Teorema di May

Appunti a cura di
Fioravante PATRONE
http://www.diptem.unige.it/patrone/default.htm

versione del: 9 agosto 2007

Indice

Queste brevi note sono dedicate al teorema di May, che caratterizza la regola di decisione a maggioranza semplice in un contesto specifico ma molto interessante.

Fioravante PATRONE	http://www.diptem.unige.it/patrone	homepage
Dipartimento di Ingegneria della	http://tdg.dima.unige.it	web teaching
Produzione, Termoenergetica e	http://www.citg.unige.it/citg.htm	web server "CITG"
Modelli Matematici	http://www.scallywag.it	web page del gruppo
P.le Kennedy - Pad D		Scaλλywag
16129 Genova - ITALY		
patrone@diptem.unige.it	http://www.diptem.unige.it/patrone/DRI.htm	Decisori (razionali) interagenti

1 Il problema

Supponiamo di avere un insieme (finito, non vuoto) N di individui. Immaginiamo che questo gruppo debba scegliere fra due alternative: a oppure b. Indichiamo con X l'insieme i cui elementi sono queste due alternative: $X = \{a, b\}$.

Immaginiamo che ognuno degli individui abbia preferenze su X, nel senso che: preferisce (strettamente) a a b, o viceversa, o è indifferente.

Possiamo aggregare queste preferenze in una unica preferenza collettiva?

Vorremmo trovare un metodo generale che ci permetta di operare questa aggregazione qualunque siano le preferenze degli individui. E che, naturalmente, soddisfi alcune condizioni basilari. Un paio di condizioni sono naturali: deve "trattare allo stesso modo" sia gli individui che gli esiti. C'è un'altra condizione, abbastanza naturale anch'essa: si tratta di una richiesta minimale di "monotonia" (anche se poi la chiameremo in modo diverso): ci si aspetta che, se la collettività esprime una preferenza debole[1] per a rispetto a b ed un decisore cambia la sue preferenze in favore di a, le preferenze collettive dovrebbero passare a favore stretto di a.

Ebbene, c'è una ed una sola modalità di aggregazione delle preferenze che soddisfa queste (ragionevoli) condizioni: è la regola di decisione mediante votazione a maggioranza semplice. Questo è, per l'appunto, il teorema di May (May, 1952). Uno dei (pochi?) interessanti risultati "positivi" nella teoria delle scelte sociali (a fianco al noto teorema di Black (Black, 1958) sulle preferenze "single peaked"). Rispetto al più noto "teorema di impossibilità" di Arrow[2] (Arrow, 1951 e 1963; vedi anche Moretti e Patrone, 2000) può essere considerato un risultato "minore", tuttavia meriterebbe di essere più conosciuto di quanto non lo sia.

2 Formalizzazione

Come detto, abbiamo un insieme N, finito e non vuoto. Abbiamo un insieme di alternative che contiene due elementi: $X = \{a, b\}$. Per ogni $i \in N$, è data una relazione di preordine totale[3] su X.

[1] Cioè: la collettività preferisce strettamente a a b o è indifferente tra di essi.

[2] Questo risultato fu annunciato da Arrow al meeting della Econometric Society nel dicembre 1948, e May era fra il pubblico, secondo quanto dice Arrow stesso. Non solo, è di May anche una delle prime recensioni di *Social Choice and Individual Values*.

[3] Qui c'è la definizione formale:

Definizione 1 *Una relazione* $\preceq$ *su un insieme* Z *si dice essere un* preordine *se è riflessiva*

Naturalmente, su X possiamo avere tre preordini totali: quello per cui $a \prec b$, quello per cui $b \prec a$ e quello per cui $a \sim b$. Per comodità, conveniamo di indicarli (se e dove ci servirà) rispettivamente con 1, -1 e 0. Quindi, possiamo identificare $\mathcal{P}$, l'insieme dei preordini totali su X, con $\{-1, 0, 1\}$.

Siamo interessati ad una funzione di benessere sociale, $\Phi : A \to \mathcal{P}$, dove $A \subseteq \mathcal{P}^N$.

Le richieste che facciamo sono:

- **Dominio Universale** $A = \mathcal{P}^N$

- **Anonimità** Data una corrispondenza biunivoca $\psi : N \to N$, dato un profilo di preferenze $(\preceq_i)_{i\in N}$ si definisca il profilo di preferenze $(\preceq'_i)_{i\in N}$ nel modo seguente: $(\preceq'_i)_{i\in N} = (\preceq_{\psi(i)})_{i\in N}$.

  Allora $\Phi((\preceq_i)_{i\in N}) = \Phi((\preceq'_i)_{i\in N})$

- **Neutralità** Data una corrispondenza biunivoca $\eta : X \to X$, dato un profilo di preferenze $(\preceq_i)_{i\in N}$ si definisca il profilo di preferenze $(\preceq'_i)_{i\in N}$ nel modo seguente: $a \preceq'_i b$ se e solo se $b \preceq_i a$.

