Giochi cooperativi

Appunti a cura di

Giulio FERRARI e Marco MARGIOCCO

Ciclo di seminari tenuto presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova, nell'ambito del SEMINARIO DI TEORIA DEI GIOCHI - A.A. 1997/98, dal 10 novembre 1997 al 19 gennaio 1998.

Disponibili sul sito: `http://dri.diptem.unige.it/index.htm`

Indice

Giochi cooperativi.

Introduzione.

Definizione 1. Un *gioco cooperativo* a n persone è una coppia G = $<N,v>$ dove $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ è un insieme finito con n elementi e $v : \mathrm{P}(N) \to \mathbb{R}$ è una funzione a valori reali definita su tutti i sottoinsiemi di N e tale che $v(\emptyset) = 0$.

Gli elementi di N rappresentano gli n giocatori.

Un generico sottoinsieme S di N si chiama *coalizione*.

v si chiama *funzione caratteristica* del gioco e $v(S)$ rappresenta la quantità di utilità che i membri di S possono ottenere coalizzandosi fra loro.

Definizione 2. Il gioco G si dice *superadditivo* se, $\forall\ S,T \in \mathrm{P}(N)$ tali che $S \cap T = \emptyset$ si ha:

$$v(S \cup T) \geq v(S)+v(T) \qquad (1)$$

L'interpretazione è la seguente: se S e T sono coalizioni disgiunte, è chiaro che, raggruppando le loro forze, esse possono ottenere almeno tanto quanto ottengono separatamente.

Alcuni autori non richiedono la superadditività e studiano funzioni che soddisfano soltanto la condizione $v(\emptyset) = 0$. Molto spesso queste funzioni sono chiamate giochi *impropri*, mentre quelli che soddisfano anche (1) sono chiamati giochi *propri*. ; noi tratteremo soltanto giochi propri.

In questo caso è intuitivo che si formerà sempre la cosiddetta "grande coalizione" e il problema sarà come spartire l'utilità totale $v(N)$ tra tutti i giocatori. I seguenti esempi sono tutti di giochi propri.

Esempio 1: Gioco dei Pirati

Tre pirati sono alla ricerca di un tesoro (il cui valore è t) e per raggiungerlo devono attraversare un fiume di larghezza d. Ognuno possiede una pertica di lunghezza $h=\frac{2}{3}d$. Per raggiungere il tesoro occorre quindi che si formi una coalizione di almeno due pirati. Posto N={A, B, C} l'insieme dei giocatori, la funzione caratteristica del gioco è chiaramente:

v(A) = v(B) = v(C) = 0, v(A B) = v(A C) = v(B C) = v(A B C) = t .

Esempio 2: Gioco della Produzione

Ciascuno dei tre imprenditori A, B, C ha a disposizione un certo quantitativo di tre materie prime X, Y, Z secondo la tabella:

	X	Y	Z
A	2	3	3
B	3	0	3
C	1	3	0

Per produrre un'unità di un certo prodotto P occorre un'unità di ciascuna delle materie prime e l'unità di prodotto può essere venduta al prezzo x. E' chiaro che il profitto ottenibile dalle singole coalizioni è espresso dalla funzione caratteristica:

v(A) = 2x, v(B) = v(C) = 0,v(A B)= v(A C) = v (B C) =3x, v(A B C) = 6x.

Esempio 3: Gioco dell'Acquedotto

Tre città A, B e C si trovano a 20 km da un fiume e a 10 km fra loro come in Fig.1; ciascuna ha necessità di costruire un acquedotto il cui costo è proporzionale alla sua lunghezza (c lire al km). Consideriamo il gioco in cui i giocatori sono le tre città e la funzione caratteristica di una coalizione S è il costo dell'acquedotto di lunghezza minima che serve le città appartenenti a S. Risulta che: v(A) = v(B) = v(C) = -20c, v(A B) = v(B C) = = $-(20+5\sqrt{3})c \approx -28.66c$, v (A C) = $-(20+10\sqrt{3})c \approx -37.32c$, v(A B C) = -40c.

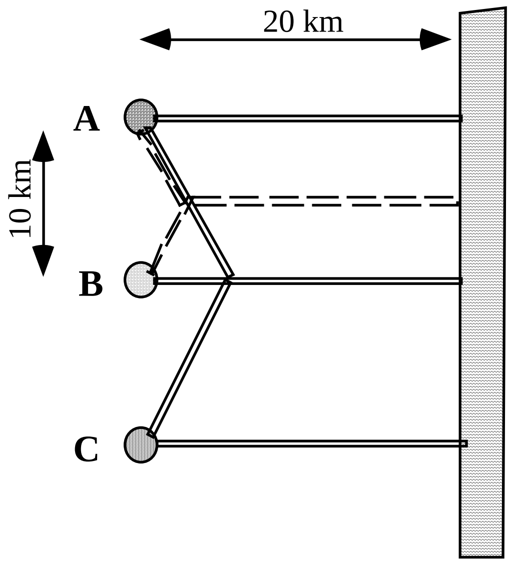


Fig.1

Definizione 3. Un gioco G = $<N,v>$ si dice <u>*a somma-costante*</u> se, $\forall\ S \subset N$ si ha:

$$v(S)+v(N-S) = v(N).$$

Il gioco dei Pirati è a somma costante, i giochi della Produzione e dell'Acquedotto no.

Supponiamo ora che venga giocato un gioco a n persone e assumiamo che si raggiunga qualche tipo di accordo; allora i giocatori avranno l'utilità totale $v(N)$ da dividere. Questa può essere divisa in qualunque modo, ma naturalmente è chiaro che nessun giocatore accetterà meno di quanto egli potrebbe ottenere per conto suo. Diamo perciò la seguente:

Definizione 4. Un'*imputazione* (per il gioco <*N,v*>) è un vettore $x=(x_1,\dots,x_n)$ che soddisfa:

(i) $\sum_{i\in N} x_i = v(N)$, (efficienza)

(ii) $x_i \geq v(\{i\}) \quad \forall\, i \in N.$ (razionalità individuale)

Indicheremo con E(G) l'insieme di tutte le imputazioni del gioco G.

Per la superadditività ripetuta n volte, è chiaro che:

$$v(N) \geq \sum_{i\in N} v(\{i\}).$$

Se vale l'uguaglianza c'è una sola imputazione data da $x_i = v(i)$ e il gioco è detto *inessenziale*. Ciò significa che non c'è alcun incentivo a coalizzarsi perché qualunque coalizione non otterrà nulla di più della somma delle utilità dei singoli componenti. In caso contrario il gioco si dice *essenziale*. In tal caso le imputazioni sono in numero infinito e formano un simplesso chiuso (n-1)-dimensionale in $\mathbb{R}^n$.

Equivalenza strategica. Normalizzazione.

Definizione 5. Due giochi G = <*N,v*> e G' = <*N,u*> (con lo stesso insieme di giocatori) si dicono *S-equivalenti* se esistono: un numero positivo *r* e *n* numeri reali $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ tali che, $\forall$ $S \subset N$,

$$v(S) = ru(S) + \sum_{i\in S} \alpha_i.$$

Essenzialmente, se due giochi sono *S*-equivalenti, possiamo ottenere uno dall'altro semplicemente facendo una trasformazione lineare sugli spazi delle utilità dei diversi giocatori. E' facile provare che la *S*-equivalenza è una relazione di equivalenza.

Definizione 6. Un gioco G=<*N,v*> si dice in *normalizzazione* (0,1) se

(i) $v(\{i\}) = 0 \quad \forall\, i \in N,$

(ii) $v(N) = 1$.

Se G = <*N,v*> è un gioco essenziale, è *S*-equivalente ad uno e un solo gioco G' = <*N,u*> in normalizzazione (0,1), il quale si può ottenere facilmente da G secondo la formula $u(S) = \dfrac{v(S) - \sum_{i\in S} v(i)}{v(N) - \sum_{i\in N} v(i)}$, $\forall\, S \subset N$. Per i giochi degli esempi 1, 2, 3 G' è dato da:

Esempio 1: (gioco dei Pirati) G' si ottiene da G ponendo t=1;

Esempio 2: (gioco della Produzione) u(A B) = u(A C) = 0.25, u (B C) = 0.75.

Esempio 3: (gioco dell'Acquedotto) u(A B) = u(B C) = 0.57, u (A C) = 0.13.

Definizione 7. Un gioco G = $<N,v>$ si dice <u>*simmetrico*</u> se $v(S)$ dipende soltanto dal numero di elementi di S (i giocatori sono tutti equivalenti; ad esempio il gioco dei Pirati è simmetrico).

