Implementazione

con breve introduzione alle scelte sociali e con l'esempio di Re Salomone

Appunti di
Fioravante PATRONE
http://dri.diptem.unige.it/

versione del 4 maggio 2011

Indice

Finalità degli appunti

Introdurre la problematica dell'implementazione, esaminando in dettaglio e con la dovuta formalizzazione il caso dell'implementazione in equilibrio di Nash.
Il discorso è preceduto da una breve premessa sulla teoria delle scelte sociali. Viene inoltre illustrato in dettaglio il caso di Re Salomone.

1 Scelte sociali ed implementazione: premessa alla formalizzazione

Gli elementi essenziali saranno un insieme di *individui*, un insieme di *alternative* dentro al quale mettiamo tutti i possibili oggetti di scelta finale, le *preferenze* degli individui (sarà dato un insieme di preferenze ammissibili; interessante è il caso speciale in cui questo insieme contiene tutte le preferenze possibili degli individui) ed infine la *classe* dei giochi che possono essere chiamati a giocare. D'ora in poi, ci riferiremo agli individui come ai *giocatori* in quanto, come vedremo, li faremo giocare.

L'idea è che *uno*, padrone, boss, principale, governo, costituente, etc., abbia presente una ben fissata *norma* che sulla base delle preferenze dei giocatori determina quale alternativa vada scelta fra quelle possibili (perché è quella giusta, perché è quella che conviene di più al boss, etc ...). Però questo *uno* non conosce le preferenze dei *giocatori*. Per ottenere il risultato desiderato, allora, deve escogitare un opportuno gioco che, *giocato dai giocatori*, produca il risultato finale desiderato. Si osservi che in quello che faremo questo "uno" sarà *esterno* rispetto all'insieme degli individui di cui ci occupiamo.

Si noti un "trade-off" interessante: questo "uno" ha poca informazione ma ha molto potere, in quanto può decidere che gioco devono giocare i giocatori. Ma il suo potere non giunge fino al punto di poter obbligare gli individui ad effettuare le scelte che lui desidererebbe facessero. Detto altrimenti, non può ottenere gratuitamente l'informazione che non possiede e che invece hanno i giocatori.

Ci occuperemo della formalizzazione di questi discorsi. Premettendo un rapido cenno al problema della *social choice* così come è stato formulato da Arrow.

Nota: alcune parti sono traduzioni pressoché letterali di parti del capitolo 10 di Osborne e Rubinstein (d'ora innanzi: O-R).

2 Scelte sociali

Il problema della moderna teoria delle scelte sociali (o collettive), come è stato tratteggiato da Arrow, è quello della aggregazione delle preferenze di un dato insieme di individui.

Abbiamo un insieme finito N di individui (tipicamente, supporremo che sia $N = \{1, \dots, n\}$). Abbiamo un insieme finito[1] E di possibili oggetti di

[1] Al solito, si tratta di una ipotesi di comodo.

scelta. Assumeremo che ogni individuo $i \in N$ abbia preferenze su E, espresse da un preordine totale[2] $\sqsupseteq_i$.
La n-pla ordinata $(\sqsupseteq_1, \ldots, \sqsupseteq_n)$ verrà detta *profilo di preferenze*. Verrà indicato con $\mathcal{R}$ un'insieme di profili di preferenze. Invece P indicherà l'insieme di tutti[3] i preordini totali su E.

Una *social choice rule* è una corrispondenza[4] $f : \mathcal{R} \rightrightarrows E$. Cioè f seleziona un *sottoinsieme* non vuoto di E per ogni profilo in $\mathcal{R}$. Qualora, per ogni profilo in $\mathcal{R}$, venisse scelto un singleton (ovvero, un insieme contenente un unico elemento) potremmo abbandonare il linguaggio delle corrispondenze e parlare più semplicemente di *social choice function*. Avremmo cioè $f : \mathcal{R} \to E$

Esempio 1 f sceglie gli elementi preferiti da $1 \in N = \{1, \ldots, n\}$ (regola dittatoriale, con dittatore l'individuo 1). ▲

Esempio 2 f sceglie gli elementi non dominati nel senso di Pareto. ▲

Esempio 3 A ogni elemento di E assegniamo un punteggio sulla base delle preferenze dei vari individui e poi sommiamo (regola di Borda). Ad esempio, assegniamo un punto all'ultimo elemento (in ordine di preferenza), due punti al penultimo, e così via, stabilendo anche cosa fare nei casi di indifferenza. f sceglie gli elementi di E che ottengono il punteggio massimo. ▲

Una annotazione su quest'ultimo esempio. Potremmo introdurre una regola aggiuntiva che permetta di scegliere un unico elemento di E. Ad esempio, si potrebbe pensare di numerare gli elementi di E ($E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$) e decidere che, a parità di punteggio si sceglie l'elemento con indice più basso. Così facendo, otterremmo una social choice function. Un altro modo di ottenere un unico elemento di E è quello di effettuare una estrazione a sorte fra gli elementi che hanno ottenuto il punteggio massimo. Va notato che, però, in questo caso non abbiamo una funzione $f : \mathcal{R} \to E$ (e neanche una corrispondenza $f : \mathcal{R} \rightrightarrows E$); casomai, una $f : \mathcal{R} \to \Delta(E)$, nel senso che un dato profilo in $\mathcal{R}$ individua univocamente una probabilità su E (il simbolo $\Delta(E)$ individua per l'appunto l'insieme di tutte le probabilità su E), ma non certo un elemento di E e neanche un sottoinsieme di E.

[2] Un preordine totale è una relazione (binaria) transitiva e totale. Per maggiori dettagli, rinvio a: `http://dri.diptem.unige.it/altro_materiale/disp_prelim_decis_certezza_TdD_2005_06.pdf` oppure a `http://dri.diptem.unige.it/altro_materiale/teoria_decisioni_certezza_rischio.pdf`.

[3] N.B.: Attenzione: gli elementi di $\mathcal{R}$ sono n-uple di preordini totali, mentre gli elementi di P sono preordini totali. Si noti che $\mathcal{R} \subseteq P^n$.

[4] Per qualche parola in più su cosa siano le corrispondenza, vedasi ad esempio: `http://dri.diptem.unige.it/Nash_Berge_Kakutani/Nash_Berge_Kakutani.pdf`

Tornando al discorso principale, vi è un modo per *costruire* una social choice rule *accettabile*? La risposta data da Arrow è negativa, per lo meno se si considerano delle *social choice rule* esprimibili mediante aggregazione di preferenze. Quando parliamo di "aggregazione di preferenze" intendiamo dire che ad ogni profilo di preferenze in $\mathcal{R}$ vogliamo associare un preordine totale su E.

Diremo *social welfare function* una $\Phi : \mathcal{R} \to P$. Ovviamente, data una Φ possiamo ottenere facilmente una f, scegliendo l'elemento (o gli elementi) di E che sono preferiti per il preordine totale $\Phi(\sqsupseteq_1, \dots, \sqsupseteq_n)$ e questo per ogni $(\sqsupseteq_1, \dots, \sqsupseteq_n) \in \mathcal{R}$. Notare che, essendo $\Phi(\sqsupseteq_1, \dots, \sqsupseteq_n)$ un preordine totale ed essendo E un insieme finito, l'insieme degli elementi ottimali secondo $\Phi(\sqsupseteq_1, \dots, \sqsupseteq_n)$ è non vuoto. In altre parole, otteniamo davvero una social choice rule.

Cerchiamo allora una Φ che soddisfi condizioni ragionevoli:

(U) [dominio universale]: $\mathcal{R} = P^n$, ovverossia vogliamo che Φ sia definita per ogni profilo di preferenze

(P) [principio di Pareto, o condizione di unanimità]:

$$\forall \ e', e'' \in E, \quad \forall (\sqsupseteq_i)_{i \in N} \ : \quad [\ e' \sqsupseteq_i e'' \quad \forall i \in N \ ] \Rightarrow e' \trianglerighteq e''^{5}.$$

(IIA) [indipendenza delle alternative irrilevanti]:

$$\forall \ (\sqsupseteq_i)_{i \in N} \quad \text{e} \quad \forall (\sqsupseteq'_i)_{i \in N} :$$

$$\forall \ \hat{e}, \hat{\hat{e}} \in E \quad \left([(\hat{e} \sqsupseteq_i \hat{\hat{e}}) \Leftrightarrow (\hat{e} \sqsupseteq'_i \hat{\hat{e}}) \ \forall i \in N] \ \Rightarrow \ [\hat{e} \trianglerighteq \hat{\hat{e}} \Leftrightarrow \hat{e} \trianglerighteq' \hat{\hat{e}}] \right)$$

L'interpretazione di (IIA) è che, nel voler determinare le preferenze *collettive* tra due alternative $\hat{e}, \hat{\hat{e}}$, io devo guardare solo alle preferenze dei vari individui relativamente a $\hat{e}$ e $\hat{\hat{e}}$. Gli altri elementi non c'entrano. Come possiamo vedere, la regola di Borda è un esempio di violazione di (IIA).

Esempio 4 [Continuazione dell'esempio 3] Vediamo che la regola di Borda ha una caratteristica interessante (pur se piuttosto prevedibile, dato il modo in cui è definita): viola la considerazione di *indipendenza dalle alternative irrilevanti*. Come mostra il seguente semplicissimo esempio:
Abbiamo 3 alternative (A, B, C) e 5 individui (molte volte, nelle applicazioni

[5] Indico per comodità $\Phi((\sqsupseteq_i)_{i \in N})$ con $\trianglerighteq$.

della regola di Borda, essi sono dei votanti):

classif.	pti	1	2	3	4	5
I	3	C	C	B	B	B
II	2	A	A	C	C	C
III	1	B	B	A	A	A

C 12 punti
B 11 punti
A 7 punti

Quindi, C è preferita (dalla società) a B.

