Ottimizzazione vettoriale

Appunti a cura di
Fioravante PATRONE
http://www.diptem.unige.it/patrone/default.htm

versione del: 6 giugno 2007

Indice

1 Preludio e motivazioni (matematiche) 2

2 Astratto fa bene 3

3 Ottimizzazione vettoriale 6

4 Ottimi paretiani deboli e forti 8

5 Intermezzo: ottimi paretiani e dominanza in teoria dei giochi 10

6 Scalarizzazione 12

7 Esistenza di ottimi paretiani 16

8 Esempi 17

9 Ottimizzazione vettoriale e teoria delle decisioni 19

10 Appendice: preordini e loro aggregazione 21

Fioravante PATRONE
Dipartimento di Ingegneria della Produzione,
Termoenergetica e Modelli Matematici
P.le Kennedy - Pad D
16129 Genova - ITALY
patrone@diptem.unige.it

http://www.diptem.unige.it/patrone homepage
http://tdg.dima.unige.it web teaching
http://www.citg.unige.it/citg.htm web server "CITG"
http://www.scallywag.it web page del gruppo Sca$\lambda\lambda$ywag

http://www.diptem.unige.it/patrone/DRI.htm Decisori (razionali) interagenti

1 Preludio e motivazioni (matematiche)

La comprensione dei concetti fondamentali dell'ottimizzazione vettoriale richiede che essi siano inquadrati in un contesto appropriato. Premessa indispensabile è la revisione e riflessione su cosa significhi ottimizzazione nel caso "standard", ovvero quando si è interessati al massimo o ai punti di massimo di una funzione a valori reali.

Ricordo che normalmente si dice che, dato un insieme e data $f : X \to \mathbb{R}$, un punto $\bar{x} \in X$ è *punto di massimo*[1] per f se $f(\bar{x}) \geq f(x)$ per ogni $x \in X$. Ovviamente, $f(\bar{x})$ viene detto *massimo* di f. Più in generale, dato $Y \subseteq X$, si dice che $\bar{x} \in Y$ è punto di massimo per f su Y se si ha $f(\bar{x}) \geq f(x)$ per ogni $x \in Y$.

Queste sono le definizioni che si incontrano normalmente. Se però vogliamo provare ad estendere la problematica della ricerca del massimo al caso "vettoriale", ovvero quando abbiamo $f : X \to \mathbb{R}^n$, ci dobbiamo chiedere quale sia la strada più opportuna da seguire per effettuare questa generalizzazione. Di fatto sono disponibili *due* punti di vista, fra i quali ne privilegerò uno, lasciando ad una appendice la trattazione dell'altra linea di pensiero (essa stessa di notevole interesse, sia chiaro!).

Allora *riformuleremo* il problema e la definizione di massimo, per potere effettuare l'estensione al caso vettoriale. L'idea vincente è partire da $f(X)$, l'*immagine* di f ed osservare che $f(X)$ è un sottoinsieme di un insieme ordinato, $\mathbb{R}$. Ciò ci permette di ribaltare l'approccio usato per la definizione di massimo che abbiamo visto: diremo dapprima chi è il massimo di f e da ciò dedurremo cosa sia un punto di massimo.

Definizione 1 *Sia $f : X \to \mathbb{R}$. Diremo che $\bar{t} \in f(X)$ è* massimo *per f se $\bar{t} \geq t$ per ogni $t \in f(X)$. Diremo che $\bar{x} \in X$ è un* punto di massimo *per f se $f(\bar{x}) = \bar{t}$, dove $\bar{t}$ è massimo per f.*

Come dovrebbe essere evidente, sfruttiamo il fatto che su $f(X)$ è a disposizione l'ordine $\geq$ che $f(X)$ "eredita" da $\mathbb{R}$ in quanto suo sottoinsieme.

Vediamo un interessante risultato, ben noto, sul quale avremo occasione di riflettere in seguito.

Proposizione 1 *Sia data $f : X \to \mathbb{R}$. Il massimo per f, se esiste, è unico.*

Dimostrazione

Siano $\bar{t}_1$ e $\bar{t}_2$ due massimi per f. Dimostriamo che coincidono.

[1]Osservo che si sta parlando di massimo *globale* (o *assoluto* che dir si voglia). Non spenderò parole sui massimi *locali* (o *relativi* che dir si voglia). Aggiungo che non parlerò neanche di *minimi*, visto che basta "rovesciare" le disuguaglianze usate per i massimi.

Prima di tutto, ricordiamo cosa vuol dire che sono massimi:

$$\bar{t}_1 \geq t \quad \forall t \in f(X)$$

$$\bar{t}_2 \geq t \quad \forall t \in f(X)$$

Se prendiamo $t = \bar{t}_2$ nella prima proposizione e $t = \bar{t}_1$ nella seconda, otteniamo:

$$\bar{t}_1 \geq \bar{t}_2 \text{ e } \bar{t}_2 \geq \bar{t}_1$$

da qui, possiamo utilizzare la proprietà *antisimmetrica* del $\geq$ su $\mathbb{R}$:

$$[\bar{t}_1 \geq \bar{t}_2 \text{ e } \bar{t}_2 \geq \bar{t}_1] \Rightarrow \bar{t}_1 = \bar{t}_2$$

Come volevasi dimostrare. □

Con ciò si chiude il preludio. Nel prossimo paragrafo introdurremo gli strumenti utili per la riformulazione richiesta, generalizzando questo approccio. Ma, prima, una osservazione.

Osservazione 1 *Si noti che il teorema di Weierstrass può essere "letto" come un teorema il quale garantisce che una funzione f, definita e continua su un intervallo $[a, b]$ di $\mathbb{R}$, è tale per cui la sua immagine $f([a, b])$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che ha massimo. Questo modo, a prima vista poco ortodosso, di "leggere" il teorema di Weierstrass, ne coglie invece il risultato essenziale, ovvero quello suscettibile delle più ampie generalizzazioni (è riconducibile al concetto di compattezza, che è un concetto fondamentale in topologia).*

2 Astratto fa bene

Sia A un insieme, su cui è definito un *preordine*[2] $\succeq$.

Dato B, con $B \subseteq A$, si osservi che B "eredita[3]" la relazione $\succeq$ definita su A.

Allora abbiamo la seguente:

[2]Ricordo che un preordine è una relazione riflessiva e transitiva. Un preordine $\succeq$ è *totale* se la relazione $\succeq$ è totale. Un preordine che sia anche *antisimmetrico* viene detto *ordine*; se è anche totale, lo chiameremo *ordine totale*.