Definizione 8. Un gioco in normalizzazione (0,1) si dice <u>*semplice*</u> se, $\forall\, S \subset N$, si ha $v(S) = 0$ oppure $v(S) = 1$.

In pratica, un gioco semplice è un gioco in cui ogni coalizione è o vincente (valore 1) o perdente (valore 0) (esempio: ancora il gioco dei Pirati ponendo t=1).

Tra i giochi semplici, distinguiamo una classe speciale: i giochi di maggioranza pesata:

Esempio 4: Gioco di maggioranza pesata

Siano $p_1,p_2,\ldots,p_n \geq 0$, e sia q un numero che soddisfa $0 < q \leq \sum_{i=1}^{n} p_i$.

Definiamo gioco di maggioranza pesata associato a $q;p_1,p_2,\ldots,p_n$, (e lo indichiamo con $[q;p_1,p_2,\ldots,p_n]$) il gioco semplice G=$<N,v>$ la cui funzione caratteristica v è data da:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & se \sum_{i \in S} p_i < q \\ 1 & se \sum_{i \in S} p_i \geq q. \end{cases}$$

Un'interpretazione può essere questa: i giocatori sono n partiti politici aventi rispettivamente $p_1,p_2,\ldots,p_n$ seggi in parlamento e q è il "quorum", cioè il numero minimo di voti necessario per approvare una legge.

Ad esempio: se 3 partiti A, B, C hanno rispettivamente 41, 20, 39 seggi con il quorum di 51, il gioco di maggioranza pesata corrispondente coincide con il gioco dei Pirati (esempio 1).

Il nucleo.

Definizione 9. Il <u>*nucleo.*</u> di un gioco G = $<N,v>$ è l'insieme C(G) di tutti i vettori $(x_1,\ldots,x_n)$ che soddisfano

$$(a) \quad \sum_{i \in S} x_i \geq v(S). \qquad per\, ogni\ S \subset N,$$

$$(b) \quad \sum_{i \in N} x_i = v(N).$$

Dalla definizione si deduce che tutti i vettori del nucleo sono imputazioni, e che <u>C(G) è un insieme chiuso convesso</u> (perché è caratterizzato da un insieme di disuguaglianze lineari deboli). La teoria economica classica usualmente dà il nucleo come "soluzione" a molti problemi di teoria dei giochi. Infatti una qualunque imputazione del nucleo è "stabile", in quanto è vantaggiosa per qualunque coalizione.

In generale, naturalmente, il nucleo può avere più di un punto; questa è una difficoltà perché non si sa quale imputazione scegliere. Una difficoltà ancora maggiore sta nel fatto che il nucleo può essere vuoto (v. teorema 1).

La determinazione del nucleo equivale ad un problema di programmazione lineare consistente nel minimizzare la funzione obiettivo $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1 + \ldots + x_n$ soggetta ai vincoli (*a*). Si dimostra che questo programma è sempre risolubile e quindi si trova sempre il valore minimo della $f(x_1,\ldots,x_n)$; se questo valore è uguale a $v(N)$ il nucleo non è vuoto (e la soluzione fornisce anche un elemento del nucleo), altrimenti il nucleo è vuoto. I tempi di calcolo possono essere molto lunghi perché il numero di vincoli è 2^n-1.

Teorema 1. *Se* G = <*N*,*v*> *è un gioco a somma costante essenziale, allora* C(G) = Ø.

Dimostrazione: Supponiamo che $x \in C(G)$. Per ogni $i \in N$, sappiamo

$$\sum_{j \in N-\{i\}} x_j \geq v(N-\{i\})$$

ma, dalla proprietà della somma-costante,

$$v(N-\{i\}) = v(N) - v(\{i\})$$

e, poiché x è un'imputazione, risulta $x_i \leq v(\{i\})$. Poiché G è essenziale, allora:

$$\sum_{i \in N} x_i \leq \sum_{i \in N} v(\{i\}) < v(N);$$

ma ciò significa che $x \notin E(G)$. La contraddizione prova che il nucleo è vuoto. □

Ad esempio il gioco dei Pirati ha nucleo vuoto.

Definizione 10. Sia G=<*N*,*v*> un gioco semplice. Diciamo che il giocatore *i* è un *giocatore di veto* se

$$v(N - \{i\}) = 0$$

dove, come al solito, *N* è l'insieme di tutti i giocatori.

Teorema 2. *Per un gioco semplice* G = <*N*,*v*> *il nucleo è non vuoto se e solo se c'è almeno un giocatore di veto.*

Dimostrazione: Supponiamo, per prima cosa, che G non abbia giocatori di veto. Allora, per ogni $i \in N$ abbiamo $v(N - \{i\}) = 1$. Perché un'imputazione x stia nel nucleo dobbiamo avere:

$$\sum_{j \in N} x_j = v(N) = 1,$$

$$\sum_{j \neq i} x_j \geq v(N - \{i\}) = 1.$$

Così $x_i = 0$ per tutte le i e perciò x non può essere un'imputazione. Questa contraddizione prova che C(G) = Ø.

Viceversa, supponiamo che G abbia uno o più giocatori di veto e sia S l'insieme di tutti questi. Sia x tale che:

$$\sum_{i \in S} x_i = 1,$$

$$x_i \geq 0 \qquad \forall\ i \in S,$$

$$x_i = 0 \qquad \forall\ i \notin S.$$

Ora, se T è una coalizione vincente, dobbiamo avere $S \subset T$ cosicché

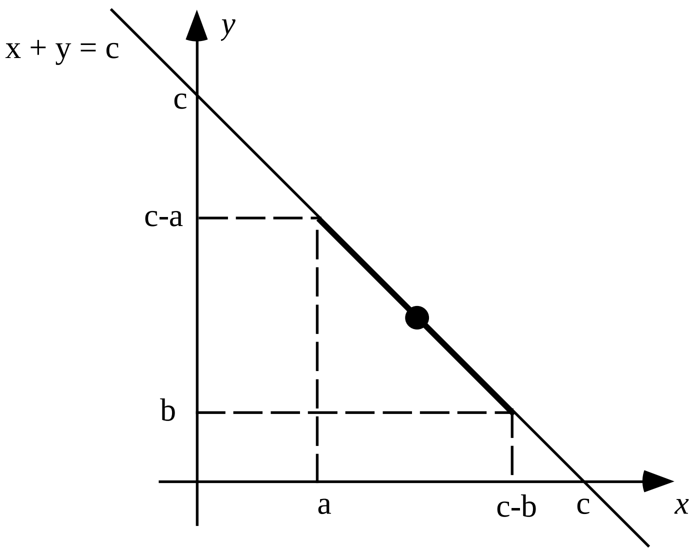
$$\sum_{i \in T} x_i \geq \sum_{i \in S} x_i = 1 = v(T),$$

e quindi $x \in C$(G). Così C(G) ≠ Ø. □

Esempio 5. Modifichiamo il gioco dei Pirati supponendo che uno di essi (per es. A) abbia la chiave del baule dove è racchiuso il tesoro. La funzione caratteristica conseguente è v(A) = v(B) = v(C) = v(B C) = 0, v(A B) = v(A C) = v(A B C) = 1. E' facile vedere che A è l'unico giocatore di veto e che il nucleo contiene l'unica imputazione (1, 0, 0).

Per illustrare la nozione di nucleo, vediamo tutti i casi che possono presentarsi per un generico gioco a due e a tre giocatori.

Fig. 2



Per un qualunque gioco G con due giocatori A, B e funzione caratteristica v(A) = a, v(B) = b, v(A B) = c ≥ a + b, si dimostra facilmente che il nucleo coincide con l'insieme di tutte le imputazioni E(G) = {(x,c-x) | x ∈ [a, c-b]}; in tal caso la conoscenza del nucleo non dà alcuna informazione su come suddividere le utilità; la scelta più ovvia è quella di distribuire equamente l'eccedenza c-a-b, scegliendo l'imputazione $\left(\frac{a+c-b}{2},\frac{b+c-a}{2}\right)$(v. Fig.2).

