GIOCHI A UTILITÀ NON TRASFERIBILE (NTU Games)

G.Ferrari [*] V.Fragnelli [†] M.Margiocco [‡]

Contents

Ciclo di seminari presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova dal 12 al 26 aprile 1999, nell'ambito del "Seminario di teoria dei Giochi", a.a.1998/99.

[*]Dipartimento di Matematica - Università di Genova

[†]Dipartimento di Scienze e Tecnologie Avanzate - Università del Piemonte Orientale

[‡]Dipartimento di Matematica - Università di Genova

1 Introduzione

L'uso dell'utilità trasferibile nella Teoria dei Giochi richiede tre ipotesi:

– deve esistere un comune mezzo di scambio, tipo il denaro;

– deve essere possibile effettuare pagamenti laterali;

– l'utilità di ciascun giocatore per il denaro deve essere una funzione lineare della quantità di denaro.

Esistono molte situazioni in cui queste ipotesi non sono soddisfatte.

Per esempio sia dato un mercato di scambio $\langle N, (u^i)_{i\in N}, (e^i)_{i\in N}\rangle$ dove N è un insieme di agenti e per ciascun agente $i \in N$ è data una funzione di utilità $u^i : I\!R^m \to I\!R$ e una dotazione iniziale $e^i \in I\!R^m$, dove m rappresenta il numero di beni del mercato.

Si può costruire un gioco ad utilità trasferibile $G = (N, v)$ nel modo seguente:

$$v(S) = \sup \left\{ \sum_{i\in S} u^i(x^i) : x^i \in I\!R^m, i \in S \text{ e } \sum_{i\in S} x^i \leq \sum_{i\in S} e^i \right\} \qquad \forall S \subseteq N$$

in altre parole $v(S)$ rappresenta il massimo profitto che la coalizione S può ottenere riassegnando le dotazioni iniziali tra i componenti, e sommando le utilità di $x^i \in I\!R^m$ (quantità di denaro che l'agente i può ottenere vendendo x^i).

Se il denaro non gioca un ruolo così centrale si possono considerare i seguenti insiemi:

$$V(S) = \left\{ (z_i)_{i\in S} : \forall i \in S\ \exists\ x^i \in I\!R^m \text{ con } \sum_{i\in S} x^i \leq \sum_{i\in S} e^i \text{ e } z_i = u^i(x^i) \right\} \qquad \forall S \subseteq N$$

$V(S)$ contiene tutte le possibili allocazioni di utilità che i giocatori della coalizione S possono ottenere "barattando" tra loro le proprie dotazioni iniziali.

Ricordiamo che un gioco TU (gioco cooperativo ad utilità trasferibile) è una coppia $G = (N, v)$, dove N= {1, 2, ..., n} è un insieme finito di giocatori e $v : \mathcal{P}(N) \to I\!R$ è una funzione che ad ogni coalizione $S \subset N$ associa un numero reale $v(S)$ che rappresenta l'utilità di S.

Invece un gioco NTU (gioco cooperativo ad utilità non trasferibile) è una coppia $G = (N, V)$, dove N= {1, 2, ..., n} è un insieme finito di giocatori e V è una funzione che ad ogni coalizione $S \subseteq N$ associa l'insieme di tutte le ripartizioni di utilità ottenibili dai membri di S. Quindi $V(S) \subset I\!R^S$, dove $I\!R^S$ è l'insieme delle applicazioni da S in $I\!R$. $I\!R^S$ è isomorfo a $I\!R^{|S|}$ dove $|S|$ è la cardinalità di S e gli assi coordinati sono indiciati dagli elementi di S (v. fig.1).

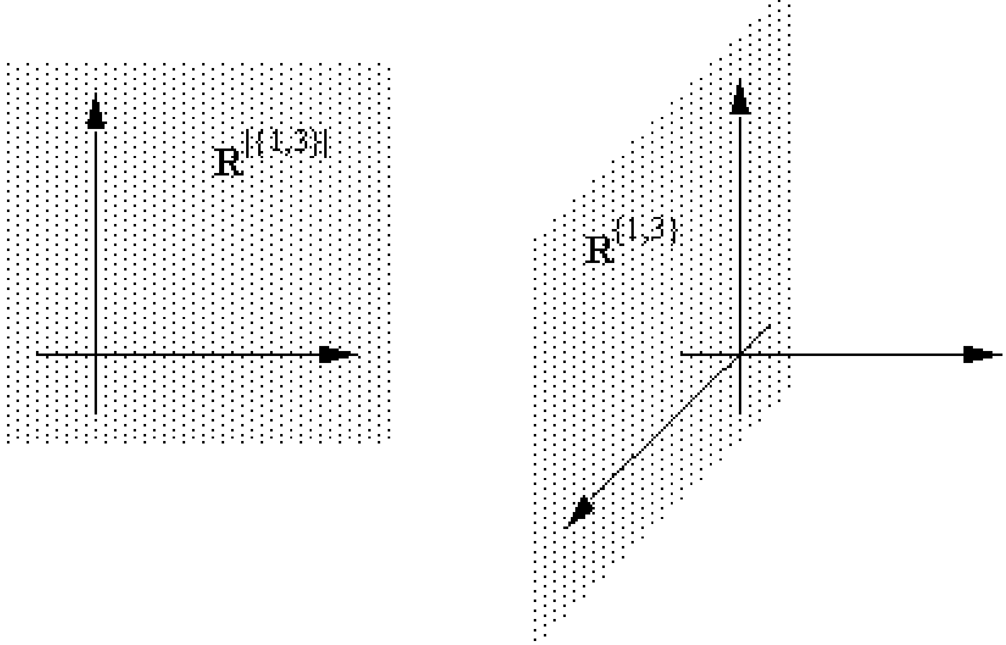


Figure 1:

Diremo che un insieme $A \subseteq I\!R^S$ è comprensivo (*comprehensive*) se $(x_i) \in A,\ y_i \leq x_i\ \forall i \in S \Rightarrow (y_i) \in A$. Ciò significa se A comprende una allocazione (x_i), allora comprende anche il cono formato da tutte le allocazioni $(y_i) \leq (x_i)$, che indicheremo con $A - I\!R^S_+$.

Definizione 1.1 *$G = (N, V)$ è un gioco NTU se, $\forall\ S \subseteq N$ si ha che: V(S) $\subset I\!R^S$ è chiuso, non vuoto e comprensivo.*

Esempio 1.1 Sia $G = (N, V)$ il gioco definito da:

$$\begin{aligned}
N &= \{1, 2, 3\} \\
V(\{1\}) &= \{x_1 \in I\!R : x_1 \leq 2\} \\
V(\{2\}) &= \{x_2 \in I\!R : x_2 \leq 0\} \\
V(\{3\}) &= \{x_3 \in I\!R : x_3 \leq 0\} \\
V(\{1,2\}) &= \{(x_1, x_2) \in I\!R^{\{1,2\}} : x_1 \leq 2\ , x_2 \leq 0\} \\
V(\{1,3\}) &= \{(x_1, x_3) \in I\!R^{\{1,3\}} : x_1 \leq 6\ , x_3 \leq 0\} \\
V(\{2,3\}) &= \{(x_2, x_3) \in I\!R^{\{2,3\}} : x_2 \leq 4\ , x_3 \leq 0\} \\
V(N) &= \{x \in I\!R^3 : x_1 + x_3 \leq 6\ , x_2 + x_3 \leq 4\}
\end{aligned}$$

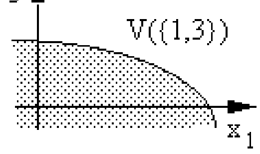


Figure 2:

Talvolta è conveniente considerare $V(S)$ come un sottinsieme di $I\!R^N$, lo spazio delle utilità della grande coalizione. Due modi standard per far ciò sono di considerare i seguenti insiemi:

$\underline{V}\ (S) = V(S) \times \{(0)_{i \in N \setminus S}\}$

$\widetilde{V}(S) = V(S) \times I\!R^{N \setminus S}$

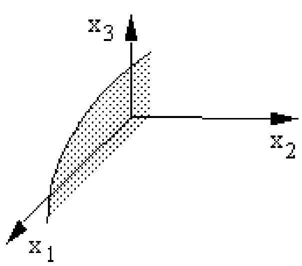
(L'insieme $\underline{V}\ (S)$ è *magro* nel senso che ha dimensione $s = |S|$, l'insieme $\widetilde{V}(S)$ è *grasso* nel senso che ha dimensione $n = |N|$, v. figure 2 e 3).