Modifichiamo le preferenze degli individui, in modo che ora A sia ritenuta da tutti l'alternativa peggiore[6] possibile. Si noti che non alteriamo le preferenze degli individui per quanto riguarda il confronto tra B e C.

classif.	p.ti	1	2	3	4	5
I	3	C	C	B	B	B
II	2	B	B	C	C	C
III	1	A	A	A	A	A

B 13 punti: vince
C 12 punti
A 5 punti

Stavolta B è preferita (socialmente, dalla collettività) a C. ▲

Teorema 1 (Arrow, 1951 e 1963) *Sia $\Phi : \mathcal{R} \to P$ che soddisfi U, P, IIA. Supponiamo inoltre che E abbia almeno tre elementi. Allora Φ è dittatoriale.*

Esempio 5 La regola di decisione a maggioranza[7] non va bene, perché il risultato non è necessariamente un preordine totale: non è garantita la transitività (paradosso di Condorcet).

[6]Il principio delle alternative irrilevanti considera anche, in altri setting formali, cosa avviene se sparisce l'alternativa A. Come si vede facilmente, anche in questo caso le preferenze collettive individuate dalla regola di Borda subiscono un ribaltamento per quanto riguarda le alternative B e C.

[7]Dato un profilo di preferenze $(\sqsupseteq_i)_{i \in N}$, e dati due elementi di E, diremo che e' è collettivamente preferito ad e'' (cioè, $e' \trianglerighteq e''$) se il numero degli individui i per cui $e' \sqsupseteq_i e''$ è maggiore o uguale di quello per cui vale $e'' \sqsupseteq_i e'$.

L'esempio più semplice possibile è il seguente: $E = \{a, b, c\}$; i tre individui sono: $1, 2, 3$. Le preferenze sono:
- per 1, $a \sqsupset b$ e $b \sqsupset c$ (e quindi $a \sqsupset c$, per la transitività di $\sqsupset$, che è conseguenza del fatto che $\sqsupseteq$ è un preordine totale)
- per 2, $b \sqsupset c$ e $c \sqsupset a$ (e quindi $a \sqsupset b$)
- per 3, $c \sqsupset a$ e $a \sqsupset b$ (e quindi $c \sqsupset b$)

Se seguiamo la regola di decisione a maggioranza per stabilire le preferenze sociali, dalle preferenze di questi tre individui risulta che:
- $a \trianglerighteq b$ in quanto sono due individui che preferiscono a a b e uno per il quale vale il viceversa (da quanto appena affermato segue anche che non è $b \trianglerighteq a$);
- $b \trianglerighteq c$ in quanto sono due individui che preferiscono b a c e uno per il quale vale il viceversa (da quanto appena affermato segue anche che non è $c \trianglerighteq b$);
- $c \trianglerighteq a$ in quanto sono due individui che preferiscono c a a e uno per il quale vale il viceversa (da quanto appena affermato segue anche che non è $a \trianglerighteq c$);

Ma se $\trianglerighteq$ fosse una relazione transitiva, da $a \trianglerighteq b$ e $b \trianglerighteq c$ dovrebbe seguire $a \trianglerighteq c$. ▲

Esempio 6 Se l'insieme E contiene solo due elementi, la regola di decisione a maggioranza produce un metodo di aggregazione delle preferenze che soddisfa le condizioni del teorema di Arrow, come si verifica facilmente. E questa regola non è dittatoriale. Si noti anche che non si presenta il paradosso di Condorcet: poiché E contiene solo due elementi, la condizione di transitività è banalmente soddisfatta (*ogni* relazione su un insieme di due elementi che sia riflessiva è transitiva e la regola di decisione a maggioranza individua sempre una relazione riflessiva). Una caratterizzazione della regola di decisione a maggioranza semplice, nel caso in cui E contenga solo due elementi, è dovuta a May: dettagli su questo risultato si possono trovare qui: `http://dri.diptem.unige.it/altro_materiale/teorema_di_May.pdf`. ▲

3 Implementazione

3.1 La formalizzazione

Ci porremo il problema di *implementare* una data social choice rule. Per strutturare il problema abbiamo bisogno di fissare ancora due elementi.
Uno è il tipo di gioco che pensiamo di fare giocare ai vari individui, o per

meglio quale sia la tipologia di gioco cui siano interessati: per citare i contesti più significativi, può essere un gioco in forma strategica o in forma estesa, ad informazione completa od incompleta. Noi ci occuperemo solamente di giochi in *forma strategica* ad *informazione completa*.

L'altro elemento riguarda il tipo di *razionalità strategica* che presupponiamo, e che verrà incorporato nella scelta di un particolare concetto di soluzione: equilibrio di Nash, strategie dominanti, equilibri correlati, strategie razionalizzabili, evolutionary stable strategies (ESS), equilibri perfetti nei sottogiochi, equilibri perfetti (propri, persistenti), equilibri di qualche sistema di apprendimento, etc ...

Noi ci limiteremo al concetto di equilibrio di Nash (si noti che l'avere scelto la forma strategica di per sé rende inapplicabili concetti tipici della forma estesa, quali gli equilibri perfetti nei sottogiochi, così come gli equilibri sequenziali).

Il problema sarà quindi il seguente: data una choice rule, come implementarla quale equilibrio di Nash per un opportuno gioco in forma strategica? Vanno però ancora precisate alcune cose. Teniamo presente che il decisore centrale non può imporre le preferenze ai giocatori[8]! Quindi lui potrà scegliere solo la game form. Cioè le regole del gioco da fare giocare, che però poi avrà uno oppure un altro equilibrio di Nash a seconda di quali siano le preferenze dei giocatori.

Quindi sarà opportuno *spezzare* anche formalmente un gioco nelle sue due componenti: game form e preferenze dei giocatori.

Fin qui abbiamo visto una pre-descrizione a chiacchiere di quanto faremo formalmente. C'è però un punto importante che non può essere sottaciuto: c'è una apparente contraddizione in quello che stiamo facendo. Da una parte abbiamo il decisore centrale che non conosce le preferenze dei giocatori (se no potrebbe imporre per legge[9] l'oggetto $e \in E$ che lui associa mediante f alle preferenze dei giocatori).

Questo conduce naturalmente ad una modellizzazione ad informazione incompleta. Potrebbe quindi esserci una contraddizione: perché considerare l'equilibrio di Nash anziché quello Nash-bayesiano in un contesto di informazione incompleta? Ancora peggio: perché modellizzare l'interazione strategica dei giocatori come gioco ad informazione completa (come è stato già anticipato), se siamo evidentemente in un contesto di informazione incompleta? A questa domanda risponde Maskin. L'argomentazione principale è la seguente: può benissimo succedere che il decisore centrale non conosca le preferenze dei giocatori mentre loro se le conoscono reciprocamente. L'esem-

[8] In questo modello che studiamo. Ma con un pò di pubblicità...

[9] Se può. Ma, comunque, in ogni caso il problema cambia se il boss sa le preferenze!!

pio di “Re Salomone”, sul quale ci soffermeremo a lungo, è tipico in questo senso.

Altra situazione in cui la implementazione in Nash può avere senso è quando il decisore centrale è un constitutional designer (deve fare le sue scelte dietro un “velo di ignoranza”).

Passiamo finalmente alla formalizzazione. Abbiamo:

- n individui ($\{1, 2, \ldots, n\} = N$)
- E insieme finito (degli oggetti di scelta, o alternative)
- $\mathcal{R}$ un insieme di profili di preferenze. Indicheremo con $\sqsupseteq$ un generico elemento di $\mathcal{R}$. Attenzione che $\sqsupseteq = (\sqsupseteq_1, \ldots, \sqsupseteq_n)$, con $\sqsupseteq_i$ preordine totale su E per ogni $i \in N$.
- $f : \mathcal{R} \rightrightarrows E$ una corrispondenza (cioè $f(\sqsupseteq)$ è un sottoinsieme non vuoto di E per ogni $\sqsupseteq \in \mathcal{R}$). E' la choice rule che siamo interessati ad implementare.

Diremo *game form in forma strategica a conseguenze in* E[10] una terna $G = (N, (X_i)_{i\in N}, h)$, dove N è quello di prima, gli X_i sono insiemi e $h : X \to E$ è detta outcome function ($X = \prod_{i\in N} X_i$; E è quello di prima).

E' evidente che una game form e un profilo di preferenze ci danno un gioco in forma strategica: $(N, (X_i)_{i\in N}, h, (\sqsupseteq_i)_{i\in N}) = (G, \sqsupseteq)$.

Possiamo introdurre la notazione: $x' = (x'_1, \ldots, x'_n) \succeq_i (x''_1, \ldots, x''_n) = x''$ se e solo se $h(x') \sqsupseteq_i h(x'')$. In questo modo otteniamo il gioco in forma strategica nella sua versione più compatta[11]: $(N, (X_i)_{i\in N}, (\succeq_i)_{i\in N})$. Per quanto appena detto nella nota a piè di pagina, qui noi non utilizzeremo questa versione “compatta”.

Naturalmente saremo interessati ad un dato insieme $\mathcal{G}$ di game forms.

E abbiamo anche bisogno (in generale) di un *solution concept*, che è una corrispondenza $\mathcal{S}$ che ad ogni gioco $(G, \sqsupseteq)$ tale che $G \in \mathcal{G}$ e $\sqsupseteq \in \mathcal{R}$, associa un sottoinsieme di X.

[10] D'ora in poi detta game form, se non c'è rischio di confusione. Ricordo che in genere una game form (in forma strategica) è: $G = (N, (X_i)_{i\in N}, E, h)$. Qui, essendo detto che stiamo parlando di game form “a conseguenze in E”, omettiamo di menzionare esplicitamente E nella descrizione della game form.

[11] Ed anche più consueta, laddove non si sia interessati a tener conto esplicitamente ed in modo separato della game form e delle preferenze dei giocatori.

Ovviamente per noi $\mathcal{G}$ sarà $\mathcal{N}$, che ad ogni gioco assegna i profili di strategia che sono equilibrio di Nash.

Possiamo finalmente parlare di implementazione.

Definizione 1 (Definition 179.1 di O-R) *Sia dato un environment* $\mathcal{E} = (N, E, \mathcal{R}, \mathcal{G})$. *E sia* $\mathcal{S}$ *un solution concept per* $\mathcal{E}$. *Sia infine* $f : \mathcal{R} \rightrightarrows E$ *una choice rule. Diremo che* $G = (N, (X_i)_{i \in N}, h) \in \mathcal{G}$ $\mathcal{S}$-implementa f *se:*

$$\forall \sqsupseteq \in \mathcal{R} \;, \qquad h(\mathcal{S}(G, \sqsupseteq)) = f(\sqsupseteq)$$

Ovviamente diremo che f è $\mathcal{S}-$implementabile se esiste G che $\mathcal{S}$-implementa f.