Dato un qualunque gioco G = <*N*,*v*> con tre giocatori A, B, C, consideriamo dapprima la sua normalizzazione (0,1) G' = <N,*u*> la cui funzione caratteristica sia data da: u(A) = u(B) = u(C) = 0, u(B C) = a, u(A C) = b, u(A B) = c, u(A B C) = 1. L'insieme E(G') delle imputazioni di G' è un triangolo equilatero di lato $\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}^3$ con vertici nei tre punti A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1) (v. Fig.3). Il nucleo *C*(G') è l'insieme dei punti di E(G') che soddisfano le 3 diseguaglianze lineari $x + y \geq c$, $x + z \geq b$, $y + z \geq a$; esso si ottiene togliendo dagli angoli del triangolo ABC tre triangoli equilateri di lati $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$, $c\sqrt{2}$ come in figura. E' chiaro che se a, b e c sono abbastanza grandi il nucleo risulterà vuoto, per la precisione è facile vedere che il nucleo è vuoto se a + b + c > 2 , contiene un solo punto se a + b + c = 2, contiene infiniti punti se a + b + c < 2 (in tal caso può essere: un esagono, un pentagono, un quadrilatero, un triangolo, un segmento).

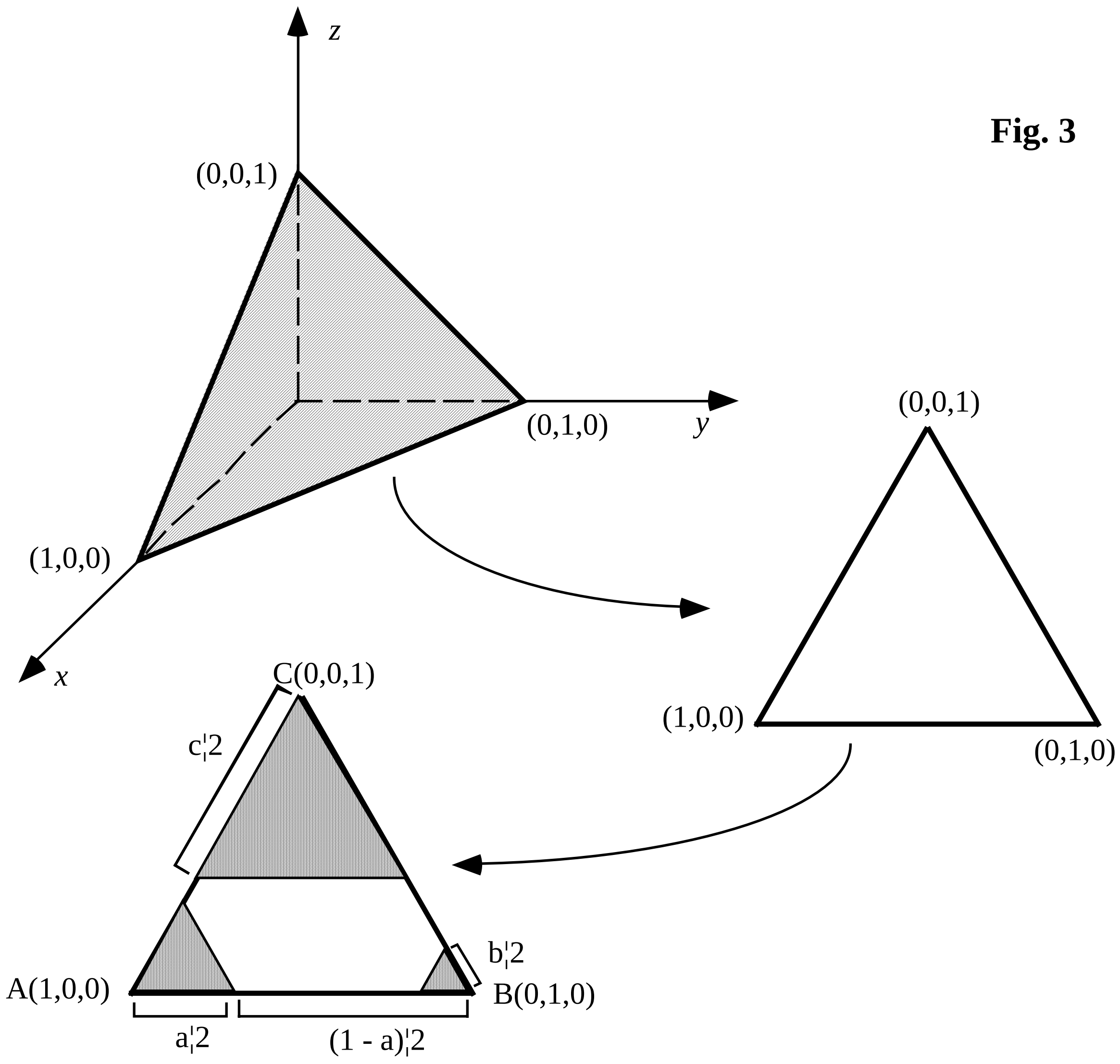


Fig. 3

Noto il nucleo di G', si può risalire da esso al nucleo di G applicando la trasformazione lineare inversa di quella che fa passare da G a G', che comunque non altera la forma del nucleo.

Come esempi numerici richiamiamo gli esempi 2: (gioco della Produzione) e 3: (gioco dell'Acquedotto), le cui normalizzazioni (0,1) hanno entrambe nucleo non vuoto come illustrano le Fig. 4 e 5.

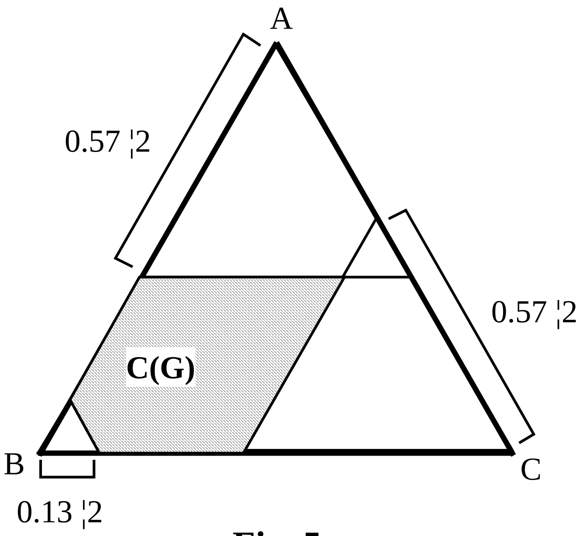


Fig. 5

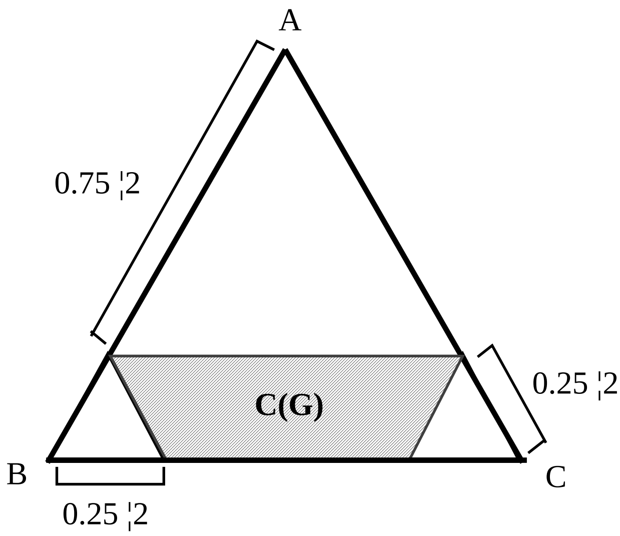


Fig. 4

Soluzioni puntuali.

Indichiamo con G^n l'insieme dei giochi cooperativi ad *n* persone.

Definizione 11. Un'applicazione f: $G^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sarà detta una <u>*soluzione puntuale*</u> per G^n se f(G) $\in$ E(G) (insieme delle imputazioni), $\forall$ G $\in$ G^n.

Ciò significa che ad ogni gioco G=<*N*,*v*> f associa un vettore $x=(x_1,\dots,x_n)$ che rappresenta una spartizione dell'utilità totale $v(N)$ tra gli *n* giocatori,

$$\sum_{i\in N} x_i = v(N), \qquad \text{(efficienza)}$$

e inoltre soddisfa

$$x_i \geq v(\{i\}) \qquad \forall\ i \in N. \qquad \text{(razionalità individuale)}$$

Indicheremo con $f_i(G)$ con $i=1,\dots,n$ le singole componenti del vettore f(G).

Le soluzioni puntuali hanno una grande importanza pratica in quanto determinano univocamente un'imputazione tra le infinite possibili. Se il nucleo del gioco è non vuoto e non è ridotto ad un unico punto, esso contiene infinite imputazioni; si tratterà di sceglierne una che sia "la più equa possibile" in un senso da definirsi. Se il nucleo è vuoto non è possibile scegliere una ripartizione vantaggiosa per tutti ed allora si tratterà, in qualche modo, di ridurre al minimo "i danni".