Una condizione utile al fine di realizzare effettivamente la grande coalizione è la superadditività; essa richiede che date due coalizioni disgiunte S e T i rispettivi membri possano ottenere almeno le stesse allocazioni di utilità anche nella coalizione congiunta $S \cup T$. Formalmente si ha:

Definizione 1.2 *Sia $G = (N, V)$ un gioco NTU; siano $S,\ T \subset N,\ S \cap\ T = \emptyset$. Diciamo che il gioco G è superadditivo se:*

$$\widetilde{V}(S) \cap \widetilde{V}(T) \subseteq \widetilde{V}(S \cup T)$$

oppure



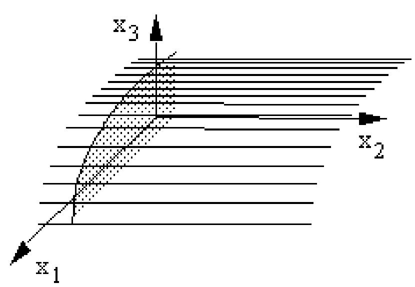


Figure 3:

Per confrontare le allocazioni di utilità in $I\!R^N$ abbiamo bisogno della seguente

Definizione 1.3 *Sia $G = (N, V)$ un gioco NTU, u, $v \in I\!R^N$. Diciamo che u domina v tramite la coalizione S (u dom_S v) se :*

1. $u \in \widetilde{V}(S)$
2. $u_i > v_i \qquad \forall\, i \in S$

Diciamo che u domina v (u *dom* v) se $\exists\, S : u\ dom_S\ v$.

Si noti che la relazione di dominanza non è transitiva e in particolare può accadere che u *dom* v e v *dom* u (ovviamente tramite due differenti coalizioni).

Introduciamo ora due concetti di soluzione per un gioco NTU

Definizione 1.4 *Il nucleo di un gioco NTU G=(N,V), notazione C(G), è l'insieme delle allocazioni di utilità di V(N) che non sono dominate. In simboli:*

$$C(G) = \{u \in V(N) : \nexists\, S \subseteq N, \nexists\, y \in \widetilde{V}(S) : y\ dom_S\ u\}$$

Definizione 1.5 *Una soluzione di von Neumann-Morgenstern (soluzione vNM) di un gioco NTU G=(N,V), è un sottinsieme A di V(N) con la proprietà che ogni allocazione di utilità in A non è dominata da elementi di A e ciascuna allocazione che non sta in A è dominata da un elemento di A.*

Le soluzioni vNM hanno una storia più lunga di quella del nucleo, ma in generale, ne esiste più di una e non ci sono metodi per determinarle. Inoltre non ci sono caratterizzazioni dei giochi NTU che hanno soluzioni vNM, diversamente da quanto accade per il nucleo. Infine Lucas (1968) ha trovato un esempio di un gioco senza soluzioni vNM. Perciò non ci soffermiamo oltre sulle soluzioni vNM.
La definizione di nucleo per i giochi NTU è una naturale estensione di quella analoga per i giochi TU. Infatti sia $G = (N, v)$ un gioco TU, ad esso possiamo associare in modo naturale il gioco NTU $G' = (N, V)$ definito da:

$$V(S) = \{(u_i)_{i \in S} : \sum_{i \in S} u_i \leq v(S)\}$$

ed è facile dimostrare che $C(G') = C(G)$.
Sebbene il nucleo di un gioco TU sia sempre un insieme convesso, questo non è vero per il nucleo di un gioco NTU, come dimostra il seguente:

Esempio 1.2 Sia $G = (N, V)$ il gioco definito da (v. fig.4):

$$\begin{aligned} N &= \{1, 2, 3\} \\ V(\{i\}) &= \{x_i \in I\!R : x_i \leq 0\} \end{aligned}$$

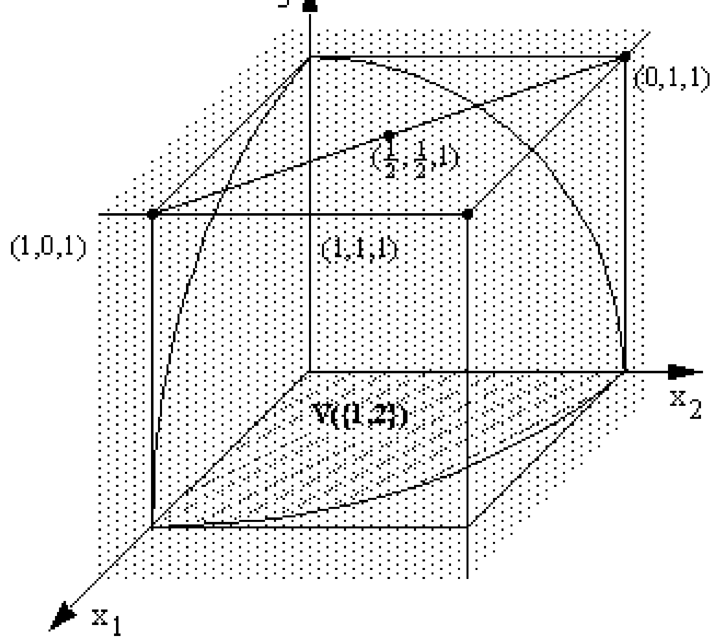


Figure 4:

$$
\begin{aligned}
V(S) &= \left\{(x_i)_{i\in S} \in I\!R^S_+ : \sum_{i\in S} x_i^2 = 1\right\} - I\!R^S_+ \qquad \forall S \subset N : |S| = 2 \\
V(N) &= \{(1,1,1)\} - I\!R^N_+.
\end{aligned}
$$

I punti (0,1,1) e (1,0,1) stanno nel nucleo ma il punto medio del segmento che li unisce $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ non sta nel nucleo poichè $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ $dom_{\{1,2\}}$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ (v. fig.5).

Esempio 1.3 Consideriamo un problema di contrattazione a due giocatori (F, d) dove $F \subset I\!R^2$ è la regione di contrattazione (feasible set) e d è il punto di contrasto (disagreement point). Possiamo interpretarlo come un gioco NTU dove:

$$
\begin{aligned}
V(\{i\}) &= \{x_i \in I\!R : x_i \le d_i\} \qquad i = 1,2 \\
V(\{1,2\}) &= F - I\!R^2_+
\end{aligned}
$$

Per questo problema sono stati proposti numerosi concetti di soluzione puntuale (v. fig.6), tra cui:

Soluzione di Nash:

$$N_S = \arg\max \{(x_1 - d_1)(x_2 - d_2) : x \in F\}$$

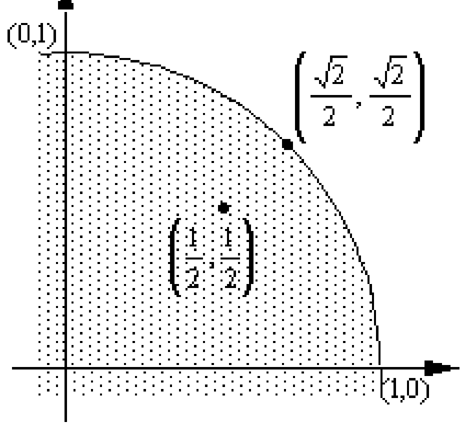


Figure 5:

Soluzione di Kalai-Smorodinsky:

$$K_S = \arg\max \left\{ \frac{x_1 - d_1}{a_1 - d_1} = \frac{x_2 - d_2}{a_2 - d_2} : x \in F, a_i = \max \{x_i : x \in F\} \right\}$$

Soluzione Egualitaria:

$$E_S = \arg\max \ \{x_1 - d_1 = x_2 - d_2 : x \in F\}$$

Soluzione delle Aree uguali:

$$A_S : A\left(\left\{d \ + \ I\!R^2_+\right\} \cap \{x \in \ F \ : \ x_1 \ \geq \ (A_S)_1\}\right) =$$

$$= \ A\left(\left\{d \ + \ I\!R^2_+\right\} \cap \{x \in \ F \ : \ x_2 \ \geq \ (A_S)_2\}\right)$$

Soluzione Dittatoriale:

$$D^i_S = \arg\max \ \{x_i : x \in F, x_j = d_j, j \neq i\}$$

Soluzione Utilitaria:

$$U_S = \arg\max \ \{x_1 + x_2 : x \in F\}\,.$$

Esempio 1.4 Consideriamo il gioco NTU in cui si vogliono allocare gli slack tra le attività di un progetto modellizzato tramite il PERT (Project Evaluation and Review Technique). Questo consiste nell'assegnare ad ogni attività di ogni coalizione un margine di tempo entro cui può essere terminata, senza danneggiare le

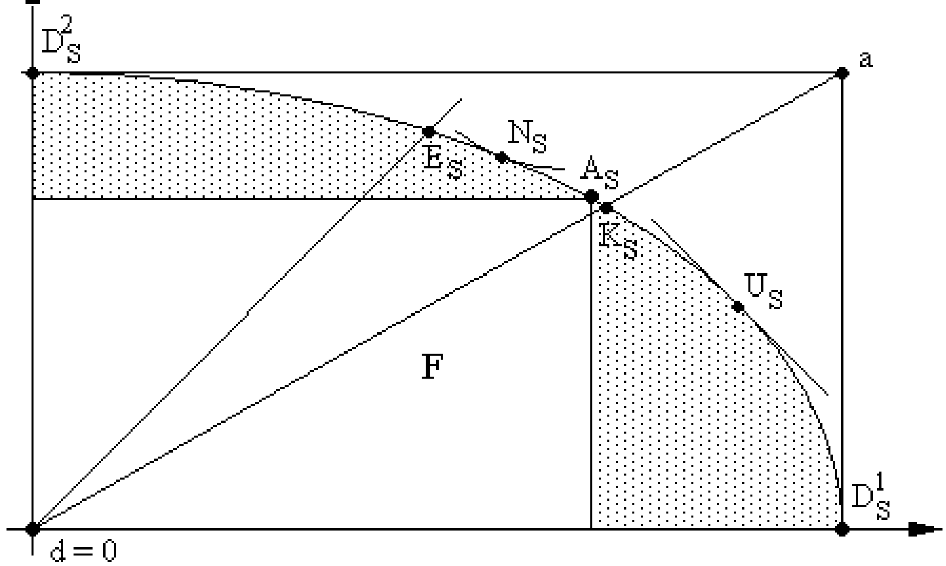


Figure 6:

altre attività non facenti parte della coalizione. Il corrispondente gioco in forma caratteristica è dato da:

$$\begin{aligned} V(N) &= \left\{ x \in I\!R^N : x_i \geq 0 \ \forall\ i \in N,\ \sum_{i \in C_j} x_i \leq d_j, \forall\ C_j \right\} - I\!R^N_+ \\ V(S) &= \left\{ y \in I\!R^S_+ : (x_{N \setminus S}, y) \in V(N),\ \forall\ x \in V(N),\ x \geq 0 \right\} - I\!R^S_+ \quad \forall S \subset N \end{aligned}$$

dove x_i è lo slack assegnato all'attività i, C_j rappresenta una sequenza di attività (cammino) che va dall'inizio alla fine del progetto e d_j è lo slack del cammino C_j