  Allora, posto: $\sqsubseteq = \Phi((\preceq_i)_{i\in N})$ e $\sqsubseteq' = \Phi((\preceq'_i)_{i\in N})$, si ha che $a \sqsubseteq b$ se e solo se $b \sqsubseteq' a$.

- **Positive responsiveness** Siano dati due profili di preferenze, $(\preceq_i)_{i\in N}$ e $(\preceq'_i)_{i\in N}$. Supponiamo che il secondo profilo di preferenze differisca dal primo per questo: esiste una coppia di alternative $x, y \in X$ ed $i_0 \in N$ t.c.: $\big(y \prec_{i_0} x$ e $x \sim'_{i_0} y\big)$ oppure $\big(y \sim_{i_0} x$ e $x \prec'_{i_0} y\big)$.

  Allora[4], $x \sqsubseteq y$ implica $x \sqsubset' y$

Il teorema di May ci dice che esiste una ed una sola regola di aggregazione delle preferenze che soddisfa queste quattro richieste, e che questa regola di

---

e transitiva. Si dice essere un preordine totale *se è un preordine ed è anche totale. Diciamo che una relazione $\preceq$ definita su Z è:*
riflessiva, se: per ogni $x \in Z$, $x \preceq x$
transitiva, se: per ogni $x, y, z \in Z$, $x \preceq y$ e $y \preceq z$ implica $x \preceq z$
totale, se: per ogni $x, y \in Z$, $x \preceq y$ o $y \preceq x$

Indico rispettivamente con $\prec$ e con $\sim$ le relazioni così definite:

$x \prec y \overset{\text{def}}{\iff} x \preceq y$ e non $y \preceq x$.

$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} x \preceq y$ e $y \preceq x$.

[4]La relazione $\sqsubset'$ è definita, a partire da $\sqsubseteq'$, in modo del tutto analogo a come $\prec$ è definita a partire da $\preceq$:

$x \sqsubset' y \overset{\text{def}}{\iff} x \sqsubseteq' y$ e non $y \sqsubseteq' x$.

aggregazione coincide con la regola di votazione a maggioranza semplice. Vale a dire, per stabilire se, collettivamente, a è preferito a b, ogni individuo "vota" per a se preferisce strettamente a a b, vota per b se vale il viceversa, e si astiene se è indifferente fra a e b. La collettività preferirà (debolmente) a a b se e solo se a riceve un numero di voti maggiore o uguale di quelli ricevuti da b.

Per dimostrare questo teorema osserviamo, come prima cosa, che è immediato verificare come la regola di votazione a maggioranza semplice soddisfi le quattro proprietà.

Per quanto riguarda il viceversa, la dimostrazione è piuttosto semplice. Usando la rappresentazione delle preferenze con $-1, 0, 1$, la condizione di anonimità ci permette di dire che per determinare il valore di Φ è sufficiente contare il numero di 1 e di -1 presenti nel profilo di preferenze (che sarà un vettore del tipo $(t_i)_{i\in N}$, con $t_i \in \{-1, 0, 1\}$).

Ora, se il numero di "1" è uguale al numero di "-1", il risultato deve essere l'indifferenza (se una alternativa fosse collettivamente preferita ad un'altra, scambiando le due alternative, le preferenze dovrebbero essere rovesciate, ma questo contrasta con la condizione di neutralità).

Allora, la "positive responsiveness" ci dice che, se il numero di "1" è uguale al numero di "-1" più uno, allora la decisione è in favore della alternativa a. E, sempre la positive responsiveness (applicata un numero sufficiente di volte), ci garantisce che a è preferita quando il numero di "1" supera il numero di "-1", qualunque sia la differenza.

Abbiamo così visto che Φ coincide con la regola di decisione a maggioranza semplice, la quale ci dice, per l'appunto, che $a \sqsupseteq b$[5] se e solo se il numero di "1" è maggiore o uguale del numero di "-1".

Ricordo che May ha anche dimostrato che le quattro condizioni sopra descritte sono fra loro indipendenti.

Anche per il teorema di May vale un fatto generale che si ha ogni qualvol-

[5]Qui ho usato la relazione *duale* di $\sqsubseteq$, ovvero $\sqsupseteq$, che è definita così:
$a \sqsupseteq b \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} b \sqsubseteq a$.

L'uso delle relazioni duali è comunissimo nel contesto delle di relazioni d'ordine. Tanto per fare un esempio, sono relazioni duali: $<$ con $>$ e $\leq$ con $\geq$. Una qualsiasi relazione di equivalenza è "autoduale", per via della condizione di simmetria. Ricordo che una relazione ρ, definita su un insieme Z, è simmetrica se: $x\rho y$ se e solo se $y\rho x$ per ogni $x, y \in Z$. Pertanto la relazione $\sim$ precedentemente introdotta è autoduale, visto che è una relazione di equivalenza (è facile verificare che è riflessiva, simmetrica e transitiva). Anche il "=" è autoduale. Osservo, da ultimo, che il termine "duale" è appropriato in quanto la relazione duale della relazione duale è la relazione di partenza.