Per introdurre diversi concetti di soluzione puntuale può essere opportuno seguire il metodo assiomatico, cioè specificare delle proprietà che dovrebbero essere soddisfatte da una soluzione puntuale f ed eventualmente cercare una caratterizzazione assiomatica di f, ossia, stabilire se f è l'unica soluzione che verifica una certa lista di assiomi.

Citeremo le seguenti sei soluzioni: **S1** = soluzione di Nash, **S2** = metodo ACA, **S3** = vettore τ, **S4** = Nucleolo, **S5** = valore Shapley, **S6** = indice di Banzhaf-Coleman normalizzato;

ed i seguenti sei assiomi: **A1** = stabilità, **A2** = additività, **A3** = invarianza per *S*-equivalenza, **A4** = simmetria, **A5** = consistenza, **A6** = proprietà del giocatore di paglia.

Tabella 1

	A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**
S1	**-**	**sì**	**sì**	**sì**	**sì**	**-**
S2	**-**	**-**	**sì**	**sì**	**-**	**sì**
S3	**-**	**-**	**sì**	**sì**	**-**	**sì**
S4	**sì**	**-**	**SI**	**SI**	**SI**	**sì**
S5	**-**	**SI**	**sì**	**SI**	**-**	**SI**
S6	**-**	**-**	**sì**	**sì**	**-**	**sì**

Citeremo inoltre due interessanti caratterizzazioni assiomatiche :

- il nucleolo (**S4**) è l'unica soluzione puntuale che verifica **A3**(invarianza per *S*-equivalenza), **A4**(simmetria), **A5**(consistenza);
- il valore Shapley (**S5**) è l'unica soluzione puntuale che verifica, **A2**(additività), **A4**(simmetria), **A6**(proprietà del giocatore di paglia).

Un'osservazione immediata è la seguente: se richiediamo che siano soddisfatti troppi assiomi, non esiste alcuna soluzione puntuale che risponde ai requisiti, per esempio non esiste alcuna soluzione che verifica **A1**, **A2**, **A4**, **A6**.

A1 = *stabilità*: una soluzione puntuale f: $G^n \to \mathbb{R}^n$ sarà detta *stabile* se:

$f(G) \in C(G)$ (nucleo di G), $\forall\, G \in G^n$, tale che $C(G) \neq \emptyset$.

A2 = *additività*: Introduciamo dapprima, nell'insieme G^n dei giochi a *n* persone, le operazioni di somma e di moltiplicazione per uno scalare $\alpha \geq 0$: dati due giochi $G=<N,u>$ e $G'=<N,v>$ definiamo G + G' e αG nel modo ovvio $G + G' = <N,u+v>$ e $\alpha G = <N, \alpha u>$; ciò è possibile perché, se *u* e *v* sono superadditive, lo sono anche $u+v$ e αu purché $\alpha \geq 0$ (si può anche dire che G^n è un cono convesso nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{2^n-1}$). Ciò posto, una soluzione puntuale f: $G^n \to \mathbb{R}^n$ sarà detta *additiva* se:

f(G + G') = f(G) + f(G');

A3 = *invarianza per S-equivalenza*: Siano G=<*N*,*v*> e G'=<*N*,*u*> due giochi *S-equivalenti* e siano *r* un numero positivo e $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ numeri reali tali che, $\forall\ S \subset N$, $v(S) = ru(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i$. Una soluzione puntuale f: $G^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sarà detta *invariante per S-equivalenza* se:

$$f(G) = r f(G') + (\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

A4 = *simmetria*: sia G=<*N*,*v*> un gioco a *n* persone e π: $N \rightarrow N$ una permutazione dell'insieme dei giocatori.

Definiamo il gioco πG = <$N,\pi v$> ponendo $\pi v(\{\pi(i) \mid i \in S\}) = v(S)\ \forall\ S \subset N$.

Ciò posto, una soluzione puntuale f: $G^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sarà detta *simmetrica* se

$$f_{\pi(i)}(\pi G) = f_i(G) \qquad \forall \text{ permutazione } \pi \text{ di } N$$

A5 = *consistenza*: sia G=<*N*,*v*> un gioco a *n* persone, una soluzione puntuale f: $G^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sarà detta *consistente,* se ogni sottogruppo di giocatori è d'accordo sul fatto che f suddivida l'utilità a loro assegnata in modo "equo".

Più precisamente, sia *T* un qualunque sottoinsieme di *N*, sia f(G) = $(x_1,\ldots,x_n)$ e $x(T)$ la quota di utilità che f assegna ai giocatori di *T*. Supponiamo che i giocatori di *N*-*T* abbandonino il gioco e che ai giocatori di *T* resti da spartirsi l'utilità $x(T)$ secondo la regola f applicata ad un opportuno "gioco ridotto" G': f si dice *consistente* se essi ottengono lo stesso risultato che otterrebbero in G, cioè se f(G') coincide col vettore f(G) ristretto a *T*.

Il gioco ridotto G'=<*T*,*v'*> ha funzione caratteristica definita da:

$$v'(\emptyset) = 0,\ v'(T) = x(T),\ v'(S) = \min_{S' \subseteq N-T} \left\{ v(S \cup S') - \sum_{i \in S'} x_i \right\} \quad \text{se } \emptyset \subset S \subset T$$

Definizione 12. Sia G=<*N*,*v*> un gioco a *n* persone, si dice che il giocatore *i* è un *giocatore di paglia* (dummy player) se si ha :

$$v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i) \qquad \forall \text{ coalizione S tale che } i \notin S,$$

cioè il contributo che costui apporta ad S è soltanto $v(i)$.

A6 = *proprietà del giocatore di paglia* : Si dice che una soluzione puntuale f: $G^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ha la proprietà del giocatore di paglia se:

$$f_i(G) = v(i) \qquad \forall \text{ giocatore di paglia } i.$$

Prima di esaminare le proprietà di alcune soluzioni puntuali vediamo una caratterizzazione dei giochi aventi nucleo non vuoto, i cosiddetti giochi bilanciati.

Collezioni bilanciate

Definizione 13. Sia $\mathcal{C} = \{S_1,S_2,\ldots,S_m\}$ una collezione di sottoinsiemi non vuoti di $N = \{1,2,\ldots,n\}$. Diciamo che $\mathcal{C}$ è <u>bilanciata</u> se esistono m numeri reali $y_1,y_2,\ldots,y_m$ maggiori di 0 tali che, $\forall\ i \in N$,

$$\sum_{j\ t.c.\ i\in S_j} y_j = 1.$$

Allora $y = (y_1,\ldots,y_m)$ si dice un *vettore bilanciante* per $\mathcal{C}$ e gli y_j si dicono *coefficienti bilancianti.*

Esempi:

(i) Ogni partizione di N è una collezione bilanciata con coefficienti bilancianti tutti uguali a 1.

(ii) Sia $N = \{1,2,3\}$. Allora la collezione $\mathcal{C} = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ è bilanciata, con vettore bilanciante $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

(iii) Sia $N = \{1,2,3,4\}$. Allora la collezione $\mathcal{C} = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3,4\}\}$ è bilanciata, con vettore bilanciante $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

Essenzialmente, una collezione bilanciata è una "partizione generalizzata".

Definizione 14: Si dice <u>*collezione bilanciata minimale*</u> una collezione bilanciata tale che nessuna sua sottocollezione propria sia bilanciata.

Definizione 15: Un gioco G=<N,v> si dice <u>*bilanciato*</u> se per ogni collezione bilanciata minimale $\mathcal{C} = \{S_1,S_2,\ldots,S_m\}$ con vettore bilanciante $y = (y_1,\ldots,y_m)$ si ha:

$$\sum_{j=1}^{m} y_j v(S_j) \le v(N).$$

Si possono dimostrare le seguenti proprietà:

- L'unione di collezioni bilanciate è bilanciata.
- Una qualunque collezione bilanciata è l'unione di collezioni bilanciate minimali.
- Una collezione bilanciata ha un unico vettore bilanciante se e solo se è minimale.

Teorema 3. *Condizione necessaria e sufficiente perché un gioco* G=<N,v> *abbia nucleo non vuoto è che sia bilanciato.*

Esempi.