Esempio 1.5 Supponiamo che due giocatori 1,2 debbano muoversi da A a B; essi hanno a disposizione due strade S1 e S2. Se S1 è utilizzata da un solo giocatore il tempo di percorrenza è di 10 minuti mentre, se è utilizzata da entrambi i giocatori il tempo aumenta di 5 minuti. Se S2 è utilizzata da un solo giocatore il tempo di percorrenza è di 12 minuti mentre, se è utilizzata da entrambi i giocatori il tempo aumenta di 8 minuti. Possiamo interpretarlo come un gioco NTU dove:

$$\begin{aligned} V(\{i\}) &= \{x_i \in I\!R : x_i \leq -15\} \qquad i = 1, 2 \\ V(\{1, 2\}) &= \{(-10, -12), (-12, -10)\} - I\!R^2_+ \end{aligned}$$

Si osservi che ciascun giocatore, da solo, può garantirsi un tempo di 15 minuti derivante dalla scelta della strada più veloce sulla quale però può transitare anche l'altro; invece cooperando uno impiegherà 10 minuti e l'altro 12 (v. fig.7).

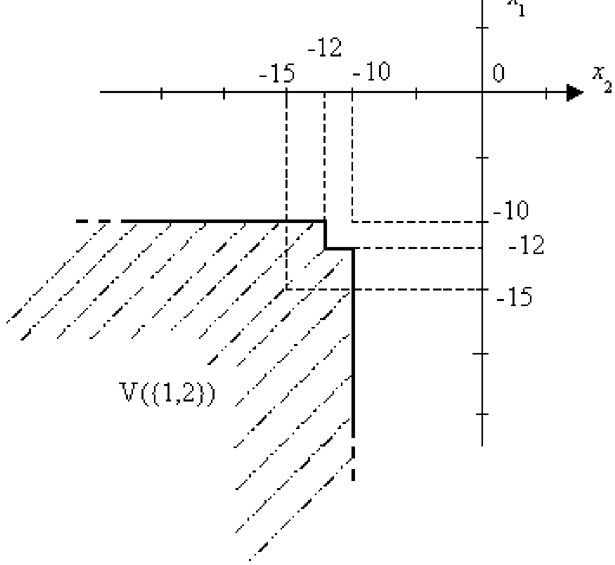


Figure 7:

2 Giochi bilanciati

La nozione di gioco bilanciato è importante nella teoria dei giochi TU perché i giochi TU con nucleo non vuoto sono tutti e soli quelli bilanciati. Qualcosa di simile si può dire anche per i giochi NTU. Inizialmente diamo le seguenti definizioni:

Definizione 2.1 *Sia N un insieme finito. Un sottinsieme $\mathcal{B}$ di $\mathcal{P}(N)$ dicesi collezione bilanciata se esistono dei numeri positivi λ_B per ciascun $B \in \mathcal{B}$ chiamati pesi, tali che*

$$\sum_{B:i\in B\in\mathcal{B}} \lambda_B = 1 \qquad \forall i \in N$$

Definizione 2.2 *Un gioco NTU $G = (N, V)$ dicesi cardinalmente bilanciato se per ogni collezione bilanciata $\mathcal{B}$ con pesi λ_B, $B \in \mathcal{B}$:*

$$\sum_{B\in\mathcal{B}} \lambda_B \underline{V}(B) \subseteq V(N)$$

Definizione 2.3 *Un gioco NTU $G = (N, V)$ dicesi ordinalmente bilanciato se per ogni collezione bilanciata $\mathcal{B}$:*

$$\bigcap_{B\in\mathcal{B}} \widetilde{V}(B) \subseteq V(N)$$

Teorema 2.1 *Un gioco NTU cardinalmente bilanciato è ordinalmente bilanciato.*

Sia Γ^B la classe dei giochi NTU $G = (N, V)$ per cui valgono le seguenti condizioni di limitatezza:

1. $\exists\ v \in I\!R^N$ *tale che* $V(\{i\}) = (-\infty, v_i] \subseteq I\!R^{\{i\}} \quad \forall i \in N$
2. $\{(u_i)_{i\in S} \in V(S) : u_i \geq v_i \quad \forall\ i \in S\}$ è limitato e non vuoto $\forall S \in N$

In questa classe estendiamo il teorema di Bondareva-Shapley. Questa estensione ha molte utili applicazioni nella teoria dell'equilibrio economico.

Teorema 2.2 *(Scarf 1967) Un gioco NTU ordinalmente bilanciato nella classe* Γ^B *ha nucleo non vuoto.*

Il viceversa è falso come mostra il seguente

Esempio 2.1 Sia $G = (N, V)$ il gioco definito da:

$$\begin{array}{rcl} N & = & \{1,2,3\} \\ V(i) & = & (-\infty, 0] \subset I\!R^{\{i\}} \qquad \forall i \in N \\ V(S) & = & \{(1,1)\} - I\!R^S_+ \qquad \forall S \subset N : |S| = 2 \\ V(N) & = & \{(2,2,0)\} - I\!R^N_+. \end{array}$$

È chiaro che (2,2,0) è un elemento del nucleo. G non è ordinalmente bilanciato perché (1,1,1) $\notin V(N)$ anche se (1,1) $\in V(S)$ $\forall S \subseteq N$ con $|S| = 2$ e $\{S \subseteq N : |S| = 2\}$ è una collezione bilanciata.

3 Convessità

Altre caratterizzazioni dei giochi NTU con nucleo non vuoto si possono dare con le nozioni di convessità cardinale e ordinale, che sono collegate anche con la convessità dei giochi TU.

Definizione 3.1 *Un gioco NTU* $G = (N, V)$ *si dice cardinalmente convesso se per ogni* $S, T \subseteq N$ *si ha:*

$$\underline{V}(S) + \underline{V}(T) \subseteq \underline{V}(S \cup T) + \underline{V}(S \cap T)$$

e V(N) è convesso.

G si dice ordinalmente convesso se per ogni S, $T \subseteq N$ *si ha:*

$$\widetilde{V}(S) \cap \widetilde{V}(T) \subseteq \widetilde{V}(S \cup T) \cup \widetilde{V}(S \cap T)$$

Esempio 3.1 Il seguente gioco $G = (N, V)$ è ordinalmente convesso, ma non cardinalmente convesso:

$$\begin{aligned}
N &= \{1,2,3\} \\
V(\{i\}) &= \{0\} - I\!R_+^{\{i\}} \qquad \forall i \in N \\
V(\{1,2\}) &= \{(0,1)\} - I\!R_+^{\{1,2\}} \\
V(\{1,3\}) &= \{(1,0)\} - I\!R_+^{\{1,3\}} \\
V(\{2,3\}) &= \{(0,0)\} - I\!R_+^{\{2,3\}} \\
V(N) &= \{x \in I\!R^N : x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}.
\end{aligned}$$

Per S=\{1,2\} e T=\{1,3\} si ha: (1,1,0)=(1,0,0)+(0,1,0) $\in \underline{V}(S) + \underline{V}(T)$ ma (1,1,0) $\notin \underline{V}(S\cup T)+\underline{V}(S\cap T) = V(N)$. Quindi G non è cardinalmente convesso. La ordinale convessità di G è immediata.

Esempio 3.2 Viceversa il seguente gioco $G = (N, V)$ è cardinalmente convesso, ma non ordinalmente convesso:

$$\begin{aligned}
N &= \{1,2,3,4\} \\
V(S) &= \{0\} - I\!R_+^{S} \qquad \forall S \neq N, \{2,3,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3\} \\
V(\{2,3\}) &= \{(4,1)\} - I\!R_+^{\{2,3\}} \\
V(\{1,2,3\}) &= \{(2,2,2), (0,4,1)\} - I\!R_+^{\{1,2,3\}} \\
V(\{2,3,4\}) &= \{(3,3,3), (4,1,0)\} - I\!R_+^{\{2,3,4\}} \\
V(N) &= \mathrm{conv}(\{(2,2,2,2), (2,1,4,3), (0,4,1,0), (0,3,3,3)\}) - I\!R_+^{N}.
\end{aligned}$$

$$\text{Per } u = (2,2,2,3) \text{ abbiamo } \begin{cases} (u_i)_{i\in\{1,2,3\}} &= (2,2,2) \in V(\{1,2,3\}) \\ (u_i)_{i\in\{2,3,4\}} &= (2,2,3) \in V(\{2,3,4\}) \end{cases}$$

$$\text{Ma } \begin{cases} (u_i)_{i\in\{1,2,3\}\cup\{2,3,4\}} &= u = (2,2,2,3) \notin V(N) \\ (u_i)_{i\in\{1,2,3\}\cap\{2,3,4\}} &= (u_i)_{i\in\{2,3\}} = (2,2) \notin V(\{2,3\}) \end{cases}$$

Quindi G non è ordinalmente convesso. La cardinale convessità di G è immediata.

