Collusione in giochi ripetuti

equilibri perfetti nei sottogiochi (SPE)

Appunti a cura di
Fioravante PATRONE
http://www.diptem.unige.it/patrone/default.htm

versione del: 29 marzo 2007

Indice

Queste brevi note vogliono essere una semplice introduzione al problema della collusione in giochi ripetuti, analizzando in particolare se essa possa corrispondere non solo ad equilibri di Nash, ma anche ad equilibri perfetti nei sottogiochi (che indicherò brevemente come SPE, usando l'acronimo inglese. . .).

Fioravante PATRONE	http://www.diptem.unige.it/patrone	homepage
Dipartimento di Ingegneria della	http://tdg.dima.unige.it	web teaching
Produzione, Termoenergetica e	http://www.citg.unige.it/citg.htm	web server "CITG"
Modelli Matematici	http://www.scallywag.it	web page del gruppo
P.le Kennedy - Pad D		Sca$\lambda\lambda$ywag
16129 Genova - ITALY		
patrone@diptem.unige.it	http://www.diptem.unige.it/patrone/DRI.htm	Decisori (razionali) interagenti

1 Collusione in SPE

Nel mio libro, Patrone (2006), è mostrato come il dilemma del prigioniero, ripetuto due volte, abbia molti equilibri di Nash (16), e tuttavia il payoff per ciascuno di questi equilibri è identico al payoff che i giocatori otterrebbero se giocassero ad ogni turno l'equilibrio di Nash del gioco costituente (il che corrisponde all'unico SPE del gioco ripetuto due volte). Queste cose sono direttamente verificabili sulla tabella completa che si trova in rete, nella pagina web associata al libro.

Nel libro si considera un gioco diverso dal dilemma del prigioniero e viene fatto vedere come, per questo gioco finitamente ripetuto, si possano avere equilibri di Nash che danno ai giocatori payoff *diversi* (migliori, in particolare) da quelli che otterrebbero dall'uso delle strategie d'equilibrio ad ogni turno.

Possiamo modificare convenientemente i payoff del gioco proposto nel libro per ottenere un gioco per il quale si ottiene questo interessante risultato già con soli due turni:

$I \backslash II$	L	R	Z
T	$(9,9)$	$(1,10)$	$(0,0)$
B	$(10,1)$	$(2,2)$	$(0,0)$
W	$(0,0)$	$(0,0)$	$(-1,-1)$

L'equilibrio prevede che I giochi T nel primo turno e, nel secondo: B se II ha giocato L, W altrimenti. La strategia per II è la gemella di questa.

Che si tratti di un equilibrio è evidente: se II gioca la sua strategia "componente" dell'equilibrio a I non conviene deviare al secondo turno, visto che II giocherà R e (B,R) è equilibrio del gioco costituente; non conviene deviare neppure al primo turno, visto che otterrebbe un payoff minore o uguale a 10, mentre se non devia ha un payoff di 11[1].

Tuttavia, l'equilibrio non è perfetto nei sottogiochi. In effetti, è impossibile avere un equilibrio perfetto nei sottogiochi che non comporti altro che le scelte d'equilibrio in ogni circostanza, quando si ha a che fare con un gioco costituente il quale ha un solo equilibrio di Nash (come succede in questo

[1]Qui, come nel libro, non sto considerando il fattore di sconto. Se le preferenze di I lo richiedessero, avremmo un payoff pari a $9 + 2\delta$, che resta ancora migliore di 10 purché il fattore di sconto di I non sia troppo basso.

gioco e nel dilemma del prigioniero). Per il dilemma del prigioniero ripetuto due volte questo fatto è evidenziato nella tabella già citata, ma è facile convincersene in generale: nel secondo stadio, la condizione di perfezione nei sottogiochi obbliga i giocatori a "giocare" l'equilibrio del gioco componente. A questo punto, essi non hanno più scampo neanche nel primo stadio, nel quale sono quindi obbligati a giocare le strategie d'equilibrio del gioco "one-shot" (altro modo per indicare il gioco "componente"...).