[3] "Eredita" è un termine tecnico che si utilizza laddove una struttura matematica, definita su un insieme A, viene "passata" in modo "canonico" ad un sottoinsieme B. Nel nostro caso, il passaggio è del tutto ovvio. Riporto per completezza (o per pedanteria?) ciò che si intende. Dato un insieme A su cui sia definito un preordine, che indicheremo col simbolo $\succeq_A$, e dato $B \subseteq A$, definiamo una relazione $\succeq_B$ su B nel modo seguente: dati $b_1, b_2 \in B$, diremo che $b_1 \succeq_B b_2$ se $b_1 \succeq_A b_2$. E' immediato verificare che $\succeq_B$ è un preordine, così come che è totale se $\succeq_A$ lo è, e idem dicasi per l'antisimmetria. Data la situazione, non essendovi alcun rischio di confusione od errore, userò lo stesso simbolo, $\succeq$, per indicare il preordine sia su A che su B.

Definizione 2 *Dato un insieme A ed un preordine $\succeq$ su A e dato B, con $B \subseteq A$, diremo che $\bar{b} \in B$ è massimo per B se $\bar{b} \succeq b$ per ogni $b \in B$.*

Osservazione 2 *Non vi è alcuna garanzia, al solito, che il massimo esista. Ciò che è più interessante è che non c'è neanche alcuna garanzia che il massimo sia unico, per un preordine. Non possiamo adattare la dimostrazione fatta per l'unicità del massimo di f in quanto, per un preordine, non abbiamo a disposizione l'antisimmetria.*

Esercizio 1 Mostrare un esempio di insieme finito A ed un preordine $\succeq$ su A che abbia massimo su A ed uno che invece non ce l'abbia. Analogamente, mostrare un esempio in cui il massimo è unico ed uno in cui non lo è.

Proposizione 2 *Dato un insieme A ed un ordine (cioè un preordine che è anche antisimmetrico) $\succeq$ su A e dato B, con $B \subseteq A$, il massimo per $\succeq$ su B, se esiste, è unico.*

Dimostrazione

Basta adattare (quasi ricopiare) la dimostrazione vista per l'unicità del massimo per una funzione. Siano $\bar{b}_1$ e $\bar{b}_2$ due massimi per $\succeq$ su B. Dimostriamo che coincidono.

Prima di tutto, ricordiamo cosa vuol dire che sono massimi:

$$\bar{b}_1 \succeq b \quad \forall b \in B$$

$$\bar{b}_2 \succeq b \quad \forall b \in B$$

Se prendiamo $b = \bar{b}_2$ nella prima proposizione e $b = \bar{b}_1$ nella seconda, otteniamo:

$$\bar{b}_1 \succeq \bar{b}_2 \text{ e } \bar{b}_2 \succeq \bar{b}_1$$

da qui, possiamo utilizzare la proprietà *antisimmetrica* di $\succeq$ su B:

$$[\bar{b}_1 \succeq \bar{b}_2 \text{ e } \bar{b}_2 \succeq \bar{b}_1] \Rightarrow \bar{b}_1 = \bar{b}_2$$

Come volevasi dimostrare. □

Si noti che, se non richiediamo che il preordine sia totale, è sufficiente che vi sia anche un solo $b \in B$ che non sia confrontabile con $\bar{b}$ affinché $\bar{b}$ non sia massimo. Sarà quindi utile introdurre la definizione di un nuovo concetto, che tenga conto di questa osservazione.

Esercizio 2 Dimostrare che su un insieme finito un preordine totale ha sempre massimo.

Definizione 3 *Dato A e dato $\succeq$, preordine su A, e dato B con $B \subseteq A$, $\bar{b} \in B$ è* massimale *per $\succeq$ su B se $\bar{b} \succeq b \quad \forall b \in B$ che sia* confrontabile *con $\bar{b}$.*

Osservazione 3 *Anche qui, va da sé, non vi è alcuna garanzia che esista un elemento massimale. Visto che la definizione è stata data per un preordine, non abbiamo neanche la garanzia che, se esiste un elemento massimale, esso sia unico. Contrariamente a quello che succedeva per i massimi, questa volta neanche l'aggiunta della condizione di antisimmetria è sufficiente per garantire l'unicità di un elemento massimale. Ovviamente si possono fare esempi in cui l'unicità manca, ma può essere utile vedere dove "salta" la dimostrazione dell'unicità. Il passo che non riusciamo a compiere è quello in cui prendevamo come b una volta b_2 e l'altra volta b_1. Questo era lecito, in quanto avevamo:*

$$\bar{b}_1 \succeq b \quad \forall b \in B$$

$$\bar{b}_2 \succeq b \quad \forall b \in B$$

Ora invece sappiamo solo che:

$$\bar{b}_1 \succeq b \quad \forall b \in B \text{ confrontabile con } b_1$$

$$\bar{b}_2 \succeq b \quad \forall b \in B \text{ confrontabile con } b_2$$

E non abbiamo nessuna garanzia che b_2 sia confrontabile con b_1 (o viceversa).

Esercizio 3 Provare che su un insieme finito un preordine ha sempre elemento massimale.

Suggerimento
Prendiamo un elemento qualsiasi dell'insieme. Se non è confrontabile con nessun altro, è massimale. SE è confrontabile, facciamo un confronto e ci teniamo il migliore. E così via, fino ad avere esaurito tutti gli elementi dell'insieme. La transitività ci garantisce che non ci mettiamo a girare in tondo ...

Ora che abbiamo visto il quadro "astratto", passiamo ad affrontare il problema che ci sta a cuore (sto esagerando!).

3 Ottimizzazione vettoriale

Abbiamo data una $F : X \to \mathbb{R}^n$ e ci interessa trovare i suoi "ottimi paretiani". Cosa vuol dire? Lo vedremo subito. Ma prima una nota: mi occuperò del caso di una funzione a valori in $\mathbb{R}^2$, anziché del caso generale, per avere il vantaggio di alleggerire le notazioni, senza che si vada a perdere alcunché di essenziale.

Dalla discussione vista prima, dovrebbe essere evidente che affronteremo il problema a partire dalla immagine di F. Pertanto, innanzi tutto definiamo un ordine su $\mathbb{R}^2$.