Consideriamo ora la classe Γ^C dei giochi NTU $G = (N, V)$ con la proprietà che $V(\{i\}) = (-\infty, 0] \subset I\!R^{\{i\}}$ e $V(S) \cap I\!R_+^S$ è limitato e non vuoto.

Teorema 3.1 *I giochi NTU cardinalmente convessi, oppure ordinalmente convessi, di Γ^C hanno nucleo non vuoto.*

Esempio 3.3 Apportiamo una modifica minima all'esempio 3.2, eliminando semplicemente *conv* dalla definizione di $V(N)$. Otteniamo così un gioco $G = (N, V)$ non cardinalmente convesso, in quanto $V(N)$ non è convesso. G non è cardinalmente bilanciato. Infatti:

B = {{1},{4},{1,2,3},{2,3,4}} è bilanciato. I pesi sono tutti $\frac{1}{2}$.

$0 \in \underline{V}(\{1\}), 0 \in \underline{V}(\{4\}), (2,2,2,0) \in \underline{V}(\{1,2,3\}), (0,3,3,3) \in \underline{V}(\{2,3,4\})$

$\frac{1}{2}$ (0,0,0,0) + $\frac{1}{2}$ (0,0,0,0) + $\frac{1}{2}$ (2,2,2,0) + $\frac{1}{2}$ (0,3,3,3) = (1, 2.5, 2.5, 1.5) $\notin V(N)$.

Quindi la convessità di $V(N)$ è di fondamentale importanza. Possiamo ancora studiare il legame con la convessità dei giochi TU. Vilkov ha dimostrato che questa eèquivalente alla ordinale convessitaþer i giochi NTU.

Terminiamo questo paragrafo osservando che c'è un'unica soluzione vNM per un gioco NTU ordinalmente convesso ed essa coincide col nucleo. In generale il nucleo è contenuto in ogni soluzione vNM.

4 Valori

Nel 1950 Nash formulò una soluzione per un gioco di contrattazione a 2 persone, che può essere visto come un gioco NTU a 2 persone. Il suo metodo fu di stabilire una lista di assiomi e provare che esiste un unico concetto di soluzione che li soddisfa. Nel 1959 Harsanyi propose un concetto di soluzione per giochi NTU che fu assiomatizzato 24 anni dopo da Hart. Cercando una soluzione più adatta per le applicazioni alla teoria economica, Shapley sviluppò nel 1969 il cosiddetto λ-*transfer value*, che fu assiomatizzato da Aumann nel 1983. Altri concetti di soluzione furono sviluppati da Owen e Lemaire (1970, 1973).

4.1 Il λ-transfer value

Consideriamo nuovamente un gioco NTU $G = (N, V)$ per cui $V(S)$ è un sottoinsieme di $I\!R^S$ non vuoto, comprensivo e superiormente limitato, cioè:

$$
\begin{aligned}
&- \quad V(S) \subseteq I\!R^S e V(S) \neq \emptyset \\
&- \quad V(S) = V(S) - I\!R^S_+ \\
&- \quad \exists\ M \in I\!R : V(S) \subseteq \{x \in I\!R^S : x_i \leq M\ \ \forall\ i \in S\} \qquad \forall S \subseteq N
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Secondo Shapley una soluzione $\hat{x} \in I\!R^N$ di un gioco NTU $G = (N, V)$ deve soddisfare le seguenti condizioni:

S.1 fattibilità: $(\hat{x} \in V(N))$

S.2 Pareto ottimalità: $(\nexists\ x \in V(N) : x \neq \hat{x}, x_i \geq \hat{x}_i\ \forall\ i \in N)$.

S.3 $\hat{x}$ deve essere una divisione *"equa"* (in un modo da definire) tra i giocatori in N.

Per spiegare queste tre condizioni, Shapley stabilisce un confronto tra le utilità dei vari giocatori usando dei fattori di scala o pesi$(\lambda_i)_{i\in N}$ che possono essere visti come tassi di scambio tra l'utilità di ciascuno e un bene comune trasferibile come il denaro. Un gioco NTU $G = (N, V)$ può allora essere trasformato in un gioco TU $G_\lambda = (N, v_\lambda)$:

$$v_\lambda(S) = \sup \left\{ \sum_{i\in S} \lambda_i x_i : (x_i) \in V(S) \right\} \qquad \forall S \subseteq N \tag{2}$$

Non si perde nessuna informazione se ci limitiamo a considerare vettori di pesi tutti non negativi la cui somma è uguale a 1, cioè:

$$\lambda \in \Lambda = \{(\lambda_i)_{i\in N} : \sum_{i\in N} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0, \forall i \in N\}.$$

Nel caso TU ci sono molti concetti di soluzione. Possiamo considerarne uno qualsiasi, diciamo Φ (per esempio il valore Shapley). Allora, per un gioco TU $G = (N, v)$ consideriamo $\Phi(N, v)$ come una divisione equa. Inoltre, per un gioco NTU $G' = (N, V)$ possiamo dire che una allocazione di utilità $\hat{x}$ è una divisione equa se esistono dei pesi λ_i tali che $(\lambda_i \hat{x}_i)$ è la divisione equa del gioco TU (N, v_λ), cioè $\Phi(N, v_\lambda) = (\lambda_i \hat{x}_i)$

Fissati certi pesi (λ_i), una allocazione $\hat{x} \in$ V(N) è efficiente se:

$$\sum_{i\in N} \lambda_i \hat{x}_i = \max \left\{ \sum_{i\in N} \lambda_i x_i : (x_i) \in V(N) \right\} \tag{3}$$

Cioè $\hat{x}$ massimizza il social welfare (benessere sociale).

Supponiamo ora che $V(N)$ sia convesso. Allora possiamo assumere che per ogni $\hat{x}$ appartenente alla frontiera di Pareto di $V(N)$ esistano dei pesi (λ_i) tali che (3) è soddisfatta. $\lambda = (\lambda_i)$ è il vettore normale di un iperpiano tangente a $V(N)$ in $\hat{x}$.

Un vettore $\hat{x} \in I\!R^N$ è chiamato λ-transfer value se esistono dei pesi (λ_i) tali che valga (3) e che $(\lambda_i x_i)$ è una divisione equa per il gioco $G_\lambda = (N, v_\lambda)$ (vedi (2)).

Teorema 4.1 *(Shapley 1969): Sia Φ una funzione soluzione continua per la classe dei giochi TU. Sia inoltre $G = (N, V)$ un gioco NTU per cui V(N) è convesso e compattamente generato (cioè esiste un sottoinsieme compatto K di $I\!R^N$ tale che V(N) = K - $I\!R^N_+$). Sia inoltre:*

$$\sum_{i\in N} \Phi_i(N, v_\lambda) = v_\lambda(N) \tag{4}$$

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad \lambda_i = 0 \;\Rightarrow\; \Phi_i(N, v_\lambda) \geq 0 \tag{5}$$

Allora G ha almeno un λ-transfer value.

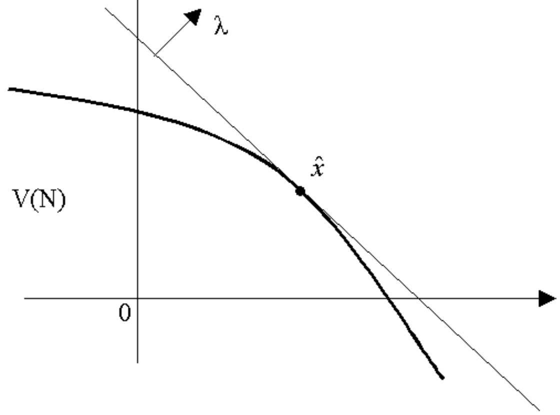


Figure 8:

La condizione (5) sembra piuttosto tecnica, ma se, per esempio $\Phi(N, v_\lambda)$ ha la proprietà di *razionalità individuale* cioè $\Phi_i(N, v_\lambda) \geq v_\lambda(\{i\}) \ \forall \ i \in N$, allora (5) è soddisfatta.

Si noti che richiedere che V(N) sia *compattamente generato* è più forte che richiedere che sia *limitatamente generato* (boundedly generated); nella figura 8 V(N) è limitatamente generato ma non compattamente generato. Uno dei concetti di soluzione più usati per i giochi TU è il valore Shapley, ma esso non è individualmente razionale per tutti i giochi TU. Questo problema può essere risolto aggiungendo un'ulteriore condizione su $G = (N, V)$, per esempio la *proprietà di superadditività*:

$$\underline{V}(S) + \underline{V}(T) \subseteq \underline{V}(S \cup T) \qquad \forall S, T \subseteq N \text{ e } S \cap T = \emptyset$$

Allora $G_\lambda = (N, v_\lambda)$ è superadditivo ed è ben noto che il valore Shapley è individualmente razionale per questi giochi.