Se però il gioco costituente avesse due equilibri di Nash, qualche speranza c'è. Senza entrare nei dettagli tecnici di un risultato di carattere generale (per il quale rinvio a manuali classici come Osborne e Rubinstein, per esempio), mi limiterò a far vedere con un esempio cosa si possa ottenere in un gioco ripetuto due volte. Anche in questo caso, facciamo una "piccola" modifica al dilemma del prigioniero. Consideriamo il gioco seguente:

$I \backslash II$	L	C	R
T	$(5,5)$	$(1,6)$	$(0,0)$
M	$(6,1)$	$(2,2)$	$(0,0)$
B	$(0,0)$	$(0,0)$	$(4,4)$

Esso ha due equilibri di Nash, (M,C) e (B,R), uno dei quali domina l'altro. Inoltre, vi è una coppia di payoff, non di equilibrio, che dominano a loro volta entrambi gli equilibri. Possiamo allora ottenere uno SPE il quale (questa è la cosa più interessante) prevede che al primo stadio i giocatori giochino strategie che non non sono d'equilibrio per il gioco costituente; inoltre, questo SPE dà un payoff migliore di quello che otterrebbero se giocassero l'equilibrio "più bello" ad ogni stadio.

L'equilibrio, perfetto nei sottogiochi, è dato da una "trigger strategy", simile a quella già vista nel libro. Vi è tuttavia una *importante differenza* che si rende necessaria per ottenere un equilibrio di Nash *perfetto nei sottogiochi*. La strategia (per I) prevede che I giochi T nel primo turno e, nel secondo: B se anche II ha giocato L, M altrimenti. Attenzione, però: questo "altrimenti" è da intendere nel modo seguente: I giocherà M (la strategia di "punizione") non solo nel caso in cui egli osservi una deviazione da parte di II, ma anche qualora vi sia stata una deviazione da parte di I stesso! Questa precisazione è essenziale per poter provare che si ha uno SPE: ad esempio, ci garantisce che quanto previsto al secondo turno, nel sottogioco che parte dal nodo individuato dalla scelta (M,L) al primo turno, sia un equilibrio (per la precisione, sarà: (M, C)). Costruiremo poi un albero per verificare quanto asserito.

La strategia per II è la gemella di questa.

La coppia di strategie descritta dà ai giocatori un payoff pari a 9, quindi migliore di 8 (che corrisponde a giocare (B, R) in ogni stadio),

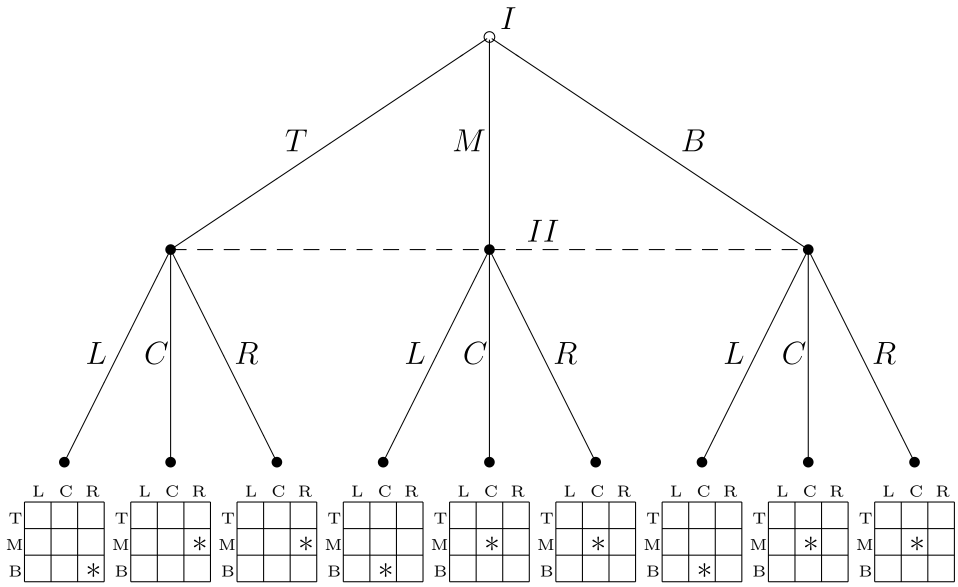
Che sia un SPE lo si verifica agevolmente: nel secondo stadio prevede che i giocatori giochino un equilibrio di Nash e quindi nessun problema. D'altronde, I non ha interesse a deviare al primo turno (naturalmente stiamo assumendo, al solito, che II non devii): se lo facesse, otterrebbe al più 8, meno del payoff che ha se non devia che è 9. Anche questo risultato si estende al caso in cui i payoff siano scontati, purché il fattore di sconto non sia troppo piccolo.