ta si ha una funzione di benessere sociale: ad essa è subordinata una funzione di scelta sociale. Ovvero, dato un profilo di preferenze $(\preceq_i)_{i\in N}$, le preferenze "sociali" $\Phi((\preceq_i)_{i\in N})$ permettono di determinare quale sia la scelta della collettività: verrà scelto quell'elemento di X che risulta essere preferito agli altri. Cioè, $\bar{x} \in X$ tale che $x \sqsubseteq \bar{x}$ per ogni $x \in X$ (anche qui, per alleggerire le notazioni, usiamo il simbolo $\sqsubseteq$ per indicare $\Phi((\preceq_i)_{i\in N})$). Naturalmente nulla vieta che vi possano essere delle situazioni di parità (ciò accade se il numero di individui che preferiscono strettamente a a b è uguale a quello di coloro che hanno la preferenza opposta). Quindi, non sempre viene determinato univocamente l'elemento scelto in X (per cui, tecnicamente, dobbiamo parlare più correttamente di *corrispondenza* di scelta sociale, anziché di funzione di scelta sociale).

3 Commenti

In questa breve sezione vorrei analizzare la ragionevolezza delle ipotesi del teorema di May. Un modo per discutere il senso di questo teorema è quello di mettersi da un punto di vista di "ingegneria costituzionale" (si tratta di un punto di vista che è anche adottato nella discussione delle ipotesi che stanno alla base del teorema di Arrow). Se l'ottica è questa, le prime tre proprietà appaiono molto naturali.

Una "Costituzione" ha lo scopo di fissare un quadro generale di regole per l'esercizio concreto del potere deliberativo, e in quanto tale non dovrebbe escludere "a priori" dal suo ambito nessuno dei possibili profili di preferenze di coloro i quali saranno poi chiamati a decidere. Sarebbe curioso che certe configurazioni delle preferenze venissero escluse dal novero di quelle "trattabili". Insomma, la condizione di *Dominio Universale* appare essere una richiesta del tutto ragionevole.

Gli stessi motivi valgono, a maggior ragione, per corroborare le due condizioni di *Anonimità* e di *Neutralità*. Che un decisore venga trattato in modo diverso da un altro sembrerebbe sospetto (diverso è il discorso nel caso di una SpA, in cui il numero di azioni possedute da un azionista è tenuto in considerazione; diverso discorso vale anche in una monarchia costituzionale... In effetti, qualche perplessità sull'istituto della monarchia ce l'ho). Ugualmente sospetto sarebbe il caso in cui una alternativa avesse una posizione precostituita di maggior forza (anche qui, si possono trovare eccezioni, e senza neanche dover andare molto lontano: una norma "costituzionale" è di solito trattata in modo asimmetrico rispetto a una sua proposta di modifica!).

Infine, l'ultima condizione, la *Positive responsiveness*: essa riflette una condizione di monotonia che sembra abbastanza naturale (ache qui, contestazioni se ne possono fare: un parere unanime o quasi potrebbe generare il sospetto che non vi sia sufficiente diritto di "voce" per le minoranze). Una obiezione che si può formulare alla *Positive responsiveness* è il fatto che essa imponga sempre il passaggio a una preferenza stretta anche per effetto di una preferenza diversa da parte di un solo decisore: in una situazione di parità che coinvolge magari un milione di decisori pensare che uno solo sia in grado di far pendere l'ago della bilancia da una parte può in effetti sembrare eccessivo.

Al di là delle poche cose dette qui sopra, vorrei ancora solo sottolineare l'importanza di carattere *didattico* che hanno modelli di questo tipo: mostrano come, con strumenti relativamente elementari, si possano offrire esempi di interfaccia tra il linguaggio matematico e il mondo reale, contribuendo a illustrare quanto ampio sia lo spettro delle questioni che possono essere affrontate (utilmente) con la matematica. Dimostrano anche come strutture di base della matematica possano avere delle applicazioni interessanti. Non va dimenticato, però, che le risposte che si ottengono in questo modo potrebbero non essere adeguate per una descrizione significativa del problema reale cui si è interessati (peggio, uno potrebbe essere tentato di "costringere" il mondo vero dentro un vestito inadatto). Insomma, come al solito, nella modellizzazione matematica occorre avere umiltà: la cautela non è mai troppa. Specialmente quando si affrontano problematiche delle scienze sociali.

4 Bibliografia

Arrow, Kenneth J. (1951): *Social Choice and Individual Values*, Cowles Commission Foundation monograph, **12**, Wiley, New York (NY-USA). Seconda edizione, con importanti correzioni: 1963.
Scaricabile da: `http://cowles.econ.yale.edu/P/cm/cfmmain.htm`
Suggerisco di farlo con la versione del 1963.

Black, Duncan (1958): *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge University Press, Cambridge (MA-USA).

May, Kenneth O. (1952): *A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decisions*, Econometrica, **20**, 680–684.

Moretti, Stefano, e Fioravante Patrone (2000): *Giochi semplici, indici di potere e scelte sociali*, serie di tre conferenze tenute all'IRRSAE (ora IRRE) Liguria.
Disponibili in rete: `http://www.diptem.unige.it/patrone/DRI.htm`