Un'altra condizione generale su G è la proprietà di 0-monotonia:

$$\underline{V}(S) + \underline{V}(\{i\}) \subseteq \underline{V}(S \cup \{i\}) \qquad \forall S \subseteq N \backslash \{i\} \ e \ i \in N$$

Se $G = (N, V)$ soddisfa tale proprietà, il valore Shapley dei giochi TU G_λ=(N,v$_\lambda$) con $\lambda \in \Lambda$ soddisfa la proprietà di razionalità individuale.

Per ragioni di generalità il teorema di Shapley è stato enunciato nella forma di cui sopra.

Esempio 4.1 Supponiamo per il momento che Φ sia il valore Shapley. Questo è un esempio di un gioco NTU che ha più di un λ-transfer value (v. fig.9):

$$N = \{1, 2, 3\}$$

$$
\begin{aligned}
V(\{i\}) &= (-\infty, 0] \subset I\!R^{\{i\}} \\
V(\{1,2\}) &= \left\{ x \in I\!R^{\{1,2\}} : x_1 \leq \frac{1}{2}, x_2 \leq \frac{1}{2} \right\} \\
V(\{1,3\}) &= \left\{ x \in I\!R^{\{1,3\}} : x_1 \leq 0, x_3 \leq 1 \right\} \\
V(\{2,3\}) &= \left\{ x \in I\!R^{\{2,3\}} : x_2 \leq 0, x_3 \leq 1 \right\} \\
V(N) &= \operatorname{conv}\left(\left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right), (0,0,1) \right\} \right) - I\!R_+^{\{1,2,3\}}.
\end{aligned}
$$

Ci sono due λ-transfer value $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. I pesi corrispondenti a questi valori sono i valori stessi

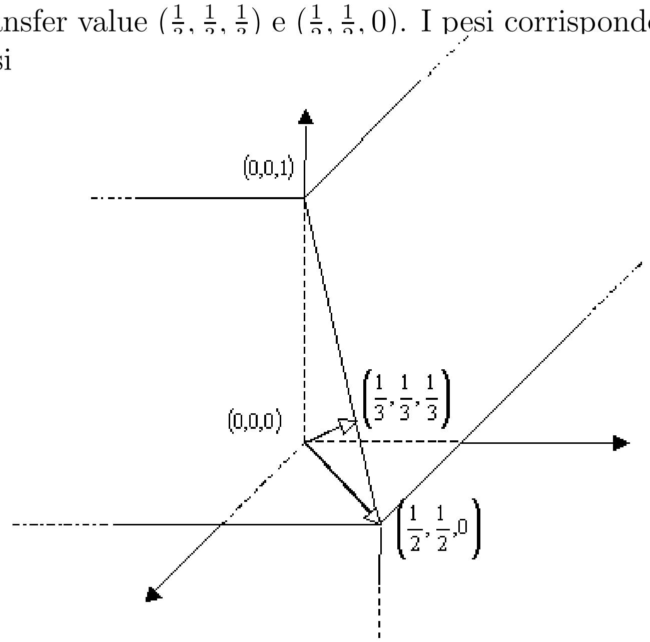


Figure 9:

Esempio 4.2 Questo è un esempio di un gioco NTU che non ha alcun λ-transfer value:

$$
\begin{aligned}
N &= \{1,2,3\} \\
V(\{i\}) &= (-\infty, 0] \subset I\!R^{\{i\}} \\
V(\{1,2\}) &= \left\{ x \in I\!R^{\{1,2\}} : x_1 \leq 0, x_2 \leq 0 \right\} \\
V(\{1,3\}) &= \left\{ x \in I\!R^{\{1,3\}} : x_1 \leq 0, x_3 \leq 0 \right\}
\end{aligned}
$$

$$V(\{2,3\}) = \left\{x \in I\!R^{\{2,3\}} : x_2 + x_3 \leq 1\right\}$$
$$V(N) = \left\{x \in I\!R^{N} : 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10\right\}$$

Naturalmente questo gioco non soddisfa le ipotesi del Teorema di Shapley.

4.2 Un'assiomatizzazione del λ-transfer value

Chiamiamo $\Gamma = \Gamma^N$ la classe di tutti i giochi NTU aventi lo stesso insieme dei giocatori N. Definiamo una *multifunzione soluzione* $\Phi : \Gamma \twoheadrightarrow I\!R^N$(cioè una funzione da Γ all'insieme dei sottoinsiemi di $I\!R^N$, compreso l'insieme vuoto). Inoltre, definiamo $\Gamma_\Phi \subseteq \Gamma$ la classe dei giochi NTU $G = (N, V)$ per cui $\Phi(V) \neq \emptyset$. Si dice *corrispondenza di Shapley* la multifunzione $\mathcal{L}$ così definita:

Sia $G = (N, V) \in \Gamma$ allora: $\hat{x} \in \mathcal{L}(G) \Leftrightarrow \exists\ \lambda \in \Lambda$ con le seguenti due proprietà:

$$- \quad (\lambda_i \hat{x}_i) \text{ è il valore Shapley del gioco TU } G_\lambda = (N, v_\lambda) \tag{6}$$

$$- \quad \sum_{i \in N} \lambda_i \hat{x}_i = \max \left\{ \sum_{i \in N} \lambda_i x_i : (x_i) \in V(N) \right\} \tag{7}$$

La corrispondenza di Shapley è una naturale estensione della funzione soluzione di Shapley per la classe dei giochi TU.

Lemma 4.1 *Sia $G = (N, V) \in \Gamma$ un gioco NTU corrispondente al gioco TU G'=(N,v), cioè*

$$V(S) = \left\{ x \in I\!R^S : \sum_{i \in S} x_i \leq v(S) \right\} \quad \forall S \subseteq N$$

allora $\mathcal{L}(G)$ contiene un solo elemento, che è il valore Shapley di G'.

La funzione soluzione di Shapley è stata caratterizzata da una lista di assiomi, che in qualche modo si può estendere anche alla corrispondenza di Shapley. Infatti sia Φ una multifunzione soluzione e $(N, V), (N, W), (N, U)$ elementi di Γ_Φ; consideriamo i seguenti assiomi:

G.1 *Efficienza*: $\Phi(V) \subseteq \mathrm{Par}(V(N))$ (frontiera di Pareto di $V(N)$)

G.2 *Additività condizionata*: $V = W + U \Rightarrow \Phi(V) \supseteq (\Phi(W) + \Phi(U)) \cap \mathrm{Par}(V(N))$

G.3 *Unanimità*: Sia U_T un gioco NTU che corrisponde al gioco TU di unanimità u_T, dove $u_T(S) = 1$ se $S \supseteq T, u_T(S) = 0$ altrimenti. Allora $\Phi(U_T) = \left\{\frac{1}{|T|} 1_T\right\}$ con $\emptyset \neq T \subseteq N$

G.4 *Covarianza di scala*: Se $\lambda \in I\!R^N_{++}$ e λV è il gioco NTU definito da:

$$\begin{array}{rrcll} & \lambda V(S) & = & \{(\lambda_i x_i) : (x_i) \in V(S)\} & \forall S \subseteq N \\ \text{allora} & \Phi(\lambda V) & = & \lambda\Phi(V) = \{(\lambda_i x_i) : (x_i) \in \Phi(V)\} & \end{array}$$

G.5 *Indipendenza dalle alternative irrilevanti*: Se $V(N) \subseteq W(N)$ e $V(S) = W(S)$ per ogni $S \subset N$ allora $\Phi(V) \supseteq \Phi(W) \cap$ Par$(V(N))$.

Lemma 4.2 *Sia Φ una multifunzione soluzione con la proprietà che $\Phi(V) \neq \emptyset$ per ogni gioco NTU (N,V) che corrisponde ad un gioco TU (N,v). Supponiamo che Φ soddisfi gli assiomi da G.1 a G.4 . Allora $\Phi(V) = \mathcal{L}$(N,v) (valore Shapley di (N,v)).*

Definizione 4.1 *Un gioco NTU $G = (N, V)$ dicesi non livellato se $\forall\ \hat{x} \in Par(V(N))$ $\nexists\ \lambda \in I\!R^N_+$, con almeno un coefficiente nullo, tale che*

$$\sum_{i \in N} \lambda_i \hat{x}_i = \max\left\{\sum_{i \in N} \lambda_i x_i : (x_i) \in V(N)\right\}$$

Lemma 4.3 *Sia Φ una multifunzione soluzione tale che $\Gamma_{\mathcal{L}} \subset \Gamma_\Phi$. Se $G = (N, V)$ è non livellato e Φ soddisfa gli assiomi da G.1 a G.5, allora $\mathcal{L}(V) \subseteq \Phi(V)$*

Il lemma 4.3 stabilisce che, se ci restringiamo alla classe dei giochi NTU non livellati in $\Gamma_{\mathcal{L}}$, allora la corrispondenza di Shapley è "minore o uguale" di ogni multifunzione soluzione Φ che soddisfa $\Gamma_{\mathcal{L}} \subset \Gamma_\Phi$ e gli assiomi da G.1 a G.5.