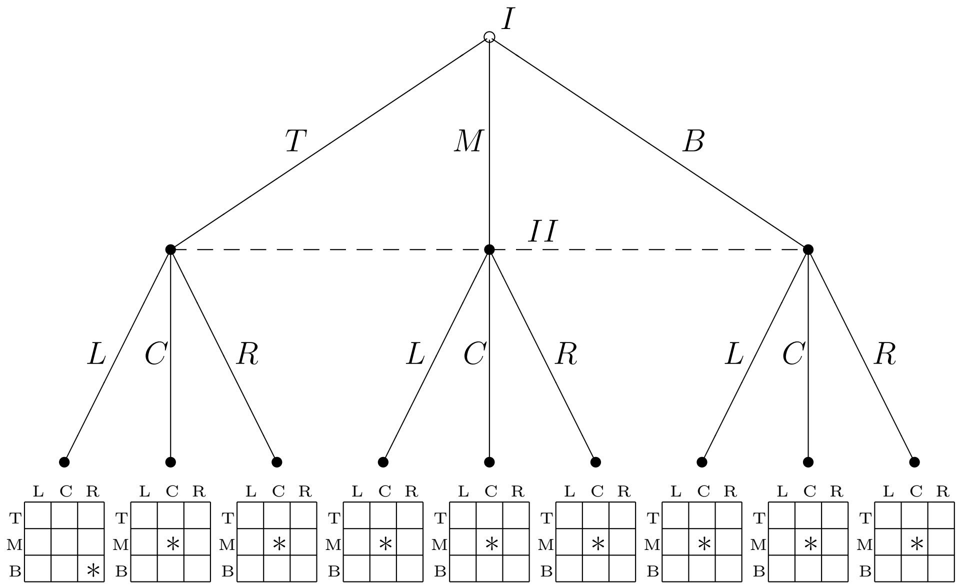
Come si vede, l'idea è abbastanza semplice: avendo un equilibrio di Nash "inferiore", questo può essere usato come "minaccia" credibile (credibile proprio perché associata ad un equilibrio di Nash del gioco costituente e quindi ad un equilibrio di Nash nei sottogiochi che si hanno nel secondo stadio).

Nella pagina seguente vi sono due rappresentazioni "non standard" del gioco a due stadi qui descritto. Per semplificare la rappresentazione, il secondo stadio è indicato con una matrice. Questa matrice ci ricorda che i giocatori al secondo stadio devono giocare (come al primo, d'altronde) il gioco in forma strategica descritto.

In tali tabelle viene usato un asterisco[2] per evidenziare quali sono le scelte dei due giocatori che prevede, in ognuno dei nodi del secondo stadio la "trigger strategy". La prima figura descrive la trigger strategy che era indicata per l'equilibrio di Nash, mentre la seconda riguarda quella che dà luogo allo SPE. Come si può facilmente vedere, in questo caso l'asterisco si trova in una cella corrispondente ad un equilibrio del gioco costituente (cioè, (M, C) o (B, R)). Il che non avviene (in quattro casi) se viene usata la trigger strategy che garantiva solo l'equilibrio di Nash per il gioco ripetuto.

[2]Ringrazio Anna Torre per avermi segnalato che, nella precedente versione, gli asterischi erano messi nel posto sbagliato...