Per una rappresentazione diagrammatica della definizione, vedasi la figura 1.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \overset{f}{\rightrightarrows} & E \\ G \searrow & & \nearrow h \\ & \big(G, \sqsupseteq\big) = \big(N, X, h, \underset{\uparrow}{\sqsupseteq}\big) \overset{\mathcal{S}}{\rightrightarrows} X & \end{array}$$

vero profilo
di preferenze

Figura 1. La game form G $\mathcal{S}$-implementa f

Sia dato $\hat{\sqsupseteq} \in \mathcal{R}$:

$$
\begin{array}{ccc}
\hat{\sqsupseteq} \in \mathcal{R} & \xRightarrow{\qquad\qquad f \qquad\qquad} & h(x^*) \in f\big(\hat{\sqsupseteq}\big) \subseteq E \\
G \searrow & & \nearrow h \\
\multicolumn{3}{c}{\big(G, \hat{\sqsupseteq}\big) = \big(N, X, h, \hat{\sqsupseteq}\big) \xRightarrow{\mathcal{S}} \{x^* = (\hat{\sqsupseteq})_{j \in N}, \ldots\}}
\end{array}
$$

Figura 2. Come la truthful $\mathcal{S}$-implementazione
di f opera su un elemento $\hat{\sqsupseteq} \in \mathcal{R}$

Un esempio interessante di meccanismo è quello di un'asta. Va detto subito che questo tipo di meccanismo male si colloca all'interno dello schema che abbiamo predisposto. Infatti, il setting "naturale" sarebbe quello dei giochi ad informazione incompleta. Ma, comunque, facciamo questo "esercizio". Supponiamo di avere un oggetto che vogliamo vendere e di voler usare un'asta. Possiamo usare un'asta in busta chiusa: qui lo spazio delle strategie per ciascun giocatore è semplicemente il semiasse dei reali positivi[12]. Potremmo usare un'asta inglese, nel qual caso lo spazio delle azioni disponibili per un partecipante diventa un oggetto piuttosto complicato. Lo possiamo addomesticare introducendo delle regole quali: gli incrementi sono prefissati e le offerte sono chiamate in sequenza dal banditore; c'è un tempo limite o un valore limite per le offerte; etc.

Chi potrebbe essere l'insieme E degli esiti? Un elemento di E potrebbe essere fatto così: $(t_1, \ldots, t_n, j)$. Dove il vettore $(t_1, \ldots, t_n)$ indica i pagamenti che verranno fatti da tutti i giocatori al banditore (nulla vieta che alcuni siano nulli, magari che lo siano tutti tranne uno; ma non è certo obbligatorio: potrebbe benissimo esserci una "entrance fee"). L'ultima componente, j ($j \in N$), evidentemente serve per indicare chi sia colui che si aggiudica l'oggetto. Quindi[13], $E = \mathbb{R}^n \times N$.

[12] Ciò significa anche assumere che i giocatori, ovvero coloro i quali fanno le offerte, non abbiano vincolo di budget.

[13] A dire il vero, stiamo glissando su una cosuccia, che può sembrare minimale ma che ci fa uscire subito dallo schema. In un'asta fatta mediante offerte in busta chiusa, potrebbero benissimo esserci due offerte ottimali. Serve avere un modo per allocare l'oggetto messo all'asta. Va benissimo estrarre a sorte, ma questa procedura fuoriesce immediatamente

E come è fatta h? Per una asta in busta chiusa, avremo che un profilo di strategie è $(b_1, \dots, b_n) \in [0, \infty[^n$. Abbiamo che $h(b_1, \dots, b_n)$ è $(t_1, \dots, t_n, j)$, dove l'indice j sarà quello che corrisponde al bid più elevato (cioè, $b_j = \max\{b_i : i \in N\}$; trascuro cosa avviene nei casi di parità, evocati nella nota 13). E il vettore dei pagamenti avrà 0 in tutte le celle, eccezion fatta per la cella di indice j, per la quale si avrà che $t_j = b_j$ (detto in parole semplici: chi fa l'offerta più alta si aggiudica l'oggetto e deve pagare la somma che ha offerto). Potremmo però usare un'altra regola: per esempio, mettere un prezzo di riserva[14]: in tal caso, le strategie restano identiche a prima, mentre dobbiamo cambiare E (sarà sufficiente prendere j in $N \cup \{*\}$, dove il simbolo $*$ viene usato per dire che nessuno si aggiudica l'oggetto); dovremo anche modificare, di conseguenza, h. Come sia fatta h nel caso dell'asta inglese è molto facile da dire a parole; meno facile è la formalizzazione, più che altro per la fatica di descrivere accuratamente chi siano gli spazi delle strategie.

Come secondo esempio in merito all'implementazione, torniamo alla regola di Borda, per metterne in evidenza una caratteristica: la sua manipolabilità.

Esempio 7 [Continuazione degli esempi 3 e 4] E' sufficiente che gli individui $3, 4, 5$ dichiarino preferenze diverse dalle loro vere. Ad esempio:

classif.	pti	1	2	3	4	5
I	3	C	C	B	B	B
II	2	A	A	A	A	A
III	1	B	B	C	C	C

C 9 punti
B 11 punti
A 7 punti

Cioè, ai tre tizi che volevano B è bastato dire che loro preferiscono A a C per far vincere B (si noti che non e' casuale avere manipolabilità in presenza di violazione della condizione di IIA).

Un altro esempio (sempre relativo alla regola di Borda) è il seguente.

Si immaginino 2 squadre (di ciclisti) costituite da 3 ciclisti ciascuna. Chiamo A, B, C i tre ciclisti della prima squadra e D, E, F quelli della seconda.

dallo schema che abbiamo edificato, per le stesse ragioni già indicate nell'annotazione relativa all'esempio 3.

[14] Cioè, il prezzo al di sotto del quale non siamo disponibili a vendere l'oggetto.

Sono queste le 6 alternative tra le quali dobbiamo scegliere la *migliore* (il ciclista più bravo). L'analogo dei *giocatori* (o votanti) è costituito da un certo numero di gare che devono sostenere. Abbiamo 3 gare, e quindi 3 votanti. Questi sotto sarebbero i risultati di 3 gare disputate *onestamente* (nelle caselle metto i punteggi):

classif.	A	B	C	D	E	F
I gara	2	4	5	6	3	1
II gara	2	4	5	6	1	3
III gara	6	5	4	3	2	1
TOT	10	13	14	15	6	5

Vince D, che ottiene il punteggio massimo, davanti a C.
Come si vede dalla tabella, nella terza gara i ciclisti della prima squadra sono arrivati ai primi tre posti. Ebbene, supponiamo che ciò sia successo perché sono andati in fuga e hanno staccato gli altri tre. Se è così, loro possono decidere a loro piacimento chi fare vincere, che arrivare secondo e terzo. Ad esempio:

classif.	A	B	C	D	E	F
I gara	2	4	5	6	3	1
II gara	2	4	5	6	1	3
III gara	5	4	6	3	2	1
TOT	9	12	16	15	6	5

Vince C, davanti a D.
Si noti che le posizioni degli altri ciclisti nella classifica finale restano inalterate (in particolare, quindi, A e B non sono danneggiati). E si noti anche come la seconda squadra non abbia possibilità di *contro-manipolare* il risultato dell' ultima gara. ▲

3.2 "Truthful implementation" ed il "revelation principle"

Vediamo ora la nozione di truthful $\mathcal{S}$- implementation.

Definizione 2 (Definition 179.2 di O-R) . *Sia* $\mathcal{E} = (N, E, \mathcal{R}, \mathcal{G})$ *un environment con la condizione che per ogni* $G = (N, (X_i)_{i\in N}, h) \in \mathcal{G}$ *si ha che* $X_i = P^n \quad \forall i \in N$.
Sia $\mathcal{S}$ *un solution concept ed* f *una choice rule. Diremo che* $G \in \mathcal{G}$ *truthfully*

$\mathcal{S}$ *- implementa la choice rule* f *se per ogni* $\sqsupseteq \in \mathcal{R}$ *si ha:*

- $x^\star \in \mathcal{S}(G, \sqsupseteq)$*, dove* $x^\star = (x_i^\star)_{i \in N}$ *e* $x_i^\star = \sqsupseteq \quad \forall i \in N$
  (cioè: $x^\star$ *ci dice che ogni giocatore riporta il vero profilo di preferenze)*
- $h(x^\star) \in f(\sqsupseteq)$
  (cioè: l'esito che si ottiene dal gioco se ogni giocatore riporta il vero profilo di preferenze è uno di quelli buoni, cioè è tra quelli che la choice rule individua).

Questo è uno schema generale, non ristretto al solo equilibrio di Nash. Ma il *revelation principle* lo vedremo per gli equilibri di Nash.

Prima però di passare a questa parte, una osservazione sul perché di una scelta. Perché abbiamo imposto la restrizione che $X_i = P^n$?

Questa domanda è decomponibile in due sottodomande. Una è: perché chiediamo ad un individuo di usare come strategia (si noti che interpreteremo queste strategie come delle "dichiarazioni") un *profilo* di preferenze? Risposta: il fatto di usare questa cosa così complicata, anziché immaginare che le strategie corrispondano solo a "dichiarazioni" che riguardano le preferenze del nostro individuo, senza che lui si impegni a fare "dichiarazioni" sulle preferenze degli altri, è dovuto a ragioni di carattere tecnico. Oltretutto, *è una cosa ammissibile da chiedere*: non dimentichiamoci che c'è una idea sottostante, e cioè che le preferenze degli individui, pur se non note al social planner, sono invece conoscenza comune tra gli individui. Comunque, non è questa la sottodomanda interessante.