(i) Sia N = {1,2,3}. Oltre le partizioni c'è solo una collezione bilanciata minimale, e cioè, $\mathcal{C}$ = {{1,2}, {1,3}, {2,3}}, con vettore bilanciante $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Così un gioco a tre persone G ha nucleo non vuoto se e solo se

$$v(\{1,2\}) + v(\{1,3\}) + v(\{2,3\}) \leq 2v(N).$$

(ii) Sia N = {1,2,3,4}. Le collezioni bilanciate, oltre alle partizioni, sono

(a) $\mathcal{C}$ = {{1,2,3},{1,2,4}, {1,3,4}, {2,3,4}}, $y = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$,

(b) $\mathcal{C}$ = {{1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3,4}}, $y = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$,

(c) $\mathcal{C}$ = {{1,2}, {1,3}, {2,3}, {4}}, $y = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$,

(d) $\mathcal{C}$ = {{1,2}, {1,3,4}, {2,3,4}}, $y = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

A parte queste collezioni, se ne possono ottenere altre con permutazioni, per un totale di 15 collezioni di questo tipo: una del tipo (a), 4 per ciascuno dei tipi (b) e (c) e 6 di tipo (d). Assumendo che il gioco sia in normalizzazione (0,1) e superadditivo, ciò ci dà un sistema di 15 disuguaglianze:

(a) $v\{\{1,2,3\}+v\{1,2,4\}+v\{1,3,4\}+v\{2,3,4\}\} \leq 3$

(b) $v\{\{1,2\}+v\{1,3\}+v\{1,4\}+v\{2,3,4\}\} \leq 3$

(c) $v\{\{1,2\}+v\{1,3\}+v\{2,3\}+v\{4\}\} \leq 2$

(d) $v\{\{1,2\}+v\{1,3,4\}+v\{2,3,4\}\} \leq 2$

Per la superadditività, (d) implica (c). Così restano 11 disuguaglianze: (a), 4 di tipo (b) e 6 di tipo (d), che devono essere soddisfatte perché G abbia nucleo non vuoto.

S1 - Soluzione di Nash (o metodo equalitario)

Dato G=<N,v> gioco a n persone, la soluzione di Nash f: $G^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è definita da:

$$f_i(G) = v(i) + \frac{v(N) - \sum_{i=1}^{n} v(i)}{n}$$

L'interpretazione è ovvia: si assegna a ciascun giocatore il minimo $v(i)$ che deve ricevere e il resto viene diviso in parti uguali.

E' chiaro che questa soluzione è consistente, additiva, invariante per S-equivalenza e simmetrica, invece non soddisfa la proprietà del giocatore di paglia e già questo la rende inutilizzabile per scopi pratici; non è neanche stabile perché è facile vedere che in generale non sta nel nucleo. In particolare per qualunque gioco a tre persone in normalizzazione (0,1) la soluzione di Nash è $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ e può non stare nel nucleo, come mostra l'esempio del gioco della Produzione .

S2 - metodo ACA (Alternate Cost Avoided)

Dato G=<*N*,*v*> gioco a *n* persone, definiamo:

$M(i) = v(N) - v(N-\{i\})$ (vincita utopistica del giocatore *i*)
$a(i) = M(i) - v(i)$,

definiamo quindi la soluzione ACA(G) ponendo:

$$\mathrm{ACA}_i(G) = v(i) + \frac{a(i)\left(v(N) - \sum_{i=1}^{n} v(i)\right)}{\sum_{i=1}^{n} a(i)}$$

Notiamo che il vettore ACA non è definito per tutti i giochi in quanto $\sum_{i=1}^{n} a(i)$ può essere = 0 (esempio: gioco dei Pirati).

Il significato è questo: $v(i)$ e $M(i)$ sono l'utilità minima e massima che il giocatore *i* può sperare di ottenere (perché se ottenesse più di $M(i)$ gli altri giocatori non sarebbero disposti ad includerlo nella grande coalizione).

Il metodo ACA assegna ad ogni giocatore la sua quota minima $v(i)$ e il resto viene suddiviso in parti proporzionali alle differenze $a(i)$. Ciò significa che il vettore ACA è l'unica intersezione del simplesso delle imputazioni con la retta che unisce il vettore *v* col vettore utopia M (v. Fig.6).

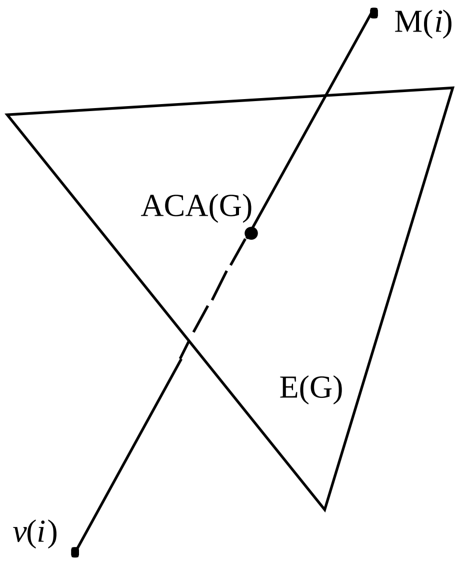


Fig. 6

Si dimostra anche che se il nucleo è non vuoto allora $v(i) \le x_i \le M(i)$ per ogni imputazione $x \in C(G)$, cioè i vettori *v* e M sono un "minorante" e un "maggiorante" del nucleo (nel senso componente per componente). Tuttavia, se il nucleo è vuoto può anche accadere che il vettore utopia M stia al di sotto del simplesso delle imputazioni.

Questo metodo è uno dei più usati in pratica e soddisfa gli assiomi **A3**(invarianza per *S*-equivalenza), **A4**(simmetria) e **A6**(proprietà del giocatore di paglia), però ha lo svantaggio che dipende solo dai valori della funzione caratteristica per le coalizioni ad 1 ed *n*-1 giocatori e quindi ignora il ruolo delle coalizioni intermedie.

Esempio 6: Consideriamo un qualunque gioco G=<*N*,*v*> con tre giocatori A, B, C, in normalizzazione (0,1) la cui funzione caratteristica sia data da: *u*(A) = *u*(B) = *u*(C) = 0, *u*(B C) = a, *u*(A C) = b, *u*(A B) = c, *u*(A B C) = 1. Il vettore M è dato da (1-a, 1-b, 1-c); notiamo che se a+b+c > 2 (nucleo vuoto) esso sta al di sotto del simplesso delle imputazioni.

In ogni caso il vettore ACA è dato da:

$$\left(\frac{1-a}{3-a-b-c}, \frac{1-b}{3-a-b-c}, \frac{1-c}{3-a-b-c}\right).$$

(E' necessario escludere il caso a=b=c=1);

Se il nucleo è non vuoto (a+b+c $\leq$ 2), il vettore ACA appartiene sempre al nucleo. Tuttavia, non è detto che, nei giochi con almeno 4 giocatori il vettore ACA stia nel nucleo (se il nucleo è non vuoto) come dimostra il seguente

Esempio 7:

v(A) = *v*(B) = *v*(C) = *v*(D) = 0

v(A B) = *v*(A C) = *v*(A D) = *v*(B C) = *v*(B D) = *v*(C D) = .5

v(A B C) = *v*(A B D) = 0.5

v(A C D) = *v*(B C D) = 0.7

v(A B C D) = 1

Il vettore ACA è $\left(\frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}\right)$ e non sta nel nucleo, che comunque è non vuoto. Si dimostra facilmente che il nucleo si riduce all'unico punto $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

S3 - vettore τ

Definiamo il vettore τ solo per una particolare classe di giochi: i cosiddetti *giochi quasi bilanciati* a *n* persone (QB^n).

Dato G=<*N*,*v*> un gioco a *n* persone, definiamo:

$$\mathrm{M}(i) = v(N) - v(N-\{i\}) \quad \text{e} \quad \mathrm{m}(i) = \max_{S:\ i \in S}\left(v(S) - \sum_{j \in S-\{i\}} \mathrm{M}(j)\right)$$

Definizione 16: Un gioco G=<*N*,*v*> si dice *quasi bilanciato* se:

$$\mathrm{m}(i) \leq \mathrm{M}(i) \qquad \forall\ i \in N,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{m}(i) \leq v(N) \leq \sum_{i=n}^{n} \mathrm{M}(i).$$

Si dimostra che ogni gioco bilanciato è quasi bilanciato, ma non viceversa.