I
T
M
B
II
L
C
R
L
C
R
L
C
R


I
T
M
B
II
L
C
R
L
C
R
L
C
R

Per quanto riguarda i SPE nei giochi infinitamente ripetuti, cominciamo a vedere cosa avviene per il dilemma del prigioniero, ovvero il gioco seguente:

$I \backslash II$	L	R
T	$(3,3)$	$(1,4)$
B	$(4,1)$	$(2,2)$

E' agevole mostrare che le "trigger strategies" (descrivo, al solito, quella per I; per II è la strategia gemella):
- I gioca T nel primo turno
- I continua a giocare T finché non vi sia stata una deviazione (ovvero: II gioca R, o I gioca B). Altrimenti, passa a giocare (per sempre) B

non solo sono un equilibrio di Nash purché il fattore di sconto non sia troppo piccolo[3], ma sono anche un SPE. La differenza rispetto alle trigger strategies descritte nel libro (che ci garantiscono un equilibrio di Nash) è che la "punizione" deve scattare dopo una qualsiasi deviazione, anche da parte del giocatore stesso! Come già avevamo notato, d'altronde, nel caso visto poco sopra di un gioco ripetuto due volte.

Prendiamo infatti un qualunque sottogioco proprio del gioco dato. Se questo sottogioco ha il nodo iniziale sul percorso di equilibrio, è evidente che le trigger strategies danno un equilibrio di Nash per questo sottogioco (per le stesse identiche ragioni e sotto le stesse identiche condizioni, rispetto al fattore di sconto, per cui esse sono equilibrio di Nash per il gioco globale). Se invece il nodo iniziale non è sul percorso di equilibrio, le strategie date prevedono che in *ogni* insieme di informazione di questo gioco i giocatori giochino la loro strategia[4] di equilibrio per il gioco costituente, il che corrisponde a un equilibrio di questo gioco infinitamente ripetuto.

Questo risultato non vale solo per il dilemma del prigioniero, ma si generalizza agevolmente: ogni coppia di strategie che generi una coppia di payoff (nel gioco costituente) la quale domini i payoff di un equilibrio di Nash (sempre nel gioco costituente), induce un SPE che produce tale coppia di payoff ad ogni stadio. Le "trigger strategies" permettono di ottenere questo risultato.

[3]La condizione sul fattore di sconto è che il guadagno ottenuto deviando in un turno, ovvero $(4-3)\delta^n = \delta^n$ se siamo al turno n-esimo, non superi quanto si perde per via della "punizione" successiva, che è pari ad *almeno* $\sum_{k=n+1}^{\infty}(3-2)\delta^k = \sum_{k=n+1}^{\infty}\delta^k = \delta^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k = \frac{\delta^{n+1}}{1-\delta}$. Quindi la condizione è: $\delta^n \leq \frac{\delta^{n+1}}{1-\delta}$, ovvero $1 \leq \frac{\delta}{1-\delta}$, cioè $\delta \geq 1/2$.

[4]Mi permetto di usare il termine, pericoloso, "strategia di equilibrio" in quanto il gioco costituente ha un unico equilibrio di Nash.

Questo fatto vale anche per il duopolio[5] di Cournot. Se il gioco è infinitamente ripetuto, una strategia che preveda di produrre, per ciascuno, la metà della quantità ottima di monopolio può generare un SPE usando la minaccia che, in caso di defezione, si passa a produrre la quantità di equilibrio. Naturalmente ci saranno le solite condizioni sul fattore di sconto. Visto che il fattore di sconto ha a che fare, oltre che con la struttura delle preferenze intertemporali dei giocatori, anche con l'intervallo di tempo che passa fra un turno ed un altro, ci aspettiamo che questa collusione implicita possa essere più facile da sostenere in casi in cui la frequenza di osservazione delle mosse fatte dai giocatori sia più elevata, come sembra essere avvalorato dall'osservazione empirica.

2 Approfondimenti

2.1 Altri payoff, verso l'involucro convesso

La prima osservazione è che le "trigger strategies" non devono necessariamente prevedere che la collusione corrisponda sempre ed unicamente ad una coppia fissata di strategie. Ad esempio, nel gioco:

$I \backslash II$	L	R
T	$(3,3)$	$(1,6)$
B	$(6,1)$	$(2,2)$

ad entrambi i giocatori converrebbe alternare (B,L) e (T,R) anziché giocare sempre (T,L), per lo meno se guardiamo ai payoff del gioco costituente.