La sottodomanda interessante è: perché gli elementi dello spazio delle strategie per un giocatore devono essere *preferenze* su E (o profili di preferenze: ribadisco, questo è solo un aspetto di carattere tecnico)? Per un motivo del tutto ovvio. Noi ci poniamo un problema di *truthful* implementation. E allora questa richiesta deve avere un senso! Si pensi ad un'asta inglese. Può benissimo capitare che un individuo faccia dapprima un'offerta, e poi ne faccia un'altra, più alta, per superare offerte di altri partecipanti. Cosa diciamo? Che questo individuo *mente*? Chiaramente non ha senso! Siamo quindi obbligati a lavorare con P (o P^n; ripeto fino a sfinimento che questo è solo un aspetto tecnico) se vogliamo dare un senso a *truth*! Se chiedo a uno di dirmi le sue preferenze, e lui mi dà una risposta, posso pormi il problema se la sua risposta sia menzognera oppure no. Se invece chiedo a costui di fare delle strane azioni (certo, conseguenza delle sue preferenze), come alzare una mano per fare un'offerta, non ho modo per dire che egli abbia fatto una dichiarazione menzognera. Può darsi che nulla mi impedisca di dedurre questo fatto, naturalmente. Ma dovrebbe essere chiaro che si tratta di un'altra cosa.

Teorema 2 (Lemma 185.2 di O-R; Revelation principle) . *Sia $\mathcal{E}$ un environment. Se la corrispondenza di scelta sociale f è $\mathcal{N}$-implementabile, allora è anche truthfully $\mathcal{N}$-implementabile.*

Dimostrazione Si tratta di utilizzare l'idea di funzione composta, e poco più.

Sia $G = (N, (X_i)_{i\in N}, g)$ una game form che Nash-implementa $f : \mathcal{R} \rightrightarrows E$.

Per ogni $\sqsupseteq = (\sqsupseteq_1, \ldots, \sqsupseteq_n) \in \mathcal{R}$, sia $(x_i(\sqsupseteq))_{i\in N}$ un equilibrio di Nash del gioco $(G, \sqsupseteq)$.

Definiamo una nuova game - form $G^\star = (N, (X_i)_{i\in N}, h^\star)$. Dove $X_i^\star = P^n \quad \forall i \in N$ (siamo obbligati a fare così per definizione di truthful implementation). E dove $h^\star(p) = h((x_i(p_i))_{i\in N})$ per ogni $p \in \prod_{i\in N} X_i^\star$.

Si noti che ogni p_i è un profilo di preferenze, e quindi p è un profilo di profili di preferenze! Siamo a livelli quasi demenziali. Ma funziona.

Infatti si ha che, dato $\hat{\sqsupseteq} \in P^n : p^\star = (p_i)_{i\in N}$, con $p_i = \hat{\sqsupseteq} \quad \forall \in N$, è un equilibrio di Nash per $(G^\star, \sqsupseteq)$. Inoltre, $h^\star(p^\star) \in f(\sqsupseteq)$.

Vediamo per esteso la costruzione nel caso di $N = \{I, II\}$, cioè con due giocatori:

Sia $G = (X_I, X_{II}, h)$ una game form che $\mathcal{N}$-implementa $f : \mathcal{R} \rightrightarrows E$.

Per ogni $\sqsupseteq \in \mathcal{R}$, sia $(x_I(\sqsupseteq), x_{II}(\sqsupseteq))$ equilibrio di Nash per $(G, \sqsupseteq)$.

Definiamo $G^\star = (P^2, P^2, h^\star)$, dove:
$h^\star\big((\sqsupseteq'_I, \sqsupseteq'_{II}), (\sqsupseteq''_I, \sqsupseteq''_{II})\big) = h(x_I(\sqsupseteq'_I, \sqsupseteq'_{II}), x_{II}(\sqsupseteq''_I, \sqsupseteq''_{II}))$.

Sia allora $\hat{\sqsupseteq} \in \mathcal{P}$. Dobbiamo dimostrare che $(\hat{\sqsupseteq}, \hat{\sqsupseteq})$ è equilibrio di Nash del gioco costruito a partire dalla game - form $G^\star$ e dalle preferenze $\hat{\sqsupseteq}$.

Cioè che:

$$h^\star\Bigg((\hat{\sqsupseteq}_I, \hat{\sqsupseteq}_{II}), (\hat{\sqsupseteq}_I, \hat{\sqsupseteq}_{II})\Bigg) \ \hat{\sqsupseteq}_I \ h^\star\Bigg((\sqsupseteq_I, \sqsupseteq_{II}), (\hat{\sqsupseteq}_I, \hat{\sqsupseteq}_{II})\Bigg) \quad \forall (\sqsupseteq_I, \sqsupseteq_{II}) \in P^2$$

(e ovviamente l'analoga condizione per II, che non trascrivo). Vale a dire:

$$h\Bigg(x_I(\hat{\sqsupseteq}_I, \hat{\sqsupseteq}_{II}), x_{II}(\hat{\sqsupseteq}_I, \hat{\sqsupseteq}_{II})\Bigg) \ \hat{\sqsupseteq}_I \ h\Bigg(x_I(\sqsupseteq_I, \sqsupseteq_{II}), x_{II}(\hat{\sqsupseteq}_I, \hat{\sqsupseteq}_{II})\Bigg)$$
$$\forall (\sqsupseteq_I, \sqsupseteq_{II}) \in P^2$$

Ma noi sappiamo che $(x_I(\hat{\sqsupseteq}_I, \hat{\sqsupseteq}_{II}), x_{II}(\hat{\sqsupseteq}_I, \hat{\sqsupseteq}_{II}))$ è equilibrio di Nash per $(G, \sqsupseteq)$.

Quindi:

$$h(x_I(\hat{\sqsupseteq}_I, \hat{\sqsupseteq}_{II}), x_{II}(\hat{\sqsupseteq}_I, \hat{\sqsupseteq}_{II})) \quad \hat{\sqsupseteq}_I \quad h(x'_I, x_{II}(\hat{\sqsupseteq}_I, \hat{\sqsupseteq}_{II})) \quad \forall x'_I \in P^2$$

E quindi sarà vero, a maggior ragione per gli x' del tipo $x_I(\sqsupseteq_I, \sqsupseteq_{II})$.

Funziona! ■

Ora che abbiamo visto un esempio di *revelation principle* in azione, con tutti i dettagli, è il caso di mettere in evidenza i problemi di questo concetto. Questi sono essenzialmente due, come si vede dalla definizione:

- possono esserci soluzioni NON truth telling (cioè non si chiede che $\{x^\star\} = \mathcal{S}(G, \sqsupseteq) \quad \forall \sqsupseteq \in P^n$):

- possono esserci profili di preferenze per i quali non ogni esito preferito secondo f è una soluzione del gioco
(cioè non si chiede che $h(\mathcal{S}(G, \sqsupseteq)) = f(\sqsupseteq)$):

Va detto (e su questo Maskin pone particolarmente l'accento) che non sempre in letteratura è stata prestata la dovuta attenzione a questi difetti.

Se uno ha ricavato un po' di interesse per il problema di implementazione, gli suggerisco di leggere anche la parte che O-R dedicano alla implementazione in strategie dominanti. Vale anche la pena di vedere Maskin su un altro approccio, che usa l'idea di *effectivity function*.

Abbiamo visto che ogni regola Nash-implementabile è anche truthfully Nash-implementabile: c'è una game form in cui (*i*) ogni giocatore deve annunciare un profilo di preferenze e (*ii*) per ogni profilo di referenze dire la verità è un equilibrio di Nash. Questo risultato è utile per due finalità. Primo, serve per determinare i confini dell'insieme delle regole di scelta che sono Nash-implementabili. Secondo, mostra che un gioco semplice può essere usato per ottenere l'obiettivo di un pianificatore che considera truthful equilibri di Nash come naturali e non è interessato all'esito fintanto che esso sia nell'insieme dato dalla regola di scelta[15].

Notare che *non* segue che in una analisi della implementazione in equilibrio di Nash noi possiamo restringere l'attenzione a giochi in cui ogni giocatore annuncia un profilo di preferenze, dal momento che il gioco che truthfully implementa in equilibrio di Nash la regola di scelta può avere equilibri di Nash non truthful i quali generano esiti diversi da quelli previsti dalla regola di scelta. Notare anche che è essenziale che l'insieme delle azioni [strategie] per ogni giocatore sia l'insieme dei profili di preferenze, non l'insieme

[15] Rinvio chi fosse interessato a vedere quanto detto negli appunti sugli equilibri correlati a proposito di due definizioni di equilibrio correlato e sul fatto che la prima risulta essere "sufficiente": `http://dri.diptem.unige.it/equilibri_correlati/equilibri_correlati.pdf`

(più piccolo) delle relazioni di preferenza, come nella parte (b) del revelation principle per DSE-implementation (Lemma 181.4 di O-R) (qui "DSE" sta per "Dominant Strategy Equilibrium").

Esempio 8 [Example 189.1 di O-R, prima parte] Supponiamo che un oggetto debba essere assegnato a un giocatore appartenente all'insieme $\{1, \dots, n\}$. Assumiamo che per tutti i possibili profili di preferenze ci sia un unico giocatore che preferisce avere l'oggetto anziché non averlo. La funzione di scelta che assegna l'oggetto a questo giocatore può essere implementata dalla game form in cui l'insieme delle azioni [strategie] di ogni giocatore è $\{$SI, NO$\}$ e la funzione che mappa profili di strategie in esiti assegna l'oggetto al giocatore con l'indice minimo che dice "SI" se c'è un tale giocatore, ed al giocatore n altrimenti. E' facile verificare che se il giocatore i è quello che preferisce avere l'oggetto piuttosto che no, allora l'unico esito di equilibrio è che i ottiene l'oggetto. ▲

Vediamo in dettaglio cosa avviene nel caso di tre giocatori ($\{1, 2, 3\}$). L'insieme delle alternative può essere descritto come $E = \{e', e'', e'''\}$, dove, ad esempio, e'' sta ad indicare che l'oggetto viene assegnato al giocatore 2. Precisiamo poi chi sia $\mathcal{R}$. Sono possibili solo tre profili di preferenze: $\sqsupseteq'$, $\sqsupseteq''$ e $\sqsupseteq'''$. Dove, ad esempio, $\sqsupseteq'$ corrisponde al caso in cui 1 e solo 1 desideri l'oggetto. E' $(\sqsupseteq'_1, \sqsupseteq'_2, \sqsupseteq'_3)$, dove $e' \sqsupset'_1 e'' \sqsupseteq e'''$. La "game form" è la seguente (il numero in casella indica a quale giocatore è assegnato l'oggetto):

$1 \setminus 2$	SI	NO
SI	e'	e'
NO	e''	e'''

SI

$1 \setminus 2$	SI	NO
SI	e'	e'
NO	e''	e'''

NO

$$\nwarrow \quad \nearrow$$
$$3$$

Se è il giocatore 1 a volere l'oggetto (e gli altri due no) e quindi il profilo di preferenze è $\sqsupseteq'$, otteniamo il seguente gioco (uso funzioni di utilità che assegnano, per ogni giocatore, 0 all'esito meno preferito e 1 a quello desiderato):

$1 \setminus 2$	SI	NO
SI	$1,1,1$	$1,1,1$
NO	$0,0,1$	$0,1,0$

SI

$1 \setminus 2$	SI	NO
SI	$1,1,1$	$1,1,1$
NO	$0,0,1$	$0,1,0$

NO

$$\nwarrow \quad \nearrow$$
$$3$$

Si verifica facilmente che questo gioco ha quattro equilibri di Nash: (SI, SI, SI), (SI, NO, SI), (SI, SI, NO), (SI, NO, NO), il cui esito è (come si vede dalla game form) che l'oggetto viene assegnato al giocatore 1.