Definizione 4 *Definiamo la relazione $\geq$ su $\mathbb{R}^2$ nel modo seguente. Dati $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^2$, con $t_1 = (x_1, y_1)$ e $t_2 = (x_2, y_2)$, diciamo che:*

$$t_1 \geq t_2 \quad \textit{se} \quad x_1 \geq x_2 \text{ e } y_1 \geq y_2$$

Ci saranno utili anche le relazioni $>$ e $\gg$, così definite:

$$t_1 > t_2 \quad \textit{se} \quad t_1 \geq t_2 \text{ e } t_1 \neq t_2$$

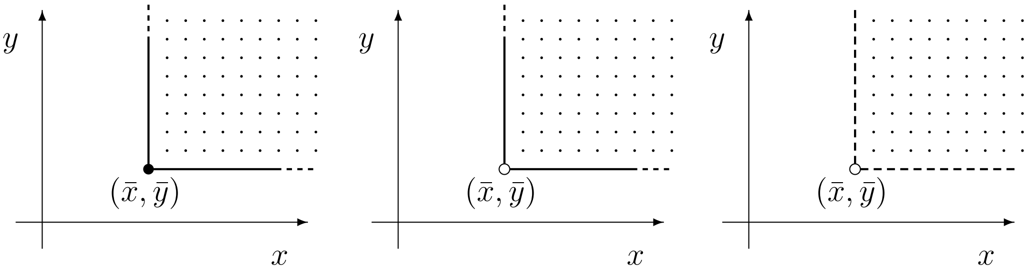
$$t_1 \gg t_2 \quad \textit{se} \quad x_1 > x_2 \text{ e } y_1 > y_2$$

Vanno fatte varie considerazioni e precisazioni, sulla definizione appena data. Intanto, per la relazione $\geq$ su $\mathbb{R}^2$ è stato utilizzato lo stesso simbolo usato per il $\geq$ su $\mathbb{R}$. Non c'è rischio di confusione, visto che queste due relazioni sono definite su insiemi del tutto diversi. Altra considerazione riguarda i simboli che ho usato per le tre relazioni che ho appena definito: non c'è una notazione unificata, in questo contesto. Quindi, fare attenzione, nel leggere un testo che parla di queste relazioni (e, per estenso, di ottimizzazione vettoriale), a come sono definiti i simboli che vengono usati.

Si può agevolmente dimostrare la seguente:

Proposizione 3 *La relazione $\geq$ su $\mathbb{R}^2$ è riflessiva, antisimmetrica e transitiva (pertanto è un ordine); non è totale. Le relazioni $>$ e $\gg$ su $\mathbb{R}^2$ sono irriflessive, antisimmetriche e transitive (una relazione che goda di queste proprietà viene detta "ordine stretto"); non sono totali.*

Graficamente è facile rappresentare queste relazioni. Le figure seguenti dovrebbero essere sufficientemente esplicative.

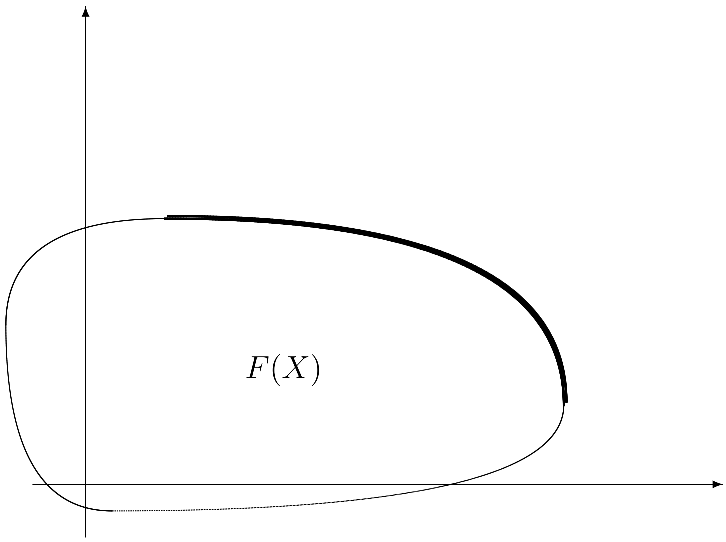


La zona punteggiata sta ad indicare i punti (x, y) di $\mathbb{R}^2$ per i quali si ha, rispettivamente: $(x, y) \geq (\bar{x}, \bar{y})$ nella figura di sinistra (ciò vale anche per i semiassi uscenti da $(\bar{x}, \bar{y})$ e per $(\bar{x}, \bar{y})$ stesso); $(x, y) > (\bar{x}, \bar{y})$ nella figura di centro (ciò vale anche per i semiassi uscenti da $(\bar{x}, \bar{y})$, escluso però $(\bar{x}, \bar{y})$ stesso); $(x, y) \gg (\bar{x}, \bar{y})$ nella figura di destra (ciò non vale anche per i semiassi uscenti da $(\bar{x}, \bar{y})$, che sono stati tratteggiati per sottolineare questo fatto, e per $(\bar{x}, \bar{y})$).

Visto che su $\mathbb{R}^2$ la relazione $\geq$ è un ordine che non è totale, sarà difficile pretendere che $F(X)$ abbia massimo. E' più opportuno utilizzare l'idea di elemento massimale.

Se sono date $f, g : X \to \mathbb{R}$, ovvero $F : X \to \mathbb{R}^2$ ($F = (f, g)$), cercherò un elemento massimale per $F(X)$ e dirò che è un *ottimo paretiano* per F. Invece, dirò che un punto $\bar{x} \in X$ è un *punto di ottimo paretiano* se $F(\bar{x})$ è un ottimo paretiano per $F(X)$.

Per quanto abbiamo visto, non c'è ragione di attendersi che $F(X)$ abbia (se ce l'ha) un unico elemento massimale. E' sufficiente vedere la figura seguente per rendersi conto di quello che può accadere: in figura, la parte di bordo di $F(X)$ che è calcata individua i punti massimali per $\geq$ su $F(X)$.



Un elemento $\bar{t}$ che sia massimale per $F(X)$ viene detto "ottimo paretiano" (o "ottimo vettoriale"), mentre $\bar{x}$ tale che $F(\bar{x}) = \bar{t}$ è detto "punto di ottimo paretiano". La terminologia in uso nel contesto della ottimizzazione vettoriale è molto variegata (l'uso di un sinonimo anziché un altro dipende spesso da diverse tradizioni terminologiche in uso in discipline o spezzoni di discipline diversi) e quindi si possono trovare altri termini: $\bar{t}$ viene detto valore efficiente, od ottimo vettoriale, o ottimo multicriterio; questa terminologia si riflette in modo ovvio su $\bar{x}$.

Sulla base di come è stata condotta finora la discussione dovrebbe essere evidente come l'idea di ottimo paretiano possa essere vista come una conseguenza della definizione di ottimo paretiano per un sottoinsieme B di $\mathbb{R}^2$. Diremo evidentemente che $\bar{t} \in B$ è ottimo paretiano per B se $\bar{t}$ è un elemento massimale per $\geq$ su B. Per la definizione di ottimo paretiano per una funzione non abbiamo fatto altro, quindi, che applicare questa definizione al caso in cui $B = F(X)$.