Questo non è un problema. Lo stesso tipo di "trigger strategies" funziona, per il gioco infinitamente ripetuto. Chiaramente, la fase collusiva prevede l'alternanza di (B,L) e (T,R). Le verifiche, i calcoli, le condizioni, sono dello stesso tipo.

C'è una cosa di cui però dobbiamo tenere conto: la presenza del tasso di sconto. Allora, i payoff significativi (quelli che intervengono nella serie

[5]Vedasi gli appunti sul duopolio, per i dettagli: `http://www.diptem.unige.it/patrone/decisori_razionali_interagenti/duopolio/Duopolio.pdf`. In sintesi, qui mi riferisco al modello descritto dal gioco (X,Y,f,g) con $X = Y = [0,+\infty[$ e con $f(x,y) = P(x+y)\cdot x - cx$, $g(x,y) = P(x+y)\cdot y - cy$, essendo $P(t) = a - t$ se $0 \le t \le a$ e $P(t) = 0$ se $t > a$. L'equilibrio di Nash è unico ed è dato da $(\bar{x},\bar{y}) = (\frac{a-c}{3}, \frac{a-c}{3})$. Il risultato è però inefficiente per i giocatori, ai quali converrebbe produrre entrambi $\frac{a-c}{4}$, che equivale a spartirsi il profitto di monopolio.

geometrica[6] da usare per trovare i payoff) saranno: $6 + \delta \cdot 1 = 6 + \delta$ per I e $1 + \delta \cdot 6 = 1 + 6\delta$. Ma $6 + \delta > 1 + 6\delta$ se e solo se $\delta < 1$. Quindi, qualunque sia il fattore di sconto, il giocatore I preferirà l'accordo collusivo che prevede di cominciare l'alternanza con (B, L), mentre il secondo preferirebbe cominciare con (T, R) (e lo stesso succede anche se i due giocatori avessero diversi fattori di sconto).

Notiamo ancora che, naturalmente, l'accordo collusivo su (T, L) individua anch'esso un SPE per il gioco ripetuto. Il che mostra come il gioco ripetuto possa avere SPE dei quali l'uno domina l'altro, anche se ci restringiamo alla classe particolare degli equilibri collusivi che sono sostenuto dall'uso di "trigger strategies".

Dovrebbe essere chiaro che l'idea di "alternarsi" può essere generalizzata. Si può mostrare che "grosso modo[7]" tutti i payoff che stanno nell'involucro convesso dei payoff del gioco costituente possono essere ottenuti come payoff di equilibrio per il gioco infinitamente ripetuto, purché tali payoff siano maggiori del payoff di minimax.

2.2 Riconciliazione

Uno potrebbe chiedersi se sia necessaria una simile punizione indefettibile, come abbiamo visto finora e se non sia possibile avere un periodo (sufficientemente lungo) di punizione per poi ritornare alla collaborazione.

Si noti che questo non risponde solo ad una curiosità tecnica sui SPE in giochi infinitamente ripetuti. Corrisponde anche alla verifica se pattern di comportamento che vengono comunemente osservati possano essere "giustificati" dalle assunzioni di razionalità sottostanti l'idea di SPE.

La risposta è positiva. Si tratta solo di fare i necessari calcoli. Calcoli che sono lasciati al lettore...

Osservo solo che interverranno quattro parametri, da regolare opportunamente:
- il guadagno nel caso di defezione
- la perdita dovuta alla punizione
- la lunghezza del periodo di punizione
- il fattore di sconto dei due giocatori

[6] Il payoff per I è $6 + \delta + 6\delta^2 + \delta^3 + \ldots = (6 + \delta)(1 + \delta^2 + \delta^4 + \ldots) = \frac{6+\delta}{1-\delta^2}$. Per II abbiamo: $1 + 6\delta + 1\delta^2 + 6\delta^3 + \ldots = (1 + 6\delta)(1 + \delta^2 + \delta^4 + \ldots) = \frac{1+6\delta}{1-\delta^2}$.

[7] Quanto sia "grosso" questo "grosso modo" dipende dal valore del fattore di sconto per i due giocatori.

2.3 Osservabilità parziale

Un'ultima considerazione. E' possibile avere un SPE in cui si realizzi una qualche forma di collusione nel caso in cui i giocatori non siano in grado di osservare perfettamente le scelte fatte allo stadio precedente?