Se è il giocatore 2 a volere l'oggetto, otteniamo il gioco:

$1 \setminus 2$	SI	NO
SI	$0,0,1$	$0,0,1$
NO	$1,1,1$	$1,0,0$

SI

$1 \setminus 2$	SI	NO
SI	$0,0,1$	$0,0,1$
NO	$1,1,1$	$1,0,0$

NO

$$\nwarrow \quad \nearrow$$
$$3$$

Qui gli equilibri di Nash sono: $(NO, SI, SI), (NO, SI, NO)$, il cui esito è che l'oggetto viene assegnato al giocatore 2.

Infine, se è 3 a volere l'oggetto, otteniamo:

$1 \setminus 2$	SI	NO
SI	$0,1,0$	$0,1,0$
NO	$1,0,0$	$1,1,1$

$1 \setminus 2$	SI	NO
SI	$0,1,0$	$0,1,0$
NO	$1,0,0$	$1,1,1$

SI $\qquad$ NO

$\nwarrow \quad \nearrow$

3

Stavolta gli equilibri di Nash sono: $(NO, NO, SI), (NO, NO, NO)$, e l'oggetto viene assegnato al giocatore 3.

Una osservazione (dovuta a Stefano Lugo, studente PoliMI) sulle ipotesi che facciamo in merito a ciò che conoscono i decisori coinvolti in questa situazione. Non è sufficiente assumere che sia conoscenza comune (tra i giocatori) il fatto che in ogni caso vi sia uno ed un solo giocatore che desidera l'oggetto. Infatti, ad esempio, nel caso $\sqsupseteq'$ il giocatore 2 non sarebbe in grado di sapere se sia 1 o 3 a desiderare l'orologio (analoga considerazione vale per 3). Perché il setting usato abbia senso, occorre assumere che sia conoscenza comune *chi sia colui che desidera l'oggetto*.

Possiamo anche osservare come una piccola modifica della game form, nonostante possa sembrare irrilevante, ci porti a non riuscire ad implementare la regola desiderata. Basta decidere che, nel caso in cui tutti dicano "NO", l'oggetto viene assegnato all'individuo 1 (anziché all'individuo n: nel nostro caso $n = 3$). La game form diventa (l'unico esito che cambia è quello in corrispondenza dei tre "NO"):

$1 \setminus 2$	SI	NO
SI	e'	e'
NO	e''	e'''

$1 \setminus 2$	SI	NO
SI	e'	e'
NO	e''	e'

SI $\qquad$ NO

$\nwarrow \quad \nearrow$

3

Se siamo, ad esempio, nel caso in cui è il giocatore 2 a volere l'oggetto, otteniamo il gioco:

$1 \setminus 2$	SI	NO
SI	$0, \underline{0}, \underline{1}$	$0, \underline{0}, \underline{1}$
NO	$\underline{1}, \underline{1}, \underline{1}$	$\underline{1}, 0, 0$

$1 \setminus 2$	SI	NO
SI	$0, \underline{0}, \underline{1}$	$\underline{0}, \underline{0}, \underline{1}$
NO	$\underline{1}, \underline{1}, \underline{1}$	$\underline{0}, 0, \underline{1}$

SI $\qquad$ NO

$\nwarrow \quad \nearrow$

3

Come si vede (sono stati sottolineati i payoff corrispondenti alle best reply dei giocatori), gli equilibri di Nash sono: $(NO, SI, SI), (NO, SI, NO)$, il cui esito è che l'oggetto viene assegnato al giocatore 2, ma anche (SI, NO, NO) il cui esito prevede che l'oggetto sia assegnato al giocatore 1.

Esempio 9 [Example 189.1 di O-R, seconda parte] Ora assumiamo che in ogni profilo di preferenze vi siano due giocatori (*privilegiati*) che preferiscono avere l'oggetto anziché no, e che vogliamo implementare la regola di scelta che assegna ad ogni profilo di preferenze i due esiti in cui l'oggetto è assegnato ad uno dei due giocatori "privilegiati".

Solo per curiosità vediamo cosa avviene della game form usata per l'esempio 8, quando siano 1 e 2 a preferire di avere l'oggetto.

$1 \setminus 2$	SI	NO
SI	$1, 0, 1$	$1, 0, 1$
NO	$0, 1, 1$	$0, 0, 0$

$1 \setminus 2$	SI	NO
SI	$1, 0, 1$	$1, 0, 1$
NO	$0, 1, 1$	$0, 0, 0$

SI $\qquad$ NO

$\nwarrow \quad \nearrow$

3

Questo gioco ha quattro equilibri di Nash: (SI, SI, SI), (SI, NO, SI), (SI, SI, NO), (SI, NO, NO), il cui esito è (come si vede dalla game form) che l'oggetto viene assegnato al giocatore 1. Come si vede, non si ottiene (in equilibrio di Nash) l'esito che l'oggetto venga assegnato al giocatore 2. Ricordo che la corrispondenza di scelta sociale associa a questo profilo di preferenze l'insieme $\{1, 2\}$ Quindi la game form usata per l'esempio 8 non funziona, poiché per il profilo in cui questi giocatori "privilegiati" siano 1 e 2 non c'è alcun equilibrio in cui il giocatore 2 ottiene l'oggetto.

La seguente game form implementa invece questa regola di scelta. Ogni giocatore annuncia un nome di un giocatore ed un numero. Se $n-1$ giocatori annunciano lo stesso nome, ad esempio i, allora i ottiene l'oggetto a meno che egli non "nomini" un altro giocatore, ad esempio j, nel qual caso j ottiene l'oggetto. In ogni altro caso il giocatore che menziona il numero più grande ottiene l'oggetto. ▲

3.3 Condizioni necessarie di $\mathcal{N}$-implementabilità

Vediamo una condizione chiave per l'analisi della implementazione in equilibrio di Nash.

Definizione 3 (Definition 186.1 di O-R) *Una corrispondenza di scelta sociale* $f : \mathcal{R} \rightrightarrows E$ *è* ***monotona secondo Maskin*** *se, ogniqualvolta* $c \in f(\sqsupseteq)$ *e* $c \notin f(\sqsupseteq')$*, c'è un giocatore* $i \in N$ *ed un esito* $b \in E$ *t.c.* $c \sqsupseteq_i b$ *e* $b \sqsupset'_i c$[16].

Cioè, affinché un esito c venga scelta da una funzione di scelta sociale monotona nel senso di Maskin quando il profilo di preferenze è $\sqsupseteq$, ma non sia scelta quando è $\sqsupseteq'$, la posizione di c rispetto a qualche altra alternativa deve essere peggiore per $\sqsupseteq'$ che per $\sqsupseteq$, per almeno un individuo.

Un esempio di f soddisfacente la condizione di monotonia di Maskin è quella che selezione l'insieme degli esiti debolmente efficienti nel senso di Pareto: $f(\sqsupseteq) = \{c \in E : \text{ non esiste } b \in E \text{ t.c. } b \sqsupset_i c \quad \forall i \in N\}$. Un altro esempio è la regola f per cui $f(\sqsupseteq)$ è costituito da tutti gli esiti che risultano essere l'esito favorito di almeno un giocatore: $f(\sqsupseteq) = \{c \in E : \text{ esiste } i \in N \text{ t.c. } c \sqsupseteq_i b \quad \forall b \in E\}$.

Proposizione 1 (Proposition 186.2 di O-R) *Sia* $(N, E, \mathcal{R}, \mathcal{G})$ *un "environment" (traducibile forse come "contesto" o "ambiente") nel quale* $\mathcal{G}$ *è l'insieme delle game form in forma strategica. Se una funzione di scelta sociale è Nash-implementabile allora è monotona nel senso di Maskin.*

Dimostrazione Supponiamo che la corrispondenza di scelta sociale $f : \mathcal{R} \rightrightarrows E$ sia implementata in equilibrio di Nash da una game form $G = (N, (X_i), h), c \in f(\sqsupseteq)$, e $c \notin f(\sqsupseteq')$. Allora esiste un profilo di strategie x, per il quale $h(x) = c$, che è un equilibrio di Nash del gioco $(G, \sqsupseteq)$ ma non di $(G, \sqsupseteq')$. Cioè, c'è un giocatore j ed una strategia $x'_j \in X_j$ t.c. $h(x_{-j}, x'_j) \sqsupset'_j h(x)$ e $h(x) \sqsupseteq_j h(x_{-j}, x'_j)$. Quindi f è monotona (nel senso di Maskin). ■

[Chi fosse interessato a condizioni *sufficienti* di implementabilità è rinviato ad Osborne e Rubinstein].

---

[16] Insomma, se c non viene più scelto, ci deve essere almeno una alternativa b ed un giocatore che prima preferiva c a b (od era indifferente) mentre ora preferisce strettamente b a c.

3.4 L'esempio di Re Salomone

Esempio 10 [Example 186.3, (*Solomon's predicament*), di O-R] La storia biblica del giudizio di Re Salomone illustra alcune delle idee principali della teoria dell'implementazione. Ciascuna di due donne, 1 e 2, reclama un bimbo; ognuna di loro sa[17] chi è la vera madre, ma nessuna è in grado di provare di essere la madre. Salomone cerca di capire quale sia la verità minacciando di dividere il bambino in due, confidando sul fatto che la madre falsa preferisca questo esito a quello in cui la vera madre ottiene il bimbo, mentre la vera madre preferisce dar via il bimbo anziché vederlo tagliato in due. Salomone può dare il bimbo a una delle due donne od ordinarne la divisione in due.