4 Ottimi paretiani deboli e forti

Se uno osserva la figura precedente può notare come i punti di ottimo paretiano siano caratterizzati dal fatto che in $F(X)$ non c'è alcun punto che sia "migliore" in senso stretto. Più precisamente, se $\bar{t}$ è un ottimo paretiano non c'è alcun elemento $t \in F(X)$ per cui $t \geq \bar{t}$, eccezion fatta per $\bar{t}$. Possiamo esprimere in modo equivalente questo fatto dicendo che non c'è in $F(X)$ alcun elemento t tale che $t > \bar{t}$.

Questa considerazione, questa idea, non è certo specifica né di $F(X)$ né di $\geq$ su $\mathbb{R}^2$. Vediamo allora di fare un discorso generale.

Sia A un insieme sul quale sia definito un *ordine* $\succeq$. Cominciamo con l'osservare che, dato un ordine $\succeq$ si può definire una nuova relazione $\succ$ definita come:

$$a_1 \succ a_2 \quad \text{se e solo se} \quad [a_1 \succeq a_2 \text{ e } a_1 \neq a_2]$$

E' agevole dimostrare che la relazione $\succ$ è un "ordine stretto", cioè è una relazione irriflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Esercizio 4 Provare che $\succ$ è effettivamente un ordine stretto.

Suggerimento
Che $\succ$ sia irriflessiva e antisimmetrica è immediato (per l'antisimmetria, si prova che questa proprietà vale in modo rapido, per assurdo. Siano $x, y \in A$. Da $x \succ y$ e $y \succ x$ discende che $x \succeq y$ e $y \succeq x$, per cui per l'antisimmetria di $\succeq$ si ottiene $x = y$, contro l'assunzione che sia $x \succ y$). Solo un cenno a come si può dimostrare che $\succ$ è transitiva. Occorre provare che $x \succ y$ e $y \succ z$ implicano che $x \succ z$. Che si ottenga $x \succeq z$ è ovvio. Supponiamo allora per assurdo che sia $x = z$. Ma allora le condizioni precedenti ($x \succ y$ e $y \succ z$) ci dicono che è $x \succ y$ e $y \succ x$ e questo viola la antisimmetria.

Esercizio 5 A partire da un ordine stretto $\succ$ si può definire un ordine (che potremmo anche definire "largo" per evitare ogni rischio di confusione) $\succeq$: basta chiaramente definire $x \succeq y$ se e solo se $x \succ y$ "vel" $x = y$. Provare che, se da un ordine $\succeq$ si definisce un ordine stretto come visto e poi da questo un ordine ("largo") nel modo appena descritto ci si ritrova al punto di partenza. Provare che anche se si parte da un ordine stretto, alla fine ci si ritrova al punto di partenza.

Premesso questo, sia A un insieme sul quale sia definito un ordine $\succeq$ e sia $B \subseteq A$. Dire che un punto $\bar{b} \in B$ è massimale è equivalente a dire che non c'è alcun $b \in B$ tale che $b \succ \bar{b}$.

Esercizio 6 Provare che le due definizioni di elemento massimale sono effettivamente equivalenti.

Osservazione 4 *Attenzione: se $\succeq$ è solo un preordine, nulla ci vieta naturalmente di definire la relazione $\succ$ nello stesso modo usato nel caso degli ordini. Nulla ci garantisce però che la definizione di elemento massimale che avevamo dato sia ancora equivalente a questa nuova introdotta mediante $\succ$.*

Esercizio 7 Mostrare un esempio con un preordine per il quale l'equivalenza non è vera.

Se siamo in $B \subseteq \mathbb{R}^2$ (ma il discorso, oltre che ad $\mathbb{R}^n$ può essere esteso oltre) e il nostro ordine è $\geq$, abbiamo quindi scoperto che un $\bar{t}$ è massimale se e solo se non esiste $t \in B$ tale che $t > \bar{t}$. Abbiamo così nuovo modo di definire un ottimo paretiano.

Non solo! Possiamo anche seguire questa strada per introdurre idea di *ottimo paretiano debole*: diremo che $\bar{t} \in B$ è un ottimo paretiano debole se non esiste $t \in B$ t.c. $t \gg \bar{t}$.

Naturalmente, tutte queste considerazioni si applicano anche al caso che ci interessa, in cui $B = F(X)$.

5 Intermezzo: ottimi paretiani e dominanza in teoria dei giochi

Esempio 1 Sia dato un gioco a due giocatori, in forma strategica. Ovvero: (X, Y, f, g), dove X, Y sono insiemi non vuoti e $f, g : X \times Y \to \mathbb{R}$.

Date due strategie per il primo giocatore x_1, x_2, diremo che:

- x_1 domina fortemente x_2 se:
$f(x_1, y) > f(x_2, y)$ per ogni $y \in Y$

- x_1 domina strettamente x_2 se:
$f(x_1, y) \geq f(x_2, y)$ per ogni $y \in Y$
$f(x_1, y) > f(x_2, y)$ per almeno un $y \in Y$

- x_1 domina debolmente x_2 se:
$f(x_1, y) \geq f(x_2, y)$ per ogni $y \in Y$

Nel caso in cui Y sia un insieme finito, ovvero: $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, dire che x_1 domina fortemente x_2 equivale a dire che $t_1 \gg t_2$, dove $t_1 \in \mathbb{R}^n$ è $(f(x_1, y_1), \ldots, f(x_1, y_n))$ e analogamente $t_2 = (f(x_2, y_1), \ldots, f(x_2, y_n))$. La dominanza stretta di x_1 su x_2 equivarrà a $t_1 > t_2$ e la dominanza debole a $t_1 \geq t_2$.

Per esempio, nel dilemma del prigioniero:

I \ II	L	R
T	$(3,3)$	$(1,4)$
B	$(4,1)$	$(2,2)$

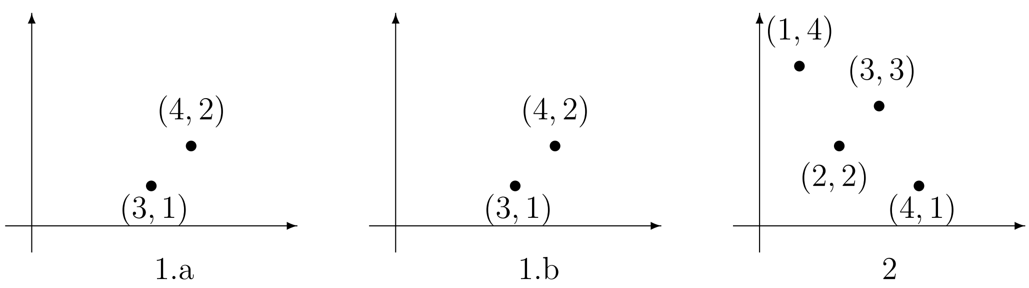
abbiamo che B domina fortemente T, ovvero: $(f(B,L), f(B,R)) = (4,2) \gg (3,1) = (f(T,L), f(T,R))$.