Invece il seguente Lemma stabilisce che la corrispondenza di Shapley, ristretta ad un'altra classe di giochi NTU è "maggiore o uguale" di ogni multifunzione soluzione che soddisfa gli assiomi da G.1 a G.4.

Definizione 4.2 *Un gioco NTU $G = (N, V)$ dicesi liscio se $\forall\ \hat{x} \in$ Par(V(N)) esiste un unico $\lambda \in I\!R^N_{++}$ (a meno di un fattore moltiplicativo) tale che:*

$$\sum_{i \in N} \lambda_i \hat{x}_i = \max\left\{\sum_{i \in N} \lambda_i x_i : (x_i) \in V(N)\right\} \tag{8}$$

$$\textit{il gioco TU } (N, v_\lambda) \textit{ è ben definito} \tag{9}$$

e inoltre:

Lemma 4.4 *Sia Φ una multifunzione soluzione che soddisfa gli assiomi da G.1 a G.4 e con la proprietà che $\Phi(V) \neq \emptyset$ per ogni gioco NTU $G = (N, V)$ corrispondente ad un gioco TU. Allora $\Phi(V) \subseteq \mathcal{L}(V)$ se (N,V) è liscio.*

Per il lemma precedente non occorre l'unicità dei λ (a meno di un fattore moltiplicativo), ma, per dimostrare che la corrispondenza di Shapley soddisfa gli assiomi è necessaria questa proprietà.

Esempio 4.3 Siano $G = (N, U), G' = (N, W)$ giochi NTU definiti da(vedi Fig.10):

$$\begin{aligned} N &= \{1, 2\} \\ U(\{i\}) = W(\{i\}) &= (-\infty, 0] \subset I\!R^{\{i\}} \qquad i = 1, 2 \\ U(\{1, 2\}) &= \left\{x \in I\!R^{\{1,2\}} : x_1 + x_2 \leq 0\right\} \\ W(\{1, 2\}) &= \left\{x \in I\!R^{\{1,2\}} : x_1 + x_2 \leq 6, x_1 + 2x_2 \leq 8\right\}. \end{aligned}$$

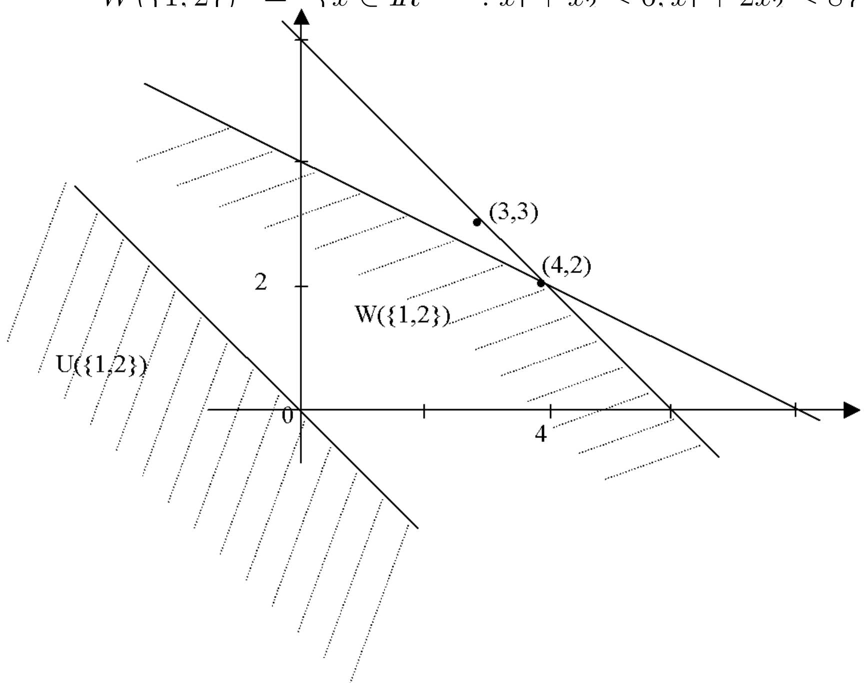


Figure 10:

Noi abbiamo $\mathcal{L}(U) = \{0\}$ con vettore comparazione di $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $\mathcal{L}(W) = \{(4, 2)\}$ con $\lambda = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Supponiamo ora che si possa applicare l'assioma G.2 a questi giochi. Allora $\mathcal{L}(U + W) \supseteq (\mathcal{L}(U) + \mathcal{L}(W)) \cap \mathrm{Par}((U + W)(N))$. $U + W$ corrisponde al gioco TU $G = (N, v)$ con $v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0$ e $v(\{1, 2\}) = 6$. Perciò, $\mathcal{L}(U + W) = \{(3, 3)\}, \mathcal{L}(U) + \mathcal{L}(W) = \{(4, 2)\} \subset \mathrm{Par}((U + W)(N))$, ma allora (3,3) = (4,2) e ciò è impossibile. Il problema è che il vettore di comparazione $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ per il λ-transfer value 0 di U soddisfa i requisiti (8) e (9) per il gioco NTU W e $\hat{x} = (4{,}2)$ e perciò l'assioma G.2 stabilisce che (0,0) + (4,2) è Pareto ottimale per il gioco $U + W$. Ora se $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ fosse un vettore di comparazione di (4,2) in W, il che non è, allora (0,0) + (4,2) sarebbe un λ-transfer value di $U + W$ con lo stesso vettore di comparazione. Possiamo evitare questo problema introducendo l'ipotesi di "liscezza".

Lemma 4.5 *Sia Γ^* la classe dei giochi NTU lisci con insieme dei giocatori N. La corrispondenza di Shapley, ristretta a Γ^*, soddisfa gli assiomi da G.1 a G.5.*

Dai lemmi precedenti segue facilmente il teorema principale:

Teorema 4.2 *La corrispondenza di Shapley è l'unica multifunzione soluzione su $\Gamma^* \cap \Gamma_{\mathcal{L}}$ che soddisfa gli assiomi da G.1 a G.5*

La corrispondenza di Shapley non è solo un'estensione della funzione soluzione di Shapley per i giochi TU, ma generalizza anche la soluzione di Nash per il problema di contrattazione a 2 giocatori.

Per il teorema 4.1, il gioco NTU dell'esempio 1.3 ha un λ-transfer value, diciamo $\hat{x}$, con vettore di comparazione $\lambda \in I\!R^2_+$

Il gioco TU (N,v_λ) è definito da:

$$v_\lambda(\{i\}) = d_i\lambda_i, v_\lambda(N) = \lambda_1\hat{x}_1 + \lambda_2\hat{x}_2$$

Il valore Shapley di questo gioco è

$$\left(\frac{1}{2}(\lambda_1 d_1 + \lambda_1\hat{x}_1 + \lambda_2\hat{x}_2 - \lambda_2 d_2\right), \left(\frac{1}{2}(\lambda_2 d_2 + \lambda_1\hat{x}_1 + \lambda_2\hat{x}_2 - \lambda_1 d_1)\right)$$

che equivale a $(\lambda_1\hat{x}_1, \lambda_2\hat{x}_2)$.

Così abbiamo l'uguaglianza $\lambda_1(\hat{x}_1 - d_1) = \lambda_2(\hat{x}_2 - d_2)$.

Poniamo:

$$\lambda = ((\hat{x}_2 - d_2), (\hat{x}_1 - d_1)) \tag{10}$$

e dimostriamo che $\hat{x}$ è la soluzione di Nash. Sia $x \in F$. Allora abbiamo:

$$\lambda_1\hat{x}_1 + \lambda_2\hat{x}_2 \geq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2. \tag{11}$$

Dimostriamo che $(\hat{x}_1 - d_1)(\hat{x}_2 - d_2) \geq (x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$.

Se $\hat{x}_1 \geq x_1$ e $\hat{x}_2 \geq x_2$ va bene (è facile provare che $\hat{x}_1 \geq d_1$ e $\hat{x}_2 \geq d_2$) e $\hat{x}_1 < x_1$ e $\hat{x}_2 < x_2$ non può essere.

Allora assumiamo che: $(\hat{x}_1 - x_1)(\hat{x}_2 - x_2) \leq 0$, che equivale a:

$(\hat{x}_1 - d_1)(\hat{x}_2 - d_2) - (\hat{x}_1 - d_1)(x_2 - d_2) - (\hat{x}_2 - d_2)(x_1 - d_1) + (x_1 - d_1)(x_2 - d_2) \leq 0$

cioè:

$$\begin{aligned}
(\hat{x}_1 - d_1)(\hat{x}_2 - d_2) + (x_1 - d_1)(x_2 - d_2) &\leq \lambda_1(x_1 - d_1) + \lambda_2(x_2 - d_2) \quad \textit{(per la (10))} \\
&\leq \lambda_1(\hat{x}_1 - d_1) + \lambda_2(\hat{x}_2 - d_2) \quad \textit{(per la (11))} \\
&= 2(\hat{x}_1 - d_1)(\hat{x}_2 - d_2) \qquad \textit{(per la (10))}
\end{aligned}$$

Ma allora $(x_1$ - $d_1)$ $(x_2$ - $d_2) \leq (\hat{x}_1$ - $d_1)$ $(\hat{x}_2$ - $d_2)$.
Cioè $\hat{x}$ è la soluzione di Nash di (F, d).