Formalmente, sia a l'esito in cui il bimbo è dato alla donna 1, b quello in cui il bimbo è dato alla donna 2, e d quello in cui il bimbo è diviso in due.

Vi sono due possibili profili di preferenze (cioè $\mathcal{R} = \{\theta', \theta''\}$):

$$\begin{array}{l} \theta' \text{ (1 è la vera madre): } a \sqsupset'_1 b \sqsupset'_1 d \;\text{ e }\; b \sqsupset'_2 d \sqsupset'_2 a \\ \theta'' \text{ (2 è la vera madre): } a \sqsupset''_1 d \sqsupset''_1 b \;\text{ e }\; b \sqsupset''_2 a \sqsupset''_2 d. \end{array}$$

Nonostante la cosiddetta saggezza di Re Salomone, la regola f definita da $f(\theta') = \{a\}$ e $f(\theta'') = \{b\}$ non è implementabile in equilibrio di Nash, poiché non è monotona: $a \in f(\theta')$ e $a \notin f(\theta'')$, ma non c'è nessun esito y e nessun giocatore $i \in N$ t.c. $a \sqsupseteq_i y$ e $y \sqsupset'_i a$. (Nella storia biblica Salomone riesce ad assegnare il bimbo alla vera madre: lo dà alla sola donna che dichiara di vederlo assegnato all'altra donna piuttosto che sia diviso in due. Come dicono O-R: "Probabilmente le donne non percepirono le istruzioni di Re Salomone come una game form in forma strategica". Di certo la non-madre non è stata abbastanza "sveglia"). ▲

3.5 Esempi di game form

Proviamo a "toccare con mano" che alcune game form in forma strategica non danno il risultato desiderato.

[17] Si noti l'importanza di questa osservazione: è ragionevole assumere che per i due individui coinvolti (le due donne) le loro preferenze siano conoscenza comune. Quindi è appropriato pensare di modellizzare la situazione come gioco ad informazione *completa*. Naturalmente, d'altro lato, Re Salomone non conosce le preferenze (sennò dedurrebbe immediatamente chi è la vera madre). Meno rilevante per quello che stiamo facendo è l'aspetto di non *verificabilità* "davanti al giudice" di chi sia la vera madre: ma certo, se esistesse questo sistema (dall'analisi del DNA, a quei tempi non disponibile, alla testimonianza di ostetriche o di conoscenti), Re Salomone potrebbe usarlo per conoscere chi sia la vera madre. Ottenendo quindi una soluzione al suo problema che sfugge a questo tipo di analisi. In generale, sarà appropriato assumere che l'informazione a disposizione del "pianificatore" tenga già conto di tutto ciò cui si può giungere utilizzando meccanismi "altri".

Per comodità di rappresentazione, utilizzerò nei giochi le seguenti funzioni di utilità per rappresentare le preferenze:
1 è la vera madre, cioè: $a \sqsupset_1' b \sqsupset_1' d$ e $b \sqsupset_2' d \sqsupset_2' a$. In questo caso uso le seguenti funzioni di utilità: per la donna 1, $u_1'(a) = 2$, $u_1'(b) = 1$, $u_1'(d) = 0$; per la donna 2, $u_2'(a) = 0$, $u_2'(b) = 2$, $u_2'(d) = 1$. Il che fa sì che ai tre esiti possibili siano associati i seguenti profili di payoff: $a \mapsto (2, 0)$, $b \mapsto (1, 2)$, $d \mapsto (0, 1)$.
2 è la vera madre, cioè: $a \sqsupset_1'' d \sqsupset_1'' b$ e $b \sqsupset_2'' a \sqsupset_2'' d$. Per questo secondo caso uso le funzioni di utilità: per la donna 1, $u_1''(a) = 2$, $u_1''(b) = 0$, $u_1''(d) = 1$; per la donna 2, $u_2''(a) = 1$, $u_2''(b) = 2$, $u_2''(d) = 0$. Il che fa sì che ai tre esiti possibili siano associati i seguenti profili di payoff: $a \mapsto (2, 1)$, $b \mapsto (0, 2)$, $d \mapsto (1, 0)$.

Proviamo a vedere sei esempi. Nelle game form che considererò, indico con X ed Y gli spazi delle strategie rispettivamente per la donna 1 e la donna 2; con x_i ed y_j indico il generico elemento di questi insiemi.

La prima "game form" è piuttosto drastica...

$1 \backslash 2$	y_1
x_1	a

Cioè, il bimbo viene assegnato d'imperio alla signora 1. Non c'è bisogno di scrivere i giochi per capire che questi giochi avranno sempre e comunque un unico equilibrio di Nash, cui *corrisponde* l'esito che assegna il bimbo alla signora 1, sia quando lei è la vera madre che quando non lo è. Scrivo comunque, per curiosità, i due giochi risultanti (a sinistra, quando 1 è la vera madre, a destra il caso in cui la vera madre è 2).

$1 \backslash 2$	y_1
x_1	$2, 0$

$1 \backslash 2$	y_1
x_1	$2, 1$

Un secondo esempio, anch'esso piuttosto drastico, consiste nel dare tutto il potere ad uno dei due giocatori. Ovvero, la game form è, ad esempio, la seguente (tutto il potere al giocatore 2):

1 \ 2	y_1	y_2	y_3
x_1	a	b	d

Naturalmente i due giochi che otteniamo sono alquanto banali, anche in questo caso:

1 \ 2	y_1	y_2	y_3
x_1	$2, 0$	$1, 2$	$0, 1$

1 \ 2	y_1	y_2	y_3
x_1	$2, 1$	$0, 2$	$1, 0$

Come si vede, il decisore 2 in entrambi i casi sceglierà l'opzione y_2, in quanto gli permette di ottenere l'esito che preferisce. Si noti che il risultato è che, in entrambi i casi, il bimbo viene assegnato alla donna 2. Non va bene.

Un altro esempio, che non vedo in dettaglio, è una variante del secondo. Nel senso che si può pensare di dare solo ad un individuo il potere decisionale, ma non *tutto*. Per esempio, Re Salomone potrebbe pensare di togliere di mezzo l'opzione d. Ma va da sé che non serve a niente. Nel caso appena visto, 2 mica sceglieva d! Chi ne ha voglia, può anche provare a giocherellare con i vari sottoinsiemi di $\{a, b, d\}$, ma ovviamente non ne verrà fuori niente. Può valere la pena, oltre che giocherellare con questi esempi, chiedersi *perché* questi metodi, che danno tutto il potere ad un giocatore, non funzionano. In particolare, quali sono le caratteristiche di f che non rendono praticabile questa strada che passa attraverso la creazione di un dittatore (un "capoclasse"...).

Quarto esempio. Vediamo un'altra game form ($G = (N, X, Y, h)$, con $N = \{1, 2\}$, $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$ ed h descritta nella tabella qui sotto):

1 \ 2	y_1	y_2
x_1	a	d
x_2	d	b

Vediamo che giochi otteniamo. Anche qui, a sinistra c'è il caso in cui 1 è la vera madre.

$1 \backslash 2$	y_1	y_2
x_1	$2,0$	$0,1$
x_2	$0,1$	$1,2$

$1 \backslash 2$	y_1	y_2
x_1	$2,1$	$1,0$
x_2	$1,0$	$0,2$

Come si può agevolmente verificare, se la vera madre è 1, abbiamo che l'equilibrio è (x_2, y_2), quindi il risultato è b, quindi il bimbo è assegnato a 2. Non va bene!

Vediamo un quinto esempio:

$1 \backslash 2$	y_1	y_2	y_3
x_1	a	b	d
x_2	b	d	a
x_3	d	a	b

Di nuovo, vediamo che giochi otteniamo. Il caso in cui 1 è la vera madre è sempre quello a sinistra.

$1 \backslash 2$	y_1	y_2	y_3
x_1	$2,0$	$1,2$	$0,1$
x_2	$1,2$	$0,1$	$2,0$
x_3	$0,1$	$2,0$	$1,2$

$1 \backslash 2$	y_1	y_2	y_3
x_1	$2,1$	$0,2$	$1,0$
x_2	$0,2$	$1,0$	$2,1$
x_3	$1,0$	$2,1$	$0,2$

Nessuno di questi due giochi ha equilibrio di Nash (in strategie pure, s'intende!). Quindi, questo ultimo meccanismo addirittura non produce nessun esito, quindi tanto meno l'esito voluto.

L'ultimo esempio che propongo cerca di usare una forma strategica "abbastanza vicina" ad una possibile interpretazione della storiella biblica. Le strategie sono le seguenti (per il giocatore 1; per 2 sono le "gemelle"):

x_1 = mio
x_2 = suo
x_3 = mio, ma se anche l'altra lo reclama, datelo a lei

La "game form" è:

$1 \backslash 2$	y_1	y_2	y_3
x_1	d	a	a
x_2	b	d	b
x_3	b	a	d

Otteniamo i due giochi seguenti. Il caso in cui 1 è la vera madre è sempre quello a sinistra.

$1 \backslash 2$	y_1	y_2	y_3
x_1	$0, 1$	$2, 0$	$2, 0$
x_2	$1, 2$	$0, 1$	$1, 2$
x_3	$1, 2$	$2, 0$	$0, 1$

$1 \backslash 2$	y_1	y_2	y_3
x_1	$1, 0$	$2, 1$	$2, 1$
x_2	$0, 2$	$1, 0$	$0, 2$
x_3	$0, 2$	$2, 1$	$1, 0$

Si vede che il gioco di sinistra ha due equilibri di Nash: (x_2, y_1) e (x_3, y_1), che danno entrambi lo stesso esito, ovvero b. Quello di destra ha come equilibri (x_1, y_2) e (x_1, y_3), che danno entrambi lo stesso esito, stavolta a. Quindi riusciamo ad implementare una choice rule. Peccato che sia la choice rule la quale assegna il bimbo alla donna che *non* è la vera madre!