Dato G=<*N*,*v*> un gioco quasi bilanciato, poniamo b(i) = M(i) - m(i) e definiamo il vettore τ nel seguente modo:

$$\tau_i(G) = \begin{cases} \mathrm{m}(i) + \dfrac{b(i)\left(v(N) - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{m}(i)\right)}{\sum_{i=1}^{n} b(i)} & se \sum_{i=1}^{n} b(i) \neq 0 \\ \mathrm{m}(i) & se \sum_{i=1}^{n} b(i) = 0 \end{cases}$$

Ciò significa che il vettore τ è l'unica intersezione del simplesso delle imputazioni con la retta che unisce il vettore m con il vettore utopia M.

Il fatto che G sia quasi bilanciato garantisce che il vettore τ sia un'imputazione anche nel caso in cui $\sum_{i=1}^{n} b(i) = 0$.

Il vettore τ, in un certo senso è simile al vettore ACA modificato per tener conto anche della forza delle coalizioni intermedie. Esso si ottiene prendendo come "aspettativa minima di vincita del giocatore *i*", non $v(i)$, bensì il valore m(i) che è il massimo che *i* potrebbe ottenere coalizzandosi in tutti i modi possibili, supponendo che tutti gli altri membri della coalizione tengano per sé la massima utilità possibile (notiamo che m(i) $\geq v(i)$).

Come nel caso del vettore ACA, anche per il vettore τ si dimostra che se il nucleo è non vuoto allora m(i) $\leq x_i \leq$ M(i) $\forall$ imputazione $x \in$ C(G), cioè i vettori m e M sono un "minorante" e un "maggiorante" del nucleo. Tuttavia non è detto che il vettore τ appartenga al nucleo, come dimostra l'esempio 7 in cui $\tau = \left(\frac{9}{40}, \frac{9}{40}, \frac{11}{40}, \frac{11}{40}\right)$ e il nucleo contiene solo il punto $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Il vettore τ (analogamente al vettore ACA) soddisfa gli assiomi **A3**(invarianza per *S*-equivalenza), **A4**(simmetria) e **A6**(proprietà del giocatore di paglia).

Il calcolo del vettore τ, in generale, presenta notevoli difficoltà, ma in casi particolari può risultare molto semplice come dimostra il seguente

Esempio 8: Gioco dell'Aeroporto

In un aeroporto atterrano differenti tipi di aerei, che richiedono una pista di lunghezza differente, (più lunga per gli aerei di grandi dimensioni, più corta per quelli di dimensioni inferiori). Naturalmente viene costruita una pista di lunghezza massima, ma poi il problema sarà quello di ripartire i costi di costruzione e manutenzione della pista tra i vari utenti.

Per fissare le idee ammettiamo che ci siano tre differenti tipi di aerei, e in un anno avvengano n_1 movimenti (atterraggi e decolli) di aerei di tipo 1, n_2 di tipo 2, n_3 di tipo 3.

Indichiamo con c_1, c_2 e c_3 ($c_1 < c_2 < c_3$), i costi di tre ipotetiche piste necessarie per i tre tipi di aerei (v. Fig.7). Il problema è quello di ripartire il costo c_3 della pista più lunga fra tutti gli $n = n_1+n_2+n_3$ movimenti.

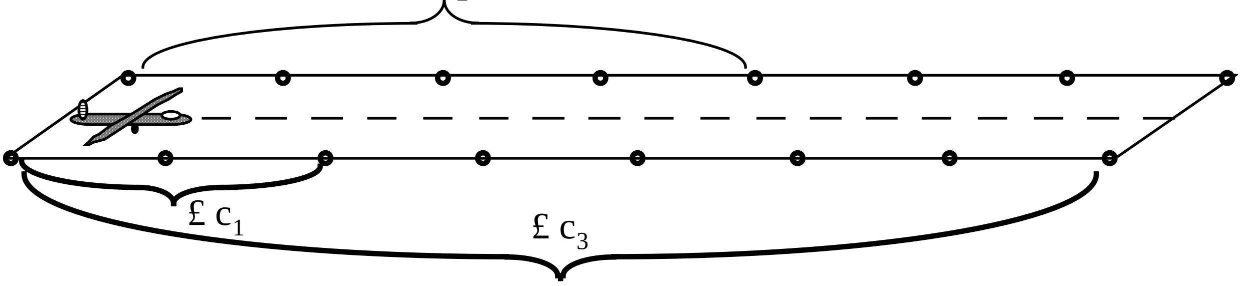


Fig. 7

La situazione si può schematizzare con il seguente gioco G=<*N*,*v*>, dove *N* è l'insieme di tutti i movimenti e la funzione caratteristica *v* è definita in questo modo: data una coalizione $S \subset N$, siano s_1, s_2, s_3 il numero di movimenti di aerei di tipo 1, 2 e 3 contenuti in *S*, poniamo

$$v(S) = \begin{cases} -c_3 & se\ s_3 \neq 0 \\ -c_2 & se\ s_3 = 0 \quad s_2 \neq 0 \\ -c_1 & se\ s_3 = s_2 = 0 \quad s_1 \neq 0 \end{cases}$$

Si trova che:

1) se $n_3 \geq 2$, posto x = $n_1c_1 + n_2c_2 + n_3c_3$ si ha :

$$\tau = -\left(\frac{c_3c_1}{\mathrm{x}}, \ldots(\mathrm{n}_1\,\mathrm{volte})\ldots, \frac{c_3c_2}{\mathrm{x}}, \ldots(\mathrm{n}_2\ \mathrm{volte})\ldots, \frac{c_3c_3}{\mathrm{x}}, \ldots(\mathrm{n}_3\,\mathrm{volte})\right)$$

2) se $n_3 = 1$, posto y = $n_1c_1 + (n_2 + 1)c_2$ si ha :

$$\tau = -\left(\frac{c_2c_1}{\mathrm{y}}, \ldots(\mathrm{n}_1\ \mathrm{volte})\ldots, \frac{c_2c_2}{\mathrm{y}}, \ldots(\mathrm{n}_2\,\mathrm{volte})\ldots, \frac{c_2c_2}{\mathrm{y}} + c_3 - c_2\right)$$

In pratica, se ci sono almeno due aerei di tipo 3, il costo c_3 viene ripartito fra gli aerei di tipo 1, 2 e 3 semplicemente in modo proporzionale ai costi c_1, c_2, c_3. Invece, se c'è un solo aereo di tipo 3, ad esso viene attribuito, dapprima il costo aggiuntivo $c_3 - c_2$ e poi viene trattato come se fosse un aereo di tipo 2.

Esempio numerico: Se $n_1 = 10$, $n_2 = 20$, $n_3 = 5$ e $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 4$, dalla formula del vettore τ risulta:

$$\tau = -\left(\frac{4}{70}, \ldots(10\,\mathrm{volte})\ldots, \frac{8}{70}, \ldots(20\,\mathrm{volte})\ldots, \frac{16}{70}, \ldots(5\mathrm{volte})\right)$$

Un altro metodo potrebbe essere quello di ripartire il costo c_1 fra tutti gli aerei, il costo $c_2 - c_1$ solo fra gli aerei di tipo 2 e 3 (quelli che usano il tratto di pista intermedio), e il costo

c_3 - c_2 solo fra gli aerei di tipo 3 (quelli che usano l'ultimo tratto di pista). Questa ripartizione di costi corrisponde al valore Shapley.

Nell'esempio di cui sopra essa darebbe la ripartizione

$$-\left(\frac{5}{175},\ldots(10\,\text{volte})\ldots,\frac{12}{175},\ldots(20\,\text{volte})\ldots,\frac{82}{175},\ldots(5\,\text{volte})\right).$$

Altro esempio: Sia $n_1 = n_2 = n_3 = 10$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$. Possibile interpretazione: un condominio di tre piani con 10 appartamenti per piano deve ripartire la spesa di manutenzione dell'ascensore fra i vari condòmini. in tal caso il valore τ e il valore Shapley danno rispettivamente:

$$-\left(\frac{1}{20},\ldots(10\,\text{volte})\ldots,\frac{2}{20},\ldots(10\,\text{volte})\ldots,\frac{3}{20},\ldots(10\,\text{volte})\right)$$
$$-\left(\frac{2}{60},\ldots(10\,\text{volte})\ldots,\frac{5}{60},\ldots(10\,\text{volte})\ldots,\frac{11}{60},\ldots(10\,\text{volte})\right)$$

Come si vede, il valore τ tende a penalizzare i condòmini del 1° piano (o gli aerei più piccoli), mentre il valore Shapley tende a penalizzare i condòmini dell'ultimo piano (o gli aerei più grandi).