Naturalmente qui c'è spazio per una gran varietà di modelli, ma per tenere il più basso possibile la complessità descriverò solo un paio di esempi.

Immaginiamo di avere il solito dilemma del prigioniero. I payoff tuttavia non siano deterministici, ma stocastici. Interpretiamo cioè payoff indicati in matrice come valori medi dei payoff[8].

Per fare un esempio, possiamo allora immaginare che i payoff per I siano i seguenti (nelle caselle metto la probabilità che il payoff sia quello indicato nella intestazione delle colonne):

coppie di strategie \ payoff	0	1	2	3	4	5
(T, R)	9/10	1/2	0	0	0	1/10
(B, R)	8/10	0	1/2	0	0	2/10
(T, L)	7/10	0	0	1/2	0	3/10
(B, L)	6/10	0	0	0	1/2	4/10

Oppure, potrebbe essere[9]:

[8] Noto che, nella ipotesi (standard) che i payoff rappresentino valori di funzioni di utilità di von Neumann e Morgenstern, l'uso di valori attesi è del tutto coerente con l'interpretazione.

[9] Questa situazione potrebbe corrispondere ad una "game form" con la seguente struttura: gli esiti del "gioco costituente" sono del tipo (x, y). Dove $x \in \{E_1, E_2\}$, mentre y è un "esito standard" del DP (ad esempio: a se (T, L), b se (T, R), c se (B, L), d se (B, R)). Sarà sufficiente assumere che la "coordinata x" sia E_1 o E_2 con le seguenti probabilità:

coppie di strategie \ payoff	E_1	E_2
(T, R)	4/5	1/5
(B, R)	3/5	2/5
(T, L)	2/5	3/5
(B, L)	1/5	4/5

si tratta poi di assumere che I possa osservare solo la "coordinata" x dell'esito, e II osservi solo la y. E che le funzioni di utilità dei due giocatori assumano i seguenti valori: $u_I(E_1) = 0$, $u_I(E_2) = 5$; $u_{II}(a) = 3$, $u_{II}(b) = 4$, $u_{II}(c) = 1$ e $u_{II}(d) = 2$.

coppie di strategie \ payoff	0	5
(T, R)	4/5	1/5
(B, R)	3/5	2/5
(T, L)	2/5	3/5
(B, L)	1/5	4/5

In questo paio di esempi la differenza di pattern è evidente. Nel primo caso c'è qualche chance di poter dedurre dal payoff la strategia adottata dai giocatori, in quanto alcuni payoff possono derivare solo da particolari coppie di strategie.

Vediamo molto rapidamente cosa si possa fare nel secondo caso (che sembra essere il meno facile da trattare).

Anche qui si può usare una trigger strategy. Il giocatore I gioca T fintantoché il payoff medio osservato è maggiore o uguale ad α ($\alpha = 2.5$, ad esempio). Se scende sotto, passa a giocare B per k stadi, dopo di che ritorna a giocare T.

Questo tipo di strategie (trigger strategy a soglia) può dare luogo ad un equilibrio nel gioco ripetuto, purché i soliti parametri siano convenientemente aggiustati. L'interessante osservazione da fare in questo caso è che c'è una *tensione* fra il potere di deterrenza (ovvero, la facilità con cui scatta la punizione) e l'efficienza del risultato (per il quale sarebbe opportuno che la punizione scattasse il meno possibile).

Chi fosse interessato a qualche dettaglio in più, può utilmente consultare Dutta (1999). In particolare, il capitolo 15.

3 Bibliografia

Dutta, Prajit K.: *Strategies and Games - Theory and Practice*, MIT Press, Cambridge (MA, USA), 1999

Myerson, Roger B.: Game Theory: Analysis of Conflict, Harvard University Press, Cambridge (MA, USA), 1991.

Osborne, Martin e Ariel Rubinstein: *A course in Game Theory*, MIT Press, Cambridge (MA, USA), 1994.

Patrone, Fioravante: *Decisori (razionali) interagenti*, Edizioni PLUS, Pisa, 2006.