Alcune considerazioni sull'esempio. Ho cercato di usare strategie che "avessero un significato". Ma questo può essere fuorviante! Nella teoria che abbiamo visto, non ha nessuna importanza che le strategie (gli elementi degli insiemi X_i, che qui per noi sono X ed Y) abbiano un "senso". L'unica cosa che importa è che siano distinguibili tra loro per i giocatori! Quindi vanno benissimo stringhe di caratteri prive di senso. Oppure usare gli asettici x_1, x_2, etc., come facevamo prima.

Altro commento, sempre su questo punto. L'uso di strategie che hanno un "significato" porta a richiedere che il Re Salomone usi una regoletta "significativa" per realizzare la game form, ovvero la mappa h da $X \times Y$ in E.

Possiamo farlo, volendo. Ma è “fuori tema”!. Comunque, come possiamo farlo? Ad esempio, pensando che le due donne scrivano su un pezzo di carta la loro scelta. Dopo di che Salomone guarderà i fogli e determinerà l'esito secondo la seguente regola: se una dice “mio” o “mio, ma se anche l'altra lo reclama, datelo a lei” e l'altra dice “suo”, il bimbo va a quella che ha scritto “mio”; se entrambe scrivono la stessa identica cosa sul foglio, il bimbo sarà diviso; se una scrive “mio” e l'altra invece “mio, ma se anche l'altra lo reclama, datelo a lei”, che il figlio sia dato a quest'ultima. Bene, abbiamo espresso in termini più comprensibili ad un giurista medio la regola, ma ribadisco che ciò è irrilevante. Quello che conta è la game form. Che la rappresentiamo come piace agli economisti con una matrice o con una storia come piace ai giuristi è irrilevante[18]! Ma, soprattutto, è irrilevante il significato “letterale” delle stringhe di caratteri che vengono usate per descrivere le strategie a disposizione dei giocatori.

Altra considerazione: in questo esempio l'esito che emerge in equilibrio è esattamente l'opposto di ciò che Re Salomone desidera. Ma allora non basterebbe che lui comunicasse alle due donne che usa questa game form e, dopo, semplicemente fa esattamente l'opposto del risultato che è emerso dal gioco? Nel nostro modello, la risposta è chiaramente “NO”. Quando si dice che la game form è quella data, si intende che l'esito determinato dalle scelte delle strategie (indicato dal simbolo che mettiamo nella casella della matrice che descrive la game form) sia quello vero, finale.

Una curiosità. La regola che assegna il bimbo alla donna sbagliata è, come abbiamo appena visto, implementabile. Tale regola è monotona nel senso di Maskin. Se chiamiamo $\hat{f}$ questa regola, abbiamo che $b \in \hat{f}(\theta')$, mentre $b \notin \hat{f}(\theta'')$. Prendiamo il giocatore 1 e l'esito d. E' $b \sqsupseteq_1' d$, mentre $d \sqsupseteq_1'' d$. Ovviamente una condizione analoga è soddisfatta anche per il caso simmetrico che riguarda l'esito a. La monotonia secondo Maskin non è condizione sufficiente per l'implementazione, ma in ogni caso abbiamo visto come sia possibile implementare $\hat{f}$.

Osservazione finale: perché Re Salomone non lancia una monetina per decidere? Si noti che è un metodo “fair”, per lo meno ex-ante. E, visto che non ha modo di fare meglio, potrebbe essere opportuno seguire questa strada (la sua prevedeva comunque che un possibile esito fosse d). E' proponibile questo metodo? Perché? E, se non vi sembra accettabile, perché?

[18]Nel nostro mondo, s'intende. Perché sennò non si capirebbe perché abbiano dato il Nobel a Schelling, con i suoi focal points.

3.6 Ulteriori considerazioni sul caso di Re Salomone

Potremmo, per curiosità, cercare di vedere come siano fatti meccanismi diretti, in questo caso ragionevolmente semplice. Cominciamo con l'osservare che i profili di preferenze possibili sono solo due. Allora il meccanismo diretto è molto semplice da descrivere:

$1 \backslash 2$	θ'	θ''
θ'	e_1	e_2
θ''	e_4	e_3

Naturalmente i profili indicati non sono i profili dei giocatori, ma rappresentano le loro *dichiarazioni*. Se fosse possibile una "truthful implementation", si avrebbe che "dire la verità" sarebbe un equilibrio di Nash che ha come esito quello desiderato da Re Salomone. Si tratta di vedere se è possibile scegliere in qualche modo gli esiti $e_i \in a, b, d$ in modo da poter ottenere questo risultato.

Proviamo dapprima con questa game form (meccanismo diretto):

$1 \backslash 2$	θ'	θ''
θ'	a	d
θ''	d	b

Come dovrebbe essere evidente, corrisponde al caso in cui *se* le due donne fossero sincere si implementerebbe quanto voluto da Re Salomone. Vediamo che giochi otteniamo (a sinistra c'è il caso in cui 1 è la vera madre).

$1 \backslash 2$	θ'	θ''
θ'	$2, 0$	$0, 1$
θ''	$0, 1$	$1, 2$

$1 \backslash 2$	θ'	θ''
θ'	$2, 1$	$1, 0$
θ''	$1, 0$	$0, 2$

Toh, riotteniamo i giochi che avevamo nel quarto caso della precedente sottosezione: vedi pagina 23. Ovvio!! Le due game form sono le stesse (se si prescinde dal fatto che le strategie dei giocatori sono identificate con nomi diversi: più "significanti" qui, del tutto anodini nella sottosezione precedente: ricordo quanto detto a pagina 25).

Comunque sia, non otteniamo il risultato voluto.

Ora, le opzioni possibili che abbiamo a disposizione sono $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$. Tante quanti sono i modi diversi di scegliere gli esiti e_i dall'insieme $\{a, b, d\}$.

Che non si possa ottenere la truthful implementation della regola di Re Salomone mediante un meccanismo diretto è provato in un file Excel, `re_Salomone.xls`, che mostra questo fatto con la forza bruta, descrivendo cosa avviene in tutte le 81 game form possibili.

3.6.1 E mettere all'asta questo bambino, no?

Non siamo "obbligati" a provare ad implementare la regola di scelta sociale di e Salomone usando una game form in forma strategica. Abbiamo fatto questo perché l'esempio voleva essere una illustrazione del tema che era stato discusso a livello teorico. Nulla ci vieta di proporre game form in forma estesa.

Non solo: nello indicare una game form abbiamo messo il requisito che sia "a valori in E". Ora, se la social choice rule è a valori in E, questa scelta può sembrare naturale. Eppure, chi si occupa di teoria dei giochi sa bene che l'esito di un gioco (quello ottenuto, ad esempio, in corrispondenza di un equilibrio di Nash) può dipendere da altri esiti che pure non sono mai ottenuti in equilibrio. A dire il vero, non c'è neanche bisogno di essere esperti di teoria dei giochi per sapere che le minacce migliori sono quelle che restano tali, ovvero che non vengono messe in pratica. Comunque, ci sono esempi molto semplici in cui si può notare questo fatto. Rinvio agli appunti sui "prestiti" (ovvero, sul "gioco della fiducia") che si trovano qui `http://dri.diptem.unige.it/altro_materiale/implementazione_legge_sui_prestiti.pdf`, per un esempio in cui è sufficiente rimpiazzare un esito con un altro per ottenere un diverso equilibrio e quindi un esito diverso. In sintesi, dato un insieme di esiti $E = \{a, b, c\}$, si sostituisce c con d (o, a seconda del modello usato, si aggiunge un nuovo esito d): ciò che si ottiene è che l'esito di equilibrio da b diventa a (cosa che, nel gioco in questione, è preferibile).

Anche nel caso di Re Salomone si possono sfruttare queste due considerazioni. In effetti, ricorrendo ad un gioco in forma estesa (e usando, come è abbastanza naturale, lo "equilibrio perfetto nei sottogiochi" come tipo di soluzione) e ad un asta, si ottiene il risultato di poter assegnare il bimbo alla vera madre. La cosa carina è che, se si parla di un'asta, ciò fa presumere che siano coinvolti dei pagamenti: questo è vero, ma in equilibrio non sarà richiesto nessun pagamento.

Per chi fosse interessato, i dettagli si trovano a pag. 29-31 del n. 60 di *Lettera Matematica PRISTEM* o, più direttamente, qui: Re Salomone doveva mettere all'asta il bambino!

4 Bibliografia

Una piccola bibliografia, "micro-commentata". Contiene anche riferimenti alla teoria delle aste (che sono meccanismi ben noti!!!)

Akerlof, George (1970): *The market for Lemons: Qualitative Uncertainty and the Market Mechanism*, Quarterly Journal of Economics, **84**, 488-500.
Si analizzano le distorsioni che l'informazione asimmetrica genera sul mercato.

Arrow, Kenneth J. (1951): *Social Choice and Individual Values*, Wiley, New York; seconda edizione, con importanti correzioni: 1963. Scaricabile da: `http://cowles.econ.yale.edu/P/cm/cfmmain.htm`. Suggerisco di farlo con la versione del 1963.
Il teorema del dittatore. È la *Cowles Commission Foundation Monograph* n. 12.
C'è una traduzione italiana (Etas Kompass, 2003).

Arrow, Kenneth J., Amartya K. Sen e Kotaro Suzumura (curatori) (2002): *Handbook of Social Choice and Welfare*, vol. 1, North Holland.

Binmore, Ken (1992): *Fun and games*, Health, Lexington.
Vedasi il cap. 11 per le aste.

Black, Duncan (1958): *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge University Press.
Interessante anche per l'analisi storica.

Blin, Jean-Marie e Mark A. Satterthwaite (1978): *Individual Decision and Group Decisions: The Fundamental Differences*, Journal of Public Economics, **10**, 247-267.
Interessante discussione della relazione tra il teorema di impossibilità di Arrow e la manipolabilità degli schemi di votazione.

Borda, Jean-Charles de (1781): *Mémoire sur les elections au scrutin*, Mémoire de l'Académie Royale des Sciences.
Traduzione in inglese in Isis, **44**, 1953. Segna, assieme a Condorcet, l'inizio della teoria delle votazioni nei comitati.

Clarke, Edward H. (1971): *Multipart pricing of Public Goods*, Public Choice, **8**, 19-33.