S4 - Nucleolo

Dato un gioco a n persone G=<N,v>, consideriamo una qualunque coalizione $S \subset N$ e una qualunque imputazione $x = (x_1,\ldots,x_n) \in$ E(G); definiamo <u>*eccesso*</u> di S rispetto ad x la quantità e(S,x) = $\sum_{i \in S} x_i - v(S)$, (cioè, l'utilità che S riceve in più rispetto a quella che otterrebbe per conto suo).

Se e(S,x) < 0 definiamo <u>*rimpianto*</u> di S rispetto ad x la quantità r(S,x) = -e(S,x).

Se x sta nel nucleo C(G) e(S,x) ≥ 0 $\forall$ $S \subset N$. Se invece x non sta nel nucleo, allora esiste almeno una coalizione S per cui e(S,x) < 0, cioè, S ha dei rimpianti (e quindi protesta).

L'idea che sta alla base della definizione di <u>*nucleolo*</u> è questa: si cerca (molto altruisticamente) di rendere migliore possibile la situazione di chi sta peggio, cioè di scegliere l'imputazione che rende massimo il minimo eccesso ($\forall$ $S \neq$ N, Ø), o nel caso che il nucleo sia vuoto, rende minimo il massimo rimpianto.

Si possono presentare diversi casi, illustrati dai seguenti tre esempi, che si riferiscono tutti a un gioco a tre persone in normalizzazione (0,1) con insieme dei giocatori {A, B, C} (ricordiamo che, detta v la funzione caratteristica, deve sempre essere v(A) = v(B) = v(C) = 0, v(A B C) = 1).

Esempio a): Sia v(A B) = 0.7, v(A C) = 0.6, v(B C) = 0.5, (v. Fig.8). Se consideriamo il simplesso A B C delle imputazioni, dove A, B e C indicano i punti di coordinate (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), il nucleo di G è rappresentato dal triangolo equilatero ombreggiato DEF che è l'insieme delle imputazioni (x_1, x_2, x_3) che soddisfano le disuguaglianze:

$$x_1+x_2 \geq 0.7,\ \ x_1+x_3 \geq 0.6,\ \ x_2+x_3 \geq 0.5$$

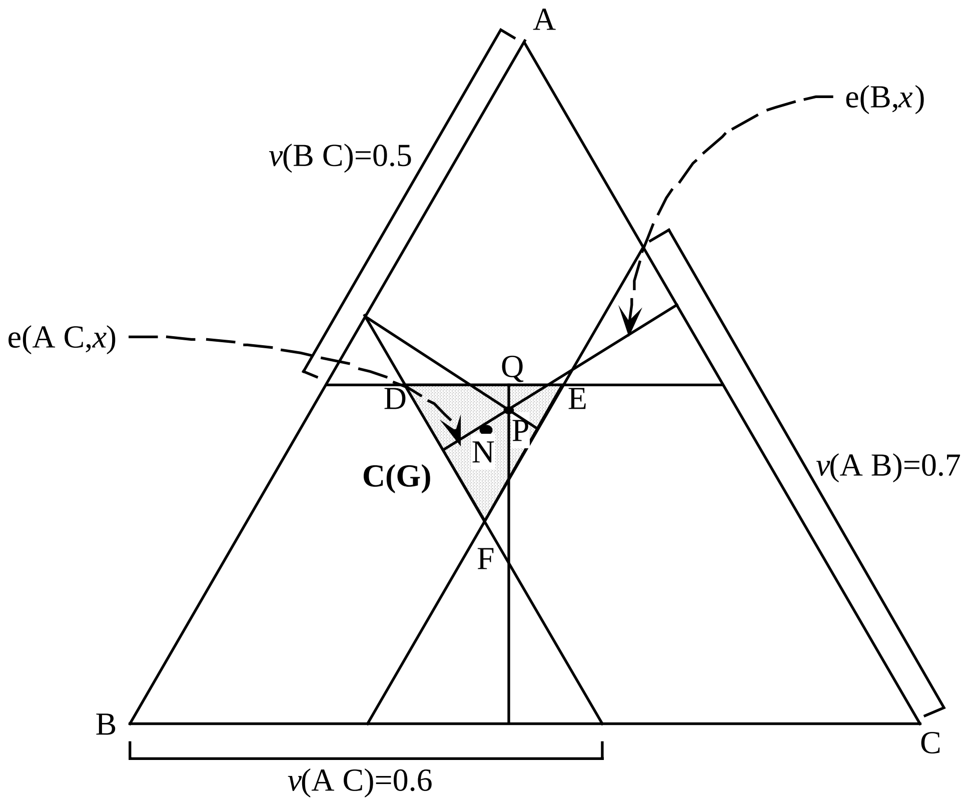


Fig. 8

Data una generica imputazione $x = (x_1, x_2, x_3)$, gli eccessi delle varie coalizioni rispetto a x sono:

$$\mathrm{e}(A, x) = x_1,\ \ \mathrm{e}(B, x) = x_2,\ \ \mathrm{e}(C, x) = x_3,$$
$$\mathrm{e}(A\ B, x) = x_1+x_2\text{-}0.7,\ \ \mathrm{e}(A\ C, x) = x_1+x_3\text{-}0.6,\ \ \mathrm{e}(B\ C, x) = x_2+x_3\text{-}0.5,$$
$$\mathrm{e}(A\ B\ C) = x_1+x_2+x_3\text{-}1 = 0.$$

Se x è rappresentata dal punto P interno al nucleo i sei eccessi di cui sopra sono tutti positivi e rappresentano le distanze di P dalle rette BC, AC, AB, EF, DF, DE rispettivamente (se P non appartenesse al nucleo almeno una delle coalizioni a due persone avrebbe un rimpianto).

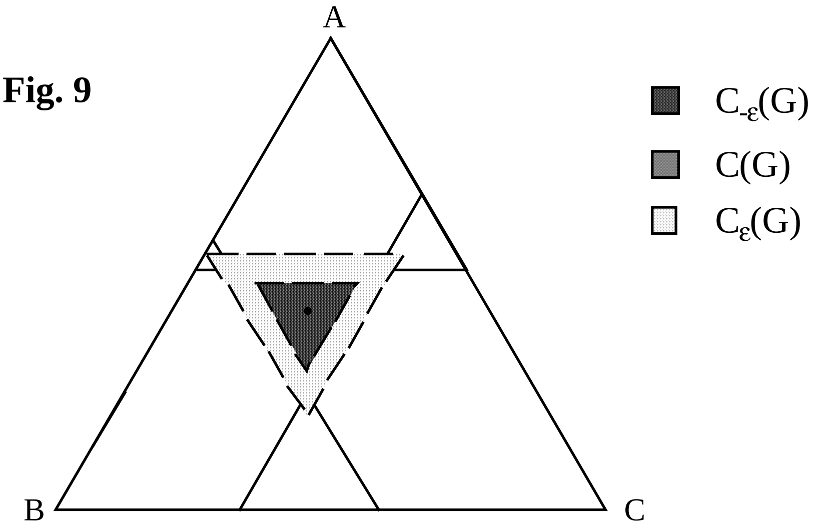
In figura, il minimo eccesso è quello della coalizione (B C) rappresentato dal segmento PQ. E' chiaro che, in questa situazione la coalizione che massimizza il minimo eccesso corrisponde al punto N = $\left(\frac{13}{30}, \frac{10}{30}, \frac{7}{30}\right)$, che è il centro del nucleo (DEF) ed è questo il nucleolo del gioco. Gli eccessi delle varie coalizioni rispetto ad N sono: $\left(\frac{13}{30}, \frac{10}{30}, \frac{7}{30}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{15}\right)$. Il valore $\frac{1}{15}$ rappresenta il max su x del min su S di e(S, x), il che significa che il nucleolo è l'unica imputazione che garantisca a tutte le coalizioni un eccesso $\geq \frac{1}{15}$.

Dato $\varepsilon > 0$, definiamo l'ε-nucleo $C_\varepsilon(G)$ e il -ε-nucleo $C_{-\varepsilon}(G)$ nel seguente modo:

$$C_\varepsilon(G) = \{x \in E(G) \text{ t.c. } e(S, x) \geq -\varepsilon \quad \forall\, S \subset N\}$$

$$C_{-\varepsilon}(G) = \{x \in E(G) \text{ t.c. } e(S, x) \geq \varepsilon \quad \forall\, S \subset N\} \ (S \neq N, S \neq \emptyset).$$

Fig. 9



In pratica, $C_\varepsilon(G)$ è l'insieme delle imputazioni che garantiscono a tutte le coalizioni di non perdere più di ε; $C_\varepsilon(G) \supset C(G)$ e in figura 9 rappresenta il nucleo "ingrassato di ε", che è il triangolo con lati paralleli a quelli del nucleo e distanti ε da essi dalla parte esterna.