4.3 Il concetto di soluzione di Harsanyi

Harsanyi sviluppò un concetto di soluzione per i giochi TU che è basato sulla nozione di dividendo. Definiamo, per un gioco TU $G = (N, V)$ gli scalari $\xi^v_S, S \subseteq N$, con il seguente metodo ricorsivo:

$$\begin{aligned}
\xi^v_\emptyset &= 0\,,\ \ e \\
\xi^v_S &= \frac{1}{|S|}\left(v(S) - \sum_{T \subset S} |T|\,\xi^v_T\right).
\end{aligned}$$

ξ^v_S può essere visto come il dividendo che è pagato ai membri di S.
Sia Φ la funzione soluzione nella classe dei giochi TU definita da

$$\Phi(N, v)_i = \sum_{S: i \in S \subseteq N} \xi^v_S \qquad \forall i \in N$$

Questa funzione soluzione è uguale al valore Shapley.

La nozione di dividendo è anche usata da Harsanyi per costruire un concetto di soluzione per giochi NTU.

Una soluzione per un gioco NTU $G = (N, V)$ è considerata come una collezione di allocazioni $(x_S)_{S \subseteq N}$ dove $x_S \in V(S)$ per ogni $S \subseteq N$. Si può vedere x_S come un risultato per la coalizione S che sarà scelto se la coalizione si formerà. Così dopo aver scelto una tale soluzione $\underline{x} = (\underline{x}_S)_{S \subseteq N}$ ci sarà da contrattare su quali coalizioni formare. Allora il risultato $\underline{x}_S$ può essere visto come una minaccia della coalizione S contro la sua complementare $N \backslash S$.

Chiamiamo $\mathcal{R}^N$ il prodotto $\Pi_{S \subseteq N} I\!R^S$; un elemento $\underline{x} = (\underline{x}_S)_{S \subseteq N}$, dove $\underline{x}_S \in I\!R^S$ per ogni $S \subseteq N$, è chiamata una configurazione di utilità.

$\underline{x} \in \mathcal{R}^N$ si dice una *soluzione di Harsanyi* del gioco $G = (N, V)$, se esiste un vettore di comparazione $\lambda \in I\!R^N_+$ tale che:

1. $$\sum_{i \in N} \lambda_i (x_N)_i = \max\left\{\sum_{i \in N} \lambda_i y_i : y_i \in V(N)\right\} \qquad (12)$$

2. $\underline{x}_S \in \mathrm{Par}(V(S)) \qquad \forall S \subseteq N$ (13)

3. esistono dei numeri reali $\xi_T,\ T \subseteq N,$ tali che:

$$\lambda_i(\underline{x}_S)_i = \sum_{T:i\in T\subseteq S} \xi_T \qquad \forall\ S \subseteq N,\ \forall i \in S \tag{14}$$

Indichiamo con $H(N,V)$ l'insieme di tutte le soluzioni di Harsanyi di (N,V); la funzione H *a valori negli insiemi* sulla classe dei giochi NTU è detta *corrispondenza di Harsanyi*.

Per un dato vettore comparazione $\lambda \in I\!R^N_{++}$ si possono costruire i numeri $\xi_T, T \subseteq N$, col seguente metodo ricorsivo:

$$\begin{aligned} \xi_\emptyset &= 0, \text{ e} \\ \xi_S &= \max\left\{ t \in I\!R : \left(\sum_{T:i\in T\subset S} \xi_T + t \right)_{i\in S} \in \lambda V(S) \right\}. \end{aligned}$$

Indichiamo $\left(\frac{1}{\lambda_i}\sum_{T:i\in T\subset S}\xi_T\right)_{i\in S}$ con x_S per ogni $S \subseteq N$, allora $\underline{x} = (\underline{x}_S)_{S\subseteq N}$ è una soluzione di Harsanyi se e solo se è soddisfatta la (12).

Su una sottoclasse della classe dei giochi NTU è possibile caratterizzare la corrispondenza di Harsanyi con una lista di assiomi. Tale sottoclasse è molto simile a Γ^* del lemma 4.5:

Sia Γ^0 la classe dei giochi NTU $G = (N,V)$ con le seguenti proprietà:

1. $V(S)$ è un sottoinsieme di $I\!R^S$ non vuoto, chiuso, convesso e comprensivo per ogni $S \subseteq N$

2. l'insieme $V(N)$ è liscio.

Ora consideriamo i seguenti assiomi, dove Ψ è una multifunzione soluzione su Γ^0, $\Psi(N,V)$ è un insieme di configurazioni di utilità, (N,V) e (N,W) sono giochi NTU di Γ^0 e $\underline{0}$ è il vettore nullo.

H.1 *Efficienza*: $x_S \in \mathrm{Par}(V(S))$ per ogni $S \subseteq N$ e $(x_S) \in \Psi(V)$

H.2 *Zero-inessenzialità*: se $(0)_{i\in S} \in \mathrm{Par}V(S)$ per ogni $S \subseteq N$ allora $\underline{0} \in \Psi(V)$

H.3 *Unanimità*: Sia $U_{T,c}$ un gioco NTU che corrisponde al gioco TU cu_T, dove c $\in I\!R$ e u_T è un gioco TU di unanimità con $T \subseteq N$. Allora $\Psi(U_{T,c}) = \{\underline{z}\}$ con $z_S = \frac{c}{|T|}1_T \in I\!R^S$, se $S \supseteq T$ e $z_S = 0 \in I\!R^S$ altrimenti

H.4 *Additività condizionata*: Se $\underline{x} \in \Psi(V), \underline{y} \in \Psi(W)$ e $x_S + y_S \in \mathrm{Par}(V(S) + W(S))$ per ogni $S \subseteq N$ allora $\underline{x} + \underline{y} \in \Psi(V + W)$

H.5 *Covarianza di scala*: per ogni $\lambda \in I\!R^N_{++}$:

$$\Psi(\lambda V) = \lambda \Psi(V)$$

H.6 *Indipendenza dalle alternative irrilevanti*:

Se $V \subseteq W$ allora $\Psi(V) \supseteq \Psi(W) \cap V$.

Teorema 4.3 *(Hart) Esiste un'unica multifunzione soluzione su Γ^0 che soddisfa gli assiomi da H.1 a H.6: la corrispondenza di Harsanyi.*

È possibile confrontare la corrispondenza di Harsanyi con la corrispondenza di Shapley della sezione 4.2 ridefinendo quest'ultima come segue:

Una configurazione di utilità $\underline{x}$ è un λ-transfer value di (N, V) se esiste un $\lambda \in I\!R^N$ tale che:

1. $\sum_{i \in S} \lambda_i (x_S)_i = \max \left\{ \sum_{i \in S} \lambda_i y_i : (y_i) \in V(S) \right\} \qquad \forall\ S\ \subseteq\ N$
2. $(\lambda_i (x_N)_i)_{i \in N} = \mathcal{L}(N, v_\lambda)$ (vedi (2) per la definizione di v_λ).

Sia $\mathcal{L}(V)$ l'insieme di tutti i λ-transfer values per (N, V). Allora la corrispondenza di Shapley $\mathcal{L}$ soddisfa tutti gli assiomi eccetto H.3 e H.2.

Un esempio per mostrare che $\mathcal{L}$ non soddisfa H.2:

Esempio 4.4 Sia (v. fig.11)

$$\begin{aligned} N &= \{1, 2, 3\} \\ V(S) &= \{x \in I\!R^S : x_i \leq 0\ \forall\ i\ \in S\} \qquad \forall S \neq \{1, 2\} \\ V(\{1, 2\}) &= \{(x_1, x_2) \in I\!R^{\{1,2\}} : x_1 + 2x_2 \leq 0\ e\ x_1 \leq 2\} \end{aligned}$$

Questo gioco NTU è zero - inessenziale (cioè $(0)_{i \in S}$ è efficiente in $V(S)\ \forall S \subseteq N$) e $H(V) = \{\ \underline{0}\ \}$.

C'è un solo possibile vettore di comparazione $\lambda = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Il gioco TU v_λ è:

$v_\lambda(S) = 0$ per ogni $S \subseteq N$ eccetto $S = \{1, 2\}$: $v_\lambda(\{1, 2\}) = \frac{1}{3}\mathcal{L}(N, v_\lambda) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3})$.

Così $\mathcal{L} = \left\{ \{ \underline{x} : x_{\{1,2,3\}} = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}), x_{\{1,2\}} = (2, -1), \sum_{i \in S} (x_S)_i = 0\ \forall\ S \neq \{1, 3\}, N \right\}$ oppure $\underline{0} \in \mathcal{L}(V)$.

Consideriamo il seguente assioma invece di H.3:

L.3 : Sia $U_{T,c}$ definito come in H.3.