Esempio 2 Sia (X, Y, f, g) un gioco in forma strategica. Esso individua $F : X \times Y \to \mathbb{R}^2$, dove $F(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$. Una coppia di strategia $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ è un punto di ottimo paretiano per F se $F(\bar{x}, \bar{y})$ è un ottimo paretiano per $F(X \times Y)$. Ad esempio, nel dilemma del prigioniero $F(X \times Y) = \{(1,4), (2,2), (3,3), (4,1)\}$ e tutti i suoi elementi, tranne $(2,2)$, sono ottimi paretiano. Invece, $(2,2)$ non è ottimo paretiano debole (e quindi neanche stretto), in quanto $(2,2) \ll (3,3)$. Pertanto, (B,R) non è punto di ottimo paretiano.

Osservazione 5 *Nel primo esempio abbiamo visto che B domina fortemente T per I. Analogamente si verifica che R domina fortemente L. Ciò nonostante, la coppia (B,R) non è punto di ottimo paretiano. Questo fatto potrebbe sembrare strano, ma occorre notare che utilizziamo la stessa relazione $\gg$ su $\mathbb{R}^2$ per confrontare però funzioni (e insiemi immagine) diverse.*
1a. $X = \{T, B\}$.
$F(B) = (f(B,L), f(B,R)) = (4,2) \gg (3,1) = (f(T,L), f(T,R)) = F(T)$

1b. $Y = \{L, R\}$.
$F(R) = (g(T,R), g(B,R)) = (4,2) \gg (3,1) = (g(T,L), g(B,L)) = F(L)$

2. $X \times Y = \{(T,L), (T,R), (B,L), (B,R)\}$.
$F(T,L) = (f(T,L), g(T,L)) = (3,3)$
$F(T,R) = (f(T,R), g(T,R)) = (1,4)$
$F(B,L) = (f(B,L), g(B,L)) = (4,1)$
$F(B,R) = (f(B,R), g(B,R)) = (2,2)$



6 Scalarizzazione

Per trovare ottimi paretiani o punti di ottimo paretiano, si può provare a ricondursi al caso di funzioni a valori reali. L'idea è quella di *scalarizzare* il problema (data $F = (f, g)$, possiamo interpretare quello che stiamo facendo come considerare una media pesata di f e g).

Questo metodo lo possiamo utilizzare sia per trovare un ottimo paretiano per un sottoinsieme B di $\mathbb{R}^2$, che per cercare punti di ottimo paretiano ed ottimi paretiani per $F : X \to \mathbb{R}^2$.

Vediamo il caso in cui siamo interessati a trovare un ottimo paretiano per $B \subseteq \mathbb{R}^2$.

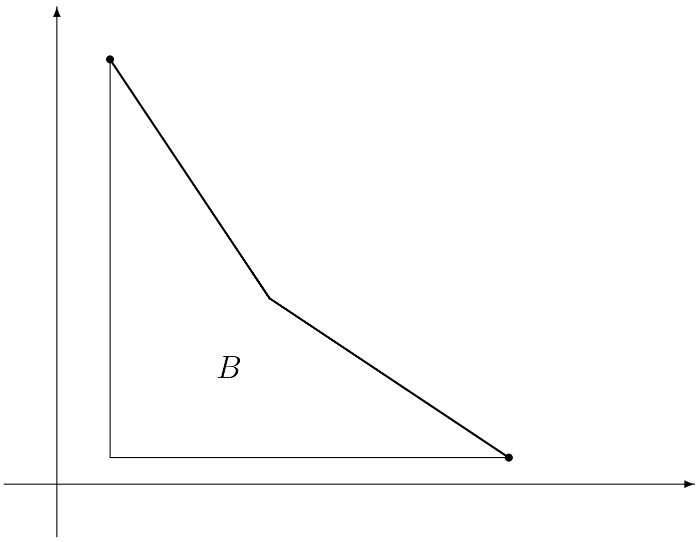
Prendiamo (λ, μ), con $\lambda, \mu \geq 0$ e con $\lambda + \mu = 1$.

Cerchiamo un punto di massimo per $(u, v) \mapsto \lambda u + \mu v$ su B (si noti che la funzione che stiamo cercando di massimizzare è una funzione lineare).

Il punto di max del problema scalarizzato è un ottimo paretiano (stretto se i coefficienti sono entrambi positivi; debole se qualche coefficiente si può annullare (non tutti)). La dimostrazione è immediata.

Dato un problema di ottimizzazione vettoriale, si cerca il max di $\lambda f(x) + \mu g(x)$. Che ci dà un ottimo paretiano per F. Ovvero un punto di max per $\lambda f(x) + \mu g(x)$, che ci dà un punto di ottimo paretiano per F.

Non tutti gli ottimi paretiani si possono trovare per scalarizzazione. Nella figura seguente, tutti i punti del bordo che è calcato sono ottimi paretiani per B, ma solo i due punti evidenziati possono essere ottenuti mediante scalarizzazione.



Se però abbiamo che $B \subseteq \mathbb{R}^2$ è un insieme *convesso*, possiamo dimostrare che tutti i suoi punti di ottimo paretiano debole si possono ottenere per scalarizzazione.

Serve il:

Teorema 1 (Teorema di separazione di Minkowski) *Dati V, W sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ convessi, non vuoti e disgiunti, allora esiste un iperpiano che li separa. Cioè esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, non tutti nulli, tali che:*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \qquad \forall v \in V \quad \forall w \in W$$

Sia allora $B \subseteq \mathbb{R}^2$ (ci mettiamo in dimensione 2, ma il discorso è identico in dimensione n). Possiamo notare incidentalmente che in dimensione due il teorema di separazione ci dice che possiamo trovare una retta in modo che i due insiemi dati giacciano ognuno in uno dei due semipiani individuati dalla retta[4].

[4]Nulla vieta che sulla retta ci possano anche essere punti dei due insiemi; addirittura può verificarsi il caso estremo che V e W siano entrambi sottoinsiemi della retta “separante”: se ad esempio $V = \{(1,0)\}$ e W l'intervallo $[2,3]$ sull'asse delle ascisse, proprio l'asse delle ascisse (cioè la retta di equazione $y = 0$) è una retta che separa V e W. Non è l'unica, naturalmente, in questo caso.

Dalla definizione di ottimo paretiano debole, si ottiene subito che $\bar{t} \in B$ è un ottimo paretiano debole se e solo se $B \cap (\bar{t} + \mathbb{R}^2_{>>}) = \emptyset$.

Supponiamo che B sia *convesso*. Possiamo allora usare il teorema di Minkowski (visto che l'altro insieme $\bar{t} + \mathbb{R}^2_{>>}$ è certamente convesso). Sia $\bar{t} = (\bar{u}, \bar{v})$ ottimo paretiano per B.

