \gamma \frac{\gamma}{\gamma + B}$$

Osservazione 2 *La quantità di vino nel bicchiere sx e la quantità di latte nel bicchiere dx coincidono.*

$$V \text{ in bicchiere sx: } \gamma \frac{B}{\gamma+B} = \frac{\gamma B}{\gamma+B}$$

$$L \text{ in bicchiere dx: } \gamma - \gamma \frac{\gamma}{\gamma+B} = \frac{\gamma^2 + \gamma B - \gamma^2}{\gamma+B} = \frac{\gamma B}{\gamma+B}$$

Soluzione 3 (“geometrica”)

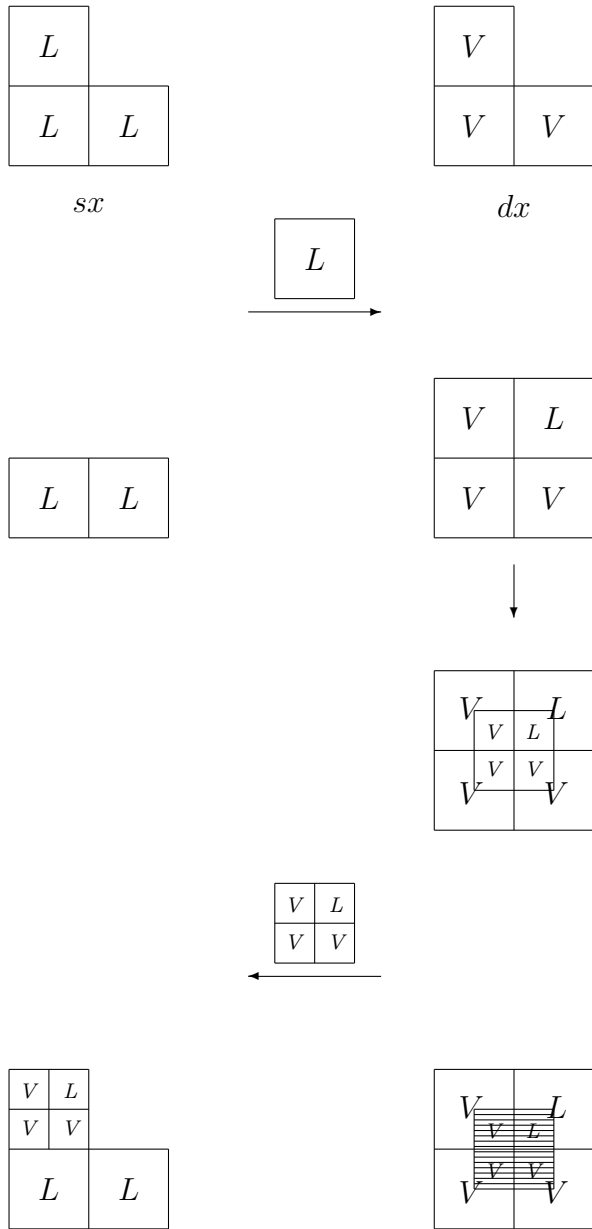


Si capisce che è “lo stesso”.

Suggerimento per dare un aiuto all’intuizione avvilita:

*Quando riporto il cucchiaino con vino “sporco di latte”, è chiaro che sto portando meno vino di quanto non avessi portato latte, ma lo metto in un bicchiere che contiene meno latte (è un bicchiere meno un cucchiaino).
[da Grandis]*

Soluzione 4 (Approccio geometrico/grafico)



E così si vede chiaramente.

Cognitivamente, perché quasi tutti ritengono che nel bicchiere destro ci sia più latte di quanto non sia il vino che c'è nel bicchiere di sinistra?

Perché c'è un'affermazione vera.

Il latte trasportato da sinistra a destra è di più del vino trasportato da destra a sinistra.

E uno cognitivamente si fissa su questa affermazione che è vera, ma non esaurisce tutta la verità. Non ci dà cioè il diritto di fare la deduzione che ingenuamente si fa.

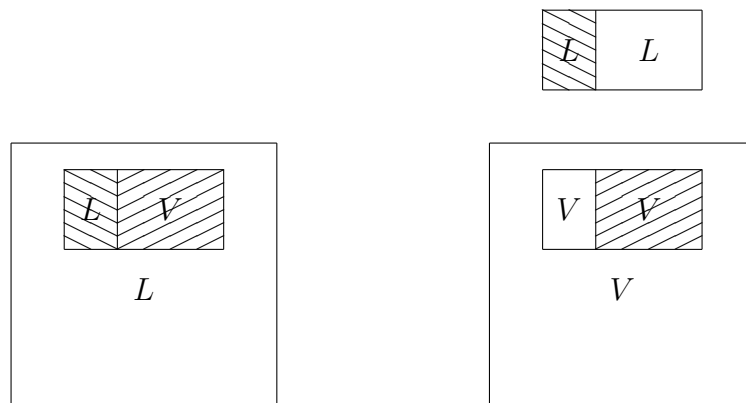
Trascuriamo un'altra affermazione vera.

Quando faccio il secondo travaso, riporto a sinistra anche un po' di latte!

Si noti che questa osservazione ci permette di dubitare che la prima affermazione ci consentisse di trarre la conclusione (errata) che a destra c'è più latte che non vino a sinistra.

Ma si noti però che non sono sufficienti a dire che alla fine c'è uguaglianza. Perché sono affermazioni “qualitative (“ordinali). Ci vorrebbe una affermazione quantitativa per fare la deduzione finale.

Un'affermazione quantitativa può essere illustrata mediante questo disegno.



Quando riporto indietro la miscela, posso immaginare che la piccola “quantità di latte che riporto indietro sia stata tolta dal cucchiaino originariamente pieno di latte. Vale a dire, non importa che ci sia stata effettivamente mi-

scelazione. La parte rimanente che porto indietro è vino. E questa non può essere pari, in volume, altro che alla quantità di latte che rimane nel cucchiaino dopo aver tolto la parte che è stata spostata a sinistra. Quindi la parte di vino che porto indietro (e quindi il vino che alla fine sarà a sinistra) non può essere che uguale alla parte di latte che mi è rimasta a destra.

Da questa terza affermazione segue ovviamente (anzi, c'è già contenuto dentro) il fatto che la quantità di vino a sinistra alla fine è pari alla quantità di latte a destra.

Varianti [da Fragnelli]

- Se non rimescolo i due liquidi?
- Se ho un bicchiere di latte e un barile di vino?

Nota finale: queste note riguardano uno di quelli che venivano presentati come “problemi introduttivi” per il corso di Modelli Matematici per studenti di Scienze Ambientali, corso che ho tenuto per molti anni, con l'aiuto prezioso di Marco Margiocco.