Allora $\Psi(U_{T,c}) = \left\{ \underline{x} : x_N = \frac{c}{|T|} 1_T\ \ e\ \ \sum_{i \in S} (x_S)_i = U_{T,c}(S)\ \ \forall\ S \subset N \right\}$

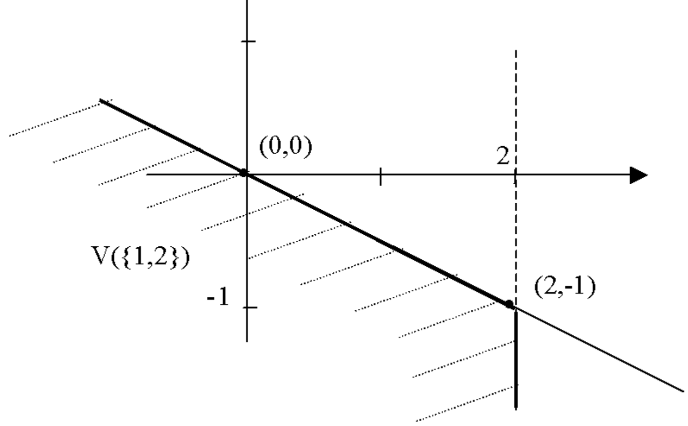


Figure 11:

Teorema 4.4 *(Hart) Esiste un'unica multifunzione soluzione su* Γ^0 *che soddisfa gli assiomi H.1, H.2, L.3, H.4, H.5 e H.6: la corrispondenza di Shapley.*

Finora $H(V)$ poteva eventualmente essere vuoto. Per evitare ciò si può considerare la classe Γ_H dei giochi NTU aventi almeno una soluzione di Harsanyi (analogamente a ciò che abbiamo fatto per la corrispondenza di Shapley).

Teorema 4.5 *Esiste un'unica multifunzione soluzione su* $\Gamma^0 \cap \Gamma_H$ *che soddisfa gli assiomi H.1, H.4, H.5 e H.6 e l'assioma H'.3 che è uguale a H.3 con la sola restrizione che* $c = 1$*: è la corrispondenza di Harsanyi.*

4.4 Un classico esempio di Roth

Esempio 4.5 Consideriamo il seguente esempio di Roth (v. fig.12): $G = (N, V_p)$ con $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
N &= \{1,2,3\} \\
V_p(\{i\}) &= (-\infty, 0] \subset I\!R^{\{i\}} \\
V_p(\{1,2\}) &= \left\{(x_1,x_2) \in I\!R^{\{1,2\}} : x_1 \leq \frac{1}{2}, x_2 \leq \frac{1}{2}\right\} \\
V_p(\{1,3\}) &= \{(x_1,x_3) \in I\!R^{\{1,3\}} : x_1 \leq p, x_3 \leq 1-p\} \\
V_p(\{2,3\}) &= \{(x_2,x_3) \in I\!R^{\{2,3\}} : x_2 \leq p, x_3 \leq 1-p\} \\
V_p(N) &= \text{conv}\left(\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),(p,0,1-p),(0,p,1-p)\right\}\right) - I\!R^N_+.
\end{aligned}$$

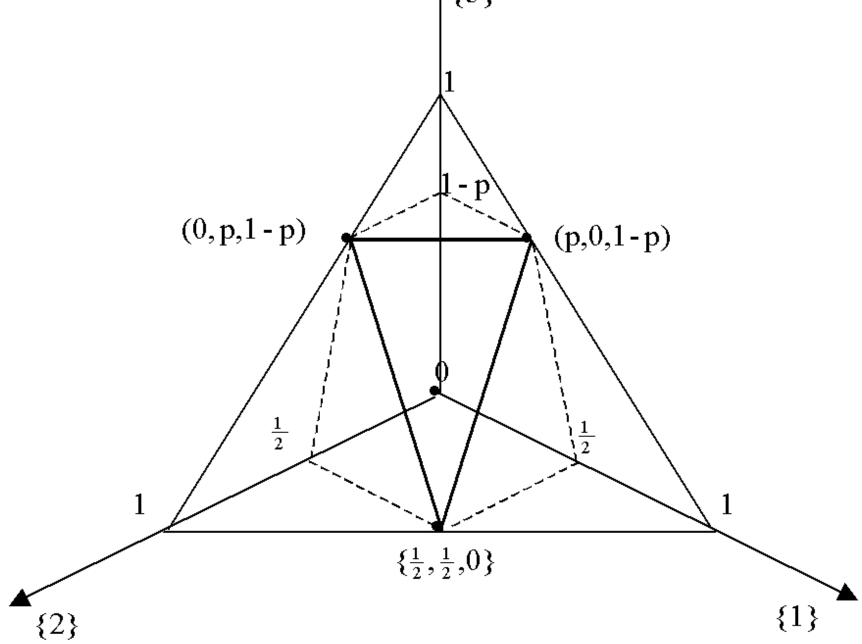


Figure 12:

Se $p < \frac{1}{2}$ allora $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ è il solo risultato di questo gioco che non è in conflitto con l'ipotesi che i giocatori siano razionali (massimizzino la loro utilità). È facile vedere che $\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)\}$ è il nucleo ed è anche l'unica soluzione di von Neumann - Morgenstern per questo gioco NTU (se $p = \frac{1}{2}$ abbiamo un gioco simmetrico).

I λ-transfer value e le soluzioni di Harsanyi di questo gioco assegnano quantità positive al giocatore 3. Ad esempio, sia $\lambda \in I\!R^N_+$ il vettore di comparazione $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. (N, v_λ) è il gioco TU $v_\lambda(\{i\}) = 0, i \in N, v_\lambda(\{1,2\}) = v_\lambda(\{N\}) = \frac{1}{3}$, $v_\lambda(\{1,3\}) = v_\lambda(\{2,3\}) = \frac{1}{3}$. Allora $\mathcal{L}(N, v_\lambda) = (\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}) = (\lambda_1 \frac{1}{3}, \lambda_2 \frac{1}{3}, \lambda_3 \frac{1}{3})$. Se ne deduce che $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ è un λ-transfer value con vettore di comparazione $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Con vettore di comparazione $\lambda = (1,1,1)$ noi calcoliamo i numeri $\xi_S, S \subseteq N$. Otteniamo $\xi_\emptyset = 0 = \xi_{\{i\}}$, $i \in N$; $\xi_{\{1,2\}} = \frac{1}{2}$, $\xi_{\{1,3\}} = \xi_{\{2,3\}} = p$, $\xi_N = -\frac{4}{3}p$. Quindi $x_{\{i\}} = 0 \in I\!R^{\{i\}}; x_{\{1,2\}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), x_{\{1,3\}} = (p,p), x_{\{2,3\}} = (p,p), x_N = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}p, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}p, \frac{2}{3}p)$. Questa configurazione di utilità è una soluzione di Harsanyi.

References

[1] Aumann, R.J. (1985) An axiomatization of the nontransferable utility value, Econometrica **53**, no. 3, 599–612.

[2] Aumann, R.J. e Peleg, B. (1960) Von Neumann-Morgenstern Solutions to Cooperative Games without Side Payments, Bull. Amer. Math. Soc. **66**, 173–179.

[3] Bergantiños-Cid, G. e Sanchez-Rodriguez, E. (1998) Juegos PERT: Soluciones Extendidas a la Frontera de Pareto, Working paper, University of Vigo, Spain.

[4] Derks, J. () Notes on Non-Side Payment Games

[5] Hart, S. (1985) An axiomatization of Harsanyi's nontransferable utility solution, Econometrica **53**, no. 6, 1295–1313.

[6] Kalai, E. e Smorodinsky, M. (1975) Other Solutions to Nash's Bargaining Problem, Econometrica **43**, 513–518.

[7] Lucchetti, R.; Patrone, F.; Tijs, S. e Torre, A. (1991), Λ-transfer and Harsanyi NTU values: individual rationality, stability and degenerate solutions, Cahiers Centre tudes Rech. Opr. **33**, no. 1-2, 103–121.

[8] Nash, J.F. (1950) The Bargaining Problem, Econometrica **18**, 152–162.

[9] Nash, J.F. (1953) Two Person Cooperative Games, Econometrica **21**, 128–140.

[10] Owen, G. (1972) Value of Games without Side Payments, International Journal of Game Theory **1**, 95–109.

[11] Perles, M. e Maschler, M. (1981) The Superadditive Solution for the Nash Bargaining Game, International Journal of Game Theory **10**, 163–193.

[12] Ritz, Z. (1985) An Equal Sacrifice Solution to Nash's Bargaining Problem. University of Illinois, mimeo.

[13] Roth, A.E. (1980) Values for games without sidepayments: some difficulties with current concepts. With a comment by John C. Harsanyi, Econometrica, **48**, no. 2, 457–465.

[14] Shapley, L.S. (1973) On Balanced Games without Side Payments, in Hu, T.C. and Robinson, S.M. editors, Mathematical Programming, New York, Academic Press, 261–290.

[15] Sharkey, W.W. (1981) Convex Games without side payments, International Journal of Game Theory **10**, 101–106.

[16] Shubik, M. (1959) Strategy and Market Structure: Competition, Oligopoly, and the Theory of Games, New York, Wiley.

[17] Thomson, W. (1994) Cooperative Model of Bargaining, in Handbook of Game Theory with Economic Applications, Vol. 2 (Aumann, R.J. e Hart, S. eds.), Amsterdam, North Holland, 1237–1284.

[18] Vilkov, V.B. (1982) Convex Games without Side Payments, Vestnik Leningrad University (Math.), **10**, 115–119.

# # # # # # # # # #