Allora, esiste un iperpiano che separa B e $\bar{t} + \mathbb{R}^2_{>>}$. Cioè esistono λ, μ, non entrambi nulli, tali che:

$$\lambda u_1 + \mu v_1 \geq \lambda u_2 + \mu v_2 \qquad \forall (u_1, v_1) \in \bar{t} + \mathbb{R}^2_{>>} \quad \forall (u_2, v_2) \in B$$

Cioè (prendendo: $(u_1, v_1) = (\bar{u}, \bar{v}) + (a, b)$ e chiamando $(u, v) = (u_2, v_2)$):

$$\lambda \bar{u} + \mu \bar{v} + \lambda a + \mu b \geq \lambda u + \mu v \qquad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2_{>>} \quad \forall (u, v) \in B$$

Osserviamo subito che $\lambda, \mu \geq 0$. Ciò si prova facilmente per assurdo. Se così non fosse, se fosse ad esempio $\lambda < 0$, basterebbe prendere a sufficientemente grande per violare la disequazione (tenendo "fisso" un elemento $(u, v) \in B$ scelto a piacere).

A questo punto, basta normalizzare (cioè dividere per $\lambda + \mu$) per soddisfare la condizione che la somma dei coefficienti faccia 1.

Non resta altro che un passaggio la limite per ottenere la tesi. Teniamo fisso $(u, v) \in B$ e facciamo tendere a e b a zero nell'ultima disequazione. Otteniamo:

$$\lambda \bar{u} + \mu \bar{v} + \geq \lambda u + \mu v \qquad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2_{>>} \quad \forall (u, v) \in B$$

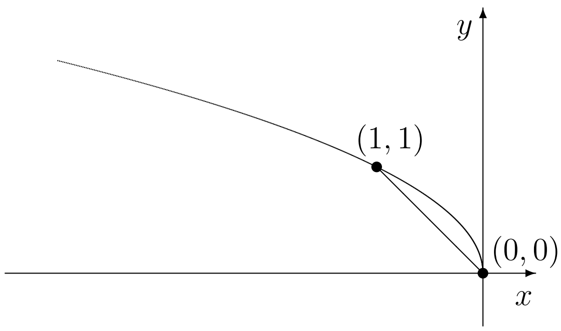
Ovvero, $(\bar{u}, \bar{v})$ rende massima la funzione $(u, v) \mapsto \lambda u + \mu v$ su B.

Per passare al caso in cui cerchiamo ottimi paretiani (o punti di ottimo paretiano) deboli per F, possiamo utilizzare i fatti seguenti:
- supponiamo $X \subseteq \mathbb{R}^k$, X convesso e non vuoto
- supponiamo che f e g siano concave

Esempio 3 Sia $X =]-\infty, 0]$, $f(t) = t$, $g(t) = \sqrt{-t}$.

$(x, y) \in F(X) \Leftrightarrow \exists\, t \in X$ con $x = f(t)$ e $y = g(t) \Leftrightarrow \exists\, t \in X$ con $x = t$ e $y = \sqrt{-t} \Leftrightarrow y = \sqrt{-x} \Leftrightarrow (x, y) \in \mathrm{ghp}(\phi)$, dove $\phi :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ è definita come $\phi(x) = \sqrt{-x}$.

Ovviamente $F(X)$ non è convesso. Basta prendere $(0, 0)$ e $(-1, 1)$: questi punti appartengono a $F(X)$, ovvero al grafico della funzione ϕ, ma il segmento che li congiunge non è contenuto in $F(X)$.



Lo scopo non è quello di ottenere che $F(X)$ è convesso, visto che come visto difficilmente lo si ottiene (anche nelle ragionevoli ipotesi fatte, come mostra l'esempio sopra). Nell'esempio visto, si può osservare che, se $F(X)$ non è convesso, lo è però $F(X) - \mathbb{R}^2_{\geq}$. Questo è un fatto generale. Nelle ipotesi fatte possiamo dimostrare che $F(X) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ è convesso.

Dimostriamo quindi che $F(X) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ è convesso.

Abbiamo $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in F(X) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ se esistono $x_1, x_2 \in X$ t.c. $(u_1, v_1) \leq (f(x_1), g(x_1)), (u_2, v_2) \leq (f(x_2), g(x_2))$.

Sia allora $\lambda \in [0,1]$ e proviamo che $\lambda(u_1, v_1) + (1-\lambda)(u_2, v_2) \in F(X) - \mathbb{R}^2_{\geq}$. Cioè: $(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2, \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) \in F(X) - \mathbb{R}^2_{\geq}$.

Ora:

$\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2 \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \leq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$

(la prima disuguaglianza discende dal fatto che $u_1 \leq f(x_1)$ e $u_2 \leq f(x_2)$; la seconda è conseguenza della concavità di f).

Analoghe disuguaglianze valgono per la seconda coordinata. Abbiamo allora:

$(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2, \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \leq (f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2), g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)) = F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$.

Questa disuguaglianza ci dice che $(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2, \lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \in F(X) - \mathbb{R}^2_{\geq}$.

Si dimostra inoltre facilmente che, in generale (cioè, per ogni sottoinsieme B di $\mathbb{R}^2$), $B \cap (\bar{t} + \mathbb{R}^2_{>>}) = \emptyset$ se e solo se $(B - \mathbb{R}^2_{\geq}) \cap (\bar{t} + \mathbb{R}^2_{>>}) = \emptyset$.

Si riesce così ad ottenere il teorema di scalarizzazione per F. Naturalmente, avremo a che fare con $(f(x), g(x))$ anziché con (u, v) e con $\bar{t} = (f(\bar{x}), g(\bar{x}))$ anziché con $\bar{t} = (\bar{u}, \bar{v})$, dove $\bar{x}$ è un punto di ottimo paretiano debole per F.

Infatti è:
$\bar{x}$ è un punto di ottimo paretiano debole per F su X
se e solo se
$\bar{t} = (\bar{u}, \bar{v}) = F(\bar{x})$ è ottimo paretiano debole per $F(X)$
se e solo se
$\bar{t} = (\bar{u}, \bar{v}) = F(\bar{x})$ è ottimo paretiano debole per $F(X) - \mathbb{R}^2_{\geq}$
pertanto:
esistono $\lambda, \mu \geq 0$, non entrambi nulli, tali che $\lambda\bar{u} + \mu\bar{v} \geq \lambda u + \mu v \qquad \forall (u, v) \in F(X) - \mathbb{R}^2_{\geq}$

Per questi λ, μ si ha quindi:
$\lambda f(\bar{x}) + \mu g(\bar{x}) \geq \lambda u + \mu v \qquad \forall (u, v) \in F(X) - \mathbb{R}^2_{\geq}$
e quindi, in particolare:
$\lambda f(\bar{x}) + \mu g(\bar{x}) \geq \lambda u + \mu v \qquad \forall (u, v) \in F(X)$
ovvero:
$\lambda f(\bar{x}) + \mu g(\bar{x}) \geq \lambda f(x) + \mu g(x) \qquad \forall x \in X$
Pertanto, possiamo affermare che $\bar{x}$ è punto di massimo per $x \mapsto \lambda f(x) + \mu g(x)$

7 Esistenza di ottimi paretiani

Questo paragrafo risulterà un po' smilzo, tuttavia i risultati che verranno qui descritti a mio parere meritavano comunque di essere messi in giusto risalto.