Meccanismo di Clarke e Groves (o VCG, dove V sta per Vickrey). Vedasi anche questa lettera di Tideman, pubblicata sul blog di Clarke: `http://ed-clarke.blogspot.com/2007_10_01_archive.html`.
E magari anche questo: `http://orforum.blog.informs.org/2007/04/17/thirteen-reasons/`.

Condorcet, Marie-Jean-Antoine-Nicolas de Caritat, marquis de (1785): *Essai sur l'application de l'analyse á la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Parigi.
Segna, assieme a Borda, l'inizio della teoria delle votazioni nei comitati.

Crawford, Vincent e Joel Sobel (1982): *Strategic information transmission*, Econometrica, **50**, 1431-1452.
Un lavoro importante che affronta il problema di come trasmettere in modo "strategico" l'informazione che si ha.

Dasgupta, Partha, Peter Hammond e Eric Maskin (1979): *The implementation of social choice rules: some general results on incentive compatibility*, Review of Economic Studies, **46**, 185-216.
Un classico per i problemi di implementazione.

D'Aspremont, Claude e Louis-André Gérard-Varet (1979): *Incentives and Incomplete Information*, Journal of Public Economics, **11**, 25-45.
Schema sui rapporti tra problemi di incentivi e la struttura dell'informazione a disposizione dei vari agenti coinvolti.

Farquharson, Robert (1969): *Theory of Voting*, Yale University Press.
Per la prima volta il problema di votazione viene visto come gioco.

Feldman, Allan M. e Roberto Serrano (2006): *Welfare Economics and Social Choice Theory*, 2nd Edition, Birkhäuser, New York, 2006.

Fundenberg, Drew e Jean Tirole (1991): *Game Theory*, MIT Press, Cambridge (MA).
Vedasi il cap. 7 per i meccanismi bayesiani.

Gibbard, Alan (1973): *Manipulation of voting schemes*, Econometrica, **41**, 587-601.
Viene introdotto il revelation principle.

Glazer, Jacob e Ching-to Albert Ma (1989): *Efficient Allocation of a 'Prize'*

- *King Solomon's Dilemma*, Games and Economic Behavior, **1**, 222-223.
L'esempio (re Salomone) citato da Osborne e Rubinstein a proposito di implementazione in equilibri di Nash.

Green, Jerry e Jean-Jacques Laffont (1979): *Incentives in Public Decision Making*, North Holland, Amsterdam.
Il titolo dovrebbe essere abbastanza chiaro, no?

Groves, Theodore (1973): *Incentives in Teams*, Econometrica, **41**, 617-631.
Meccanismo di Clarke e Groves (o VCG, dove V sta per Vickrey). Vedasi anche questa lettera di Tideman, pubblicata sul blog di Clarke: `http://ed-clarke.blogspot.com/2007_10_01_archive.html`.
E magari anche questo: `http://orforum.blog.informs.org/2007/04/17/thirteen-reasons/`.

Haake, Claus-Jochen (1998): *Implementation of the Kalai-Smorodinsky Bargaining Solution in Dominant Strategies*, preprint, Institute of Mathematical Economics, University of Bielefeld, Germania.
Applicazione della implementazione in Nash, che segue "fedelmente" l'impostazione di Osborne e Rubinstein.

Hart, Oliver (1983): *Optimal Labour Contracts Under Asymmetric Information: An Introduction*, Review of Economic Studies, **50**, 3-35
Contratti con asimmetria di informazione. Un meccanismo che li implementa è il contratto di autorità alla Simon (vedi).

Harsanyi, John C. e Reinhard Selten (1972): *A Generalized Nash Solution for two-person bargaining games with incomplete information*, Management Science, **18**, 80-106.
La soluzione per bargaining ad informazione incompleta su cui si fonda l'articolo di Myerson del 1979.

Kalai, Ehud e Meir Smorodinsky (1975): *Other Solutions to Nash's Bargaining Problem*, Econometrica, **43**, 513-518.
Dopo 25 anni, nuove idee nell'approccio assiomatico al problema della contrattazione. Un assioma diverso ("monotonia") porta a una soluzione diversa da quella di Nash. Qui è riportato come riferimento per capire il lavoro di Haake.

Laffont, Jean-Jacques e Eric Maskin (1982): *The Theory of Incentives: an Overview*, in "Advances in Economic Theory", (curatore: Werner Hilden-

brand), Cambridge University Press, Cambridge.
Un survey.

Maskin, Eric (1999): *Nash Equilibrium and Welfare Optimality*, Review of Economic Studies, **66**, 23-38.
Da "Nash implementation", Cap. 15 del citato: Welfare Economics and Social Choice Theory: *This is Maskin's classic paper, which contains his theorem. The first version of this important article circulated as an MIT working paper in 1977. Evidently, Maskin had some difficulties implementing its publication. Publishing in economics sometimes is associated with interesting funny stories, like this.*

Maskin, Eric (1985): *Theory of Implementation in Nash equilibria*, in "Social Goals and Social Organization", (curatori: Leonid Hurwicz, David Schmeidler e Hugo Sonnenschein), Cambridge University Press, Cambridge, 173-204.
Riferimento eccellente per la implementazione in Nash.

May, Kenneth O. (1952): *A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decisions*, Econometrica, **20**, 680–684.

Mc Afee, Randolph Preston e John McMillan (1987): *Auctions and Bidding*, Journal of Economic Literature, **25**, 699-738.
Lavoro di rassegna, suggerito da Mori.

Milgrom, Paul R. (1989): *Auctions and bidding: A primer*, Journal of Economic Perspectives, **3**, 3-22.
Lavoro di rassegna, "particolarmente consigliato" da Mori.

Milgrom, Paul R. (1985): *The Economics of Competitive Bidding: A Selective Survey*, in: "Social Goals and Social Organization", (curatori: Leonid Hurwicz, David Schmeidler e Hugo Sonnenschein), Cambridge University Press, Cambridge, 262- 289.
Lavoro di rassegna, "particolarmente consigliato" da Mori.

Milgrom, Paul R. (1987): *Auction Theory*, in: "Advances in Economic Theory", (curatore: Truman Bewley), Cambridge University Press, Cambridge.
Lavoro di rassegna, suggerito da Mori.

Milgrom, Paul R. e Robert J. Weber (1982): *A Theory of Auctions and Competitive Bidding*, Econometrica, **50**, 1089-11223. `http://www.cs.princeton.edu/courses/archive/spr09/cos444/papers/milgrom_weber82.pdf`

Suggerito da Mori come articolo fondamentale. Modello generale di aste comprendente quelle a valori privati indipendenti, a valori comuni e miste.

Moore, John (1992): *Implementation, Contracts and Renegotiation in Environments with Complete Information*, in: "Advances in Economic Theory" (curatore: Jean-Jacques Laffont), VI World Congress of the Econometric Society (vol. I), Cambridge University Press.
Da "Nash implementation", Cap. 15 del citato: Welfare Economics and Social Choice Theory: *This is an excellent survey on implementation theory under complete information. It is divided into two parts, and the first is less technical. Its coverage of the King Solomon problem is delightful.* Ma la sorgente dell'esempio e' di Glazer e Ma.

Mori, Pier Angelo, e Fioravante Patrone (1992): *Partial Employer Authority as Optimal Labor Contract*, manoscritto.
Meccanismi nei contratti di lavoro. Mai pubblicato...

Myerson, Roger B. (1979): *Incentive Compatibility and the Bargaining Problem*, Econometrica, **47**, 61-73.
Cosa si può ottenere nella contrattazione in caso di informazione incompleta. Vedasi anche Harsanyi e Selten.

Myerson, Roger B. (1981): *Optimal Auction Design*, Mathematics of Operations Research, **6**, 58-73.
Lavoro fondamentale sulle aste a valori privati indipendenti.

Myerson, Roger B. (1991): *Game theory: Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Cambridge (MA).
Vedasi in particolare il cap. 6 (usato per giochi con contratti ed equilibri correlati) e cap 10.

Osborne, Martin, e Ariel Rubinstein (1994): *A Course in Game Theory*, MIT Press, Cambridge. (MA).
Queste note sono basate essenzialmente sul cap. 10 di questo libro; vedasi però anche Maskin (1985).

Rasmusen, Eric (1989): *Games and Information*, Basil Blackwell, Oxford.
C'è il capitolo 11 che è dedicato alle aste. Traduzione italiana: "Teoria dei giochi ed informazione", Hoepli, Milano, 1993.

Rawls, John (1971): *A Theory of Justice*, Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge (MA-USA), (revised edition: 1999). Traduzione italiana: "Una teoria della giustizia", Feltrinelli, Milano, 1982.

Riley, John G. e William F. Samuelson (1981): *Optimal Auctions*, American Economic Review, **71**, 381-392. `http://www.cs.princeton.edu/courses/archive/spr09/cos444/papers/riley_samuelson81.pdf`
Suggerito da Mori come articolo fondamentale per le aste (aste a valori privati indipendenti).

Satterthwaite, Mark A.(1975): *Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions*, J. Econ. Theory, **10**, 187-217.
Il teorema cosiddetto di Gibbard-Satterthwaite.

Sen, Amartya (2008): *Social choice*, in: "The New Palgrave Dictionary of Economics" (curatori: Steven N. Durlauf e Lawrence E. Blume), 2nd Edition, Palgrave Macmillan, 2008.

Sen, Amartya (1970): *Collective Choice and Social Welfare*, Holden-Day, San Francisco.
Ottimo libro di riferimento per la teoria della scelte sociali.

Serrano, Roberto (2004): *The Theory of Implementation of Social Choice Rules*, SIAM Review, **46**, 377-414.
Buon survey.

Simon, Herbert (1951): *A Formal Model of the Employment Relation*, Econometrica, **19**, 293-305.
Contratti d'autorità.

Vickrey, William (1961): *Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed tenders*, Journal of Finance, **16**, 8- 37.
Il contributo fondamentale di Vickrey sulle aste. In particolare, il "revenue equivalence theorem".

Wilson, Robert (1992): *Strategic Analysis of Auctions*, in: "Handbook of Game Theory", (curatori: Robert J. Aumann e Sergiu Hart), North-Holland, Amsterdam, 228-279. Preprint del 1990.
Lavoro di rassegna, suggerito da Mori.