Abbiamo a disposizione teoremi i quali garantiscano l'esistenza di ottimi paretiani? Certamente sì, e ve ne sono di sofisticati. Se ci accontentiamo di qualcosa di rapido e comunque di un certo interesse, è sufficiente mettere assieme la scalarizzazione con il teorema di Weierstrass.

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^k$, chiuso, limitato e non vuoto. E siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ continue. Per ogni $\lambda, \mu \in [0, 1]$ a funzione $\lambda f + \mu g$ sarà continua su X e quindi per il teorema di Weierstrass assume massimo e minimo su X. Un tale punto di massimo sarà un punto di ottimo paretiano per $F = (f, g)$ (stretto se λ e μ sono entrambi nulli).

A dire il vero, per questo risultato non è importante che sia $X \subseteq \mathbb{R}^k$. Ciò che importa è che sia compatto e non vuoto. Il caso visto nell'esercizio 2 non è altro che un caso particolare di quanto appena osservato (un insieme finito, reso spazio topologico con la topologia discreta, è compatto).

8 Esempi

Esempio 4 Supponiamo di dover dividere 100 euro fra due individui. Per comodità supponiamo che i soldi siano infinitamente divisibili (in modo da poter lavorare nel continuo, anziché su un insieme discreto). Supponiamo che le funzioni di utilità dei due individui siano, rispettivamente (definite entrambe du $[0, +\infty[$: $u(t) = t$ e $v(t) = \sqrt{t}$. Notare che, se si tratta di funzioni di utilità di von Neumann Morgenstern, il primo individuo è indifferente al rischio mentre il secondo è avverso al rischio.

Immaginiamo che le divisioni ammissibili siano tali da esaurire completamente la somma disponibile. In tal caso, possiamo assumere che sia $X = [0, 100]$. In tal caso: $f(x) = u(x) = x$ e $g(x) = v(100-x) = \sqrt{100 - x}$. E' evidente che ogni elemento di X è punto di ottimo paretiano: visto che entrambi i due individui preferiscono strettamente avere più soldi che meno, passare da un $x_1 \in X$ a un altro $x_2 \in X$ corrisponderà a dare più soldi al primo e meno al secondo (o viceversa). Non è quindi possibile avere contemporaneamente $f(x_2) = u(x_2) > u(x_1) = f(x_1)$ e $g(x_2) = v(100 - x_2) > v(100 - x_1) = g(x_1)$.

Vediamo quali risultati ci dà la scalarizzazione. La teoria ci garantisce che ogni ottimo paretiano sarà ottenibile mediante scalarizzazione. Cominciamo col vedere quali ottimi paretiani otteniamo usando $F_\lambda(x) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x)$. Cerchiamo il massimo (globale) di F_λ, che esiste sicuramente per il teorema di Weierstrass.

$F_\lambda(x) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x) = \lambda u(x) + (1 - \lambda)v(100 - x) =$
$= \lambda x + (1 - \lambda)\sqrt{100 - x}$.

Per $\lambda = 0$, $F_0(x) = g(x) = v(100 - x) = \sqrt{100 - x}$, che ha massimo per $x = 0$, mentre per $\lambda = 1$ $F_1(x) = f(x) = x$, che ha massimo per $x = 100$.

Per $\lambda \in]0, 1[$, vediamo se la derivata prima si annulla in qualche punto di $]0, 100[$ (nei punti interni di $[0, 100]$ è derivabile).

$F'_\lambda(x) = \lambda + (1 - \lambda)\frac{-1}{2\sqrt{100-x}} = 0$ se e solo se (facendo i calcoli[5]) $x = 100 - \frac{(1-\lambda)^2}{4\lambda^2}$.

$100 - \frac{(1-\lambda)^2}{4\lambda^2} \in]0, 100[$? Che sia minore strettamente di 100 non c'è dubbio. Invece, la positività è equivalente a $\lambda > \frac{19}{399}$.

Quindi, se $\lambda \leq \frac{19}{399}$ la derivata prima non si annulla mai in un punto di $]0, 100[$. Si verifica agevolmente che per quei valori del parametro λ la funzione F_λ è strettamente decrescente e quindi assume massimo in $x = 0$.

Per gli altri valori di λ il punto critico trovato risulta essere un punto di massimo (crescenza e decrescenza si analizzano facilmente, deducendole dal segno della derivata prima).

[5]Che naturalmente avevo sbagliato... Ringrazio Silvia Villa che me l'ha fatto notare.

Può sembrare curioso che la scalarizzazione del problema, con un parametro $\lambda \leq \frac{19}{399}$, sia tale da non assegnare *nulla* dei 100 euro al primo individuo. E ciò nonostante il suo "peso relativo" non sia nullo (certo nessuno si sorprende che per $\lambda = 0$ la scalarizzazione porti al risultato che non si assegna nulla al primo individuo, visto che gli viene assegnato un "peso" nullo).

Non si tratta di un fatto straordinario, invece. Se fosse stato $v(x) = x$, avremmo ottenuto $F_\lambda(x) = (2\lambda - 1) + 100(1 - \lambda)$, per cui è facile verificare che:

$$\operatorname*{argmax}_{x \in [0,100]} F_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } \lambda < 1/2 \\ [0, 100] & \text{per } \lambda = 1/2 \\ 100 & \text{per } \lambda > 1/2 \end{cases}$$

Come si vede, basta che il "peso relativo" di un individuo sia appena minore di quello dell'altro ed ecco che costui si trova a non trovarsi assegnato alcunché.

Ritornando all'esempio, se ammettiamo tutte le spartizioni che non esauriscono i 100 euro (quindi anche quelle che "lasciano qualcosa sul tavolo"), abbiamo che $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 100\}$ ed è $f(x, y) = u(x) = x$, $g(x, y) = v(y) = \sqrt{y}$. Precisato chi sia il nostro problema, si vede subito che i punti di ottimo paretiano li troviamo comunque solo per $x + y = 100$. Insomma, ci riconduciamo al caso appena visto.

Esempio 5 Un metodo per trovare punti di ottimo paretiano (e ottimi paretiani) è dato dal metodo lessicografico.

Dati X, f e g, si cerca prima:

$$X_I = \operatorname*{argmax}_{x \in X} f(x)$$

E, poi, si cerca:

$$\operatorname*{argmax}_{x \in X_I} g(x)$$

Si noti come la soluzione che troviamo (se esiste[6]) equivale a trovare $\bar{x}$ tale che $F(\bar{x})$ sia il massimo lessicografico[7] di $F(X)$.

[6]Se X è non vuoto e compatto (per esempio, un sottoinsime chiuso e limitato di un qualche $\mathbb{R}^k$) ed f è continua, X_I è non vuoto ed è esso stesso compatto. Quindi, se anche g è continua essa avrà massimo su X_I. Pertanto, la compattezza di X e la continuità di f e g garantiscono che tale soluzione esiste.

[7]Stiamo parlando dell'ordine lessicografico $>_L$ su $\mathbb{R}^2$ così definito: $(s_1, t_1) >_L (s_2, t_2)$ se $[\ (s_1 > s_2)$ vel $(s_1 = s_2$ e $t_1 > t_2]$. Ovviamente si può definire anche l'ordine lessicografico che inverte, rispetto a questo, i ruoli della prima e seconda coordinata. Ciascuno di questi due ordini lessicografici è un ordine totale su $\mathbb{R}^2$.

E' facile provare che, se esiste, una soluzione $\bar{x}$ è un punto di ottimo paretiano stretto. E' evidente infatti che non può esistere x t.c. $f(x) > f(\bar{x})$ e $g(x) \geq g(\bar{x})$, visto che $\bar{x}$ è un punto di massimo per f e pertanto $f(x) > f(\bar{x})$ non può essere vera[8]. Altrettanto, non può esistere x tale che $f(x) \geq f(\bar{x})$ e $g(x) > g(\bar{x})$, visto che $\bar{x}$ rende massima g proprio nell'insieme dei punti per cui f assume il suo valore massimo.

9 Ottimizzazione vettoriale e teoria delle decisioni

Problemi di ottimizzazione vettoriale sorgono in teoria delle decisioni in una situazione come la seguente. Faccio riferimento alle decisioni in condizioni di certezza per concretezza, ma considerazioni analoghe valgono (con le modifiche opportune) per decisioni in condizioni di rischio e di incertezza. Abbiamo un insieme X di alternative, ed una funzione h che mappa gli elementi di X in un insieme di esiti E. Se gli esiti riguardano due decisori (o, in generale, più di un decisore) avremo due funzioni di utilità u e v definite su E ed a valori in $\mathbb{R}$.

La seguente figura descrive la situazione.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{R} \\
X \arrow[r, "h"] & E \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"] & \\
 & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Possiamo naturalmente considerare le funzioni composte $f = u \circ h$ e $g = v \circ h$, come evidenziato nella figura sottostante:

[8]E quindi non sarà vera neanche "$f(x) > f(\bar{x})$ e $g(x) \geq g(\bar{x})$"...

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{R} \\
X \arrow[urr, "f"] \arrow[r, "h"] \arrow[drr, "g"'] & E \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"] & \\
 & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

Eliminando i dettagli inessenziali, come nella figura seguente, troviamo esattamente il quadro che abbiamo visto nella impostazione dei problemi di ottimizzazione vettoriale. La funzione $F : X \to \mathbb{R}$ è quindi individuata dalla coppia di funzioni $f, g : X \to \mathbb{R}$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & \\
 & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

L'idea della ottimizzazione vettoriale è quindi quella di scegliere una alternativa $\bar{x} \in X$ per la quale non ve ne sia un'altra giudicata migliore da entrambi i decisori.

Vi è un'altra sorgente "fondamentale" di un problema di ottimizzazione vettoriale: è quando un decisore[9] ha difficoltà a sintetizzare in un unico criterio di valutazione più criteri parziali. Ad esempio, nella scelta di un'auto uno

[9]Caso particolarmente rilevante è quando il decisore è in realtà un organo rappresentativo di una pluralità di cittadini o, in genere, di più individui. Si pensi ad una amministrazione provinciale che deve scegliere la localizzazione di un inceneritore (pardon, termovalorizzatore).

può avere delle preferenze chiare per quanto riguarda sia le prestazioni sia il prezzo, ma gli potrebbe essere difficile esprimere delle preferenze complessive.

10 Appendice: preordini e loro aggregazione

Come era stato detto all'inizio (vedi pagina 2), vi sono due diversi punti di vista, che offrono due diversi percorsi di generalizzazione.

Mi limiterò a due brevi note. In realtà si potrebbe fare un discorso molto articolato e con propaggini fin verso la teoria delle scelte sociali.

Anche tenendo presente i riferimenti che sono stati fatti ai problemi di decisione, possiamo osservare come in un problema di ricerca del *punto* di massimo per una funzione, ciò che davvero importa è solo il preordine totale $\succeq_f$ che essa induce su X. Ricordo che, data $f : X \to \mathbb{R}$, possiamo definire la relazione $\succeq_f$ su X nel modo seguente:

$$x_1 \succeq_f x_2 \quad \text{se e solo se} \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

Quindi, la ricerca di un *punto di massimo* per f è equivalente alla ricerca del *massimo* per $\succeq_f$.

Si noti il completo ribaltamento di prospettiva che si opera, seguendo questa strada anziché quella che abbiamo usato in precedenza. Non solo, questo nuovo punto di vista può essere portato avanti fino ad assumere una visione radicalmente diversa. Possiamo cioè ritenere che il dato del problema non sia una funzione f, ma un preordine totale $\succeq$. Se così è, possiamo allora parlare ovviamente del problema di massimo per $\succeq$ su X, senza fare riferimento ad alcuna funzione a valori reali.

Insomma, si può assumere che su un dato insieme X siano ad esempio definiti due preordini totali $\succeq_I$ e $\succeq_{II}$, che rappresentano le preferenze di due individui. Ci si può porre il problema di trovare un elemento $\bar{x} \in X$ per cui, se si riesce a trovare un elemento $x \in X$ tale che sia $x \succeq_I \bar{x}$ e $x \succeq_{II} \bar{x}$, allora sia necessariamente $x = \bar{x}$. O varianti sul tema.

Questa strada può essere generalizzata, assumendo di avere n preordini totali $\succeq_1, \ldots, \succeq_n$. Come detto, è solo questione di notazioni. Molto più interessante è osservare che, se il dato del problema sono appunto n preordini totali, indicanti le preferenze di altrettanti individui, possiamo ritenere di essere di fronte ad un problema di *scelte sociali*, per lo meno come questo viene inteso modernamente, a partire dal saggio di Arrow del 1951. Ma questa è un'altra storia (interessante!).