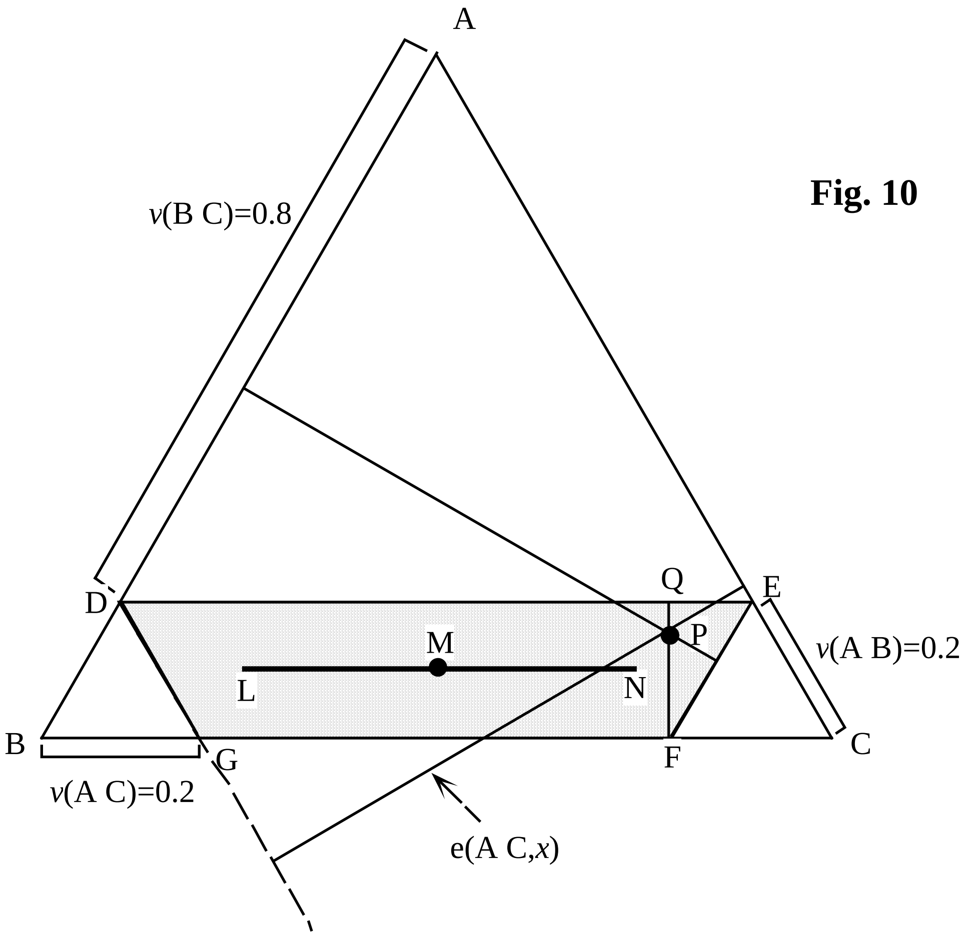
$C_{-\varepsilon}(G)$ è l'insieme delle imputazioni che garantiscono a tutte le coalizioni (escluse N e Ø) di guadagnare almeno ε; $C_{-\varepsilon}(G) \subset C(G)$ e in figura 9 rappresenta il nucleo "dimagrito di ε", che è il triangolo con lati paralleli a quelli del nucleo e distanti ε da essi dalla parte interna.

All'aumentare di ε, $C_{-\varepsilon}(G)$ diventa sempre più piccolo sino a ridursi ad un punto (il nucleolo) quando ε raggiunge il valore $\frac{1}{15}$ (se $\varepsilon > \frac{1}{15}$, $C_{-\varepsilon}(G) = \emptyset$). Questo però non accade in generale, come dimostra il seguente:

Esempio b): $v(A\,B) = 0.2$, $v(A\,C) = 0.2$, $v(B\,C) = 0.8$, (v. Fig.10). In questo caso il nucleo di G è rappresentato dal trapezio isoscele ombreggiato DEFG. Data una generica imputazione $x = (x_1, x_2, x_3)$, gli eccessi delle varie coalizioni rispetto a x sono:

$$e(A, x) = x_1,\ \ e(B, x) = x_2,\ \ e(C, x) = x_3,$$

$$e(A\,B, x) = x_1+x_2-0.2,\ \ e(A\,C, x) = x_1+x_3-0.2,\ \ e(B\,C, x) = x_2+x_3-0.8.$$



Se x è rappresentata dal punto P interno al nucleo gli eccessi sono tutti positivi e rappresentano le distanze di P dalle rette BC, AC, AB, EF, DG, DE rispettivamente. In figura, il minimo eccesso è quello della coalizione (B C) rappresentato dal segmento PQ.

Se consideriamo il -ε·nucleo $C_{-\varepsilon}(G)$, esso all'aumentare di ε si restringe ma non si riduce ad un punto. Dalla figura è chiaro che per $\varepsilon = \frac{1}{10}$. $C_{-\varepsilon}(G)$ si riduce al segmento LN e per $\varepsilon > \frac{1}{10}$ $C_{-\varepsilon}(G)$ è vuoto. Tutti i punti di LN massimizzano il minimo eccesso rendendolo uguale a $\frac{1}{10}$. LN è quello che si chiama *nucleo minimale*, ma non è ancora il nucleolo!

In tutti i punti del segmento LN abbiamo e(A, x) = e(B C, x) = 0.1; allora si cerca di massimizzare il minimo eccesso esclusi questi due. L'imputazione che realizza ciò corrisponde al punto medio M = (0.1, 0.45, 0.45) del segmento LN. In tal caso il nucleolo coincide con M (notiamo che M non è il centro di gravità del nucleo).

In generale, quindi, il procedimento per trovare il nucleolo di un generico gioco a n persone G=<N,v> è piuttosto complicato. Si considera il -ε·nucleo e si fa aumentare ε fino a trovare il nucleo minimale, che è un poliedro in un iperpiano di dimensione $k < n$-1. Mettendosi in questo iperpiano si "dimagrisce" ulteriormente il nucleo minimale fino ad arrivare ad un poliedro di dimensione $k' < k$ e così via. Necessariamente alla fine si arriva ad un unico punto, che definiamo nucleolo del gioco G. Naturalmente tutto ciò vale se il nucleo non è vuoto, se invece il nucleo è vuoto le cose cambiano, come mostra il seguente:

Esempio c): v(A B) = 0.9, v(A C) = 0.8, v(B C) = 0.7, (v. Fig.11). Essendo C(G) = Ø, non esiste alcuna imputazione che soddisfi tutte le coalizioni. Ad esempio l'imputazione x = (0.1, 0.1, 0.8) rappresentata dal punto P in figura dà luogo ai seguenti eccessi:

e(A, x) = 0.1, e(B, x) = 0.1, e(C, x) = 0.8,
e(A B, x) = -0.7, e(A C, x) = 0.1, e(B C, x) = 0.2

Questa ripartizione soddisfa tutte le coalizioni tranne (A B), che per conto suo avrebbe potuto ottenere molto di più ed infatti ha un rimpianto pari a 0.7. In questo caso la strategia non è quella di massimizzare i minimi eccessi ma quella di minimizzare i massimi rimpianti. In figura 11 il triangolo equilatero DEF rappresenta l'insieme delle imputazioni svantaggiose per tutte le coalizioni a due persone.Data una generica imputazione $x \in$ DEF rappresentata dal punto Q, le tre distanze di Q dalle tre rette DE, DF, EF, rappresentano i rimpianti r(A B, x), r(A C, x), r(B C, x).

Nella figura il massimo rimpianto è rappresentato da r(A B, x). E' intuitivamente chiaro che, per minimizzare il massimo rimpianto bisogna scegliere Q coincidente con il centro N=$\left(\frac{13}{30}, \frac{10}{30}, \frac{7}{30}\right)$ del triangolo DEF. In questo caso N rappresenta il nucleolo di G. Ad esso sono associati gli eccessi $\left(\frac{13}{30}, \frac{10}{30}, \frac{7}{30}, -\frac{2}{15}, -\frac{2}{15}, -\frac{2}{15}\right)$. Per ogni altra imputazione, esiste almeno una coalizione che ha un rimpianto maggiore di $\frac{2}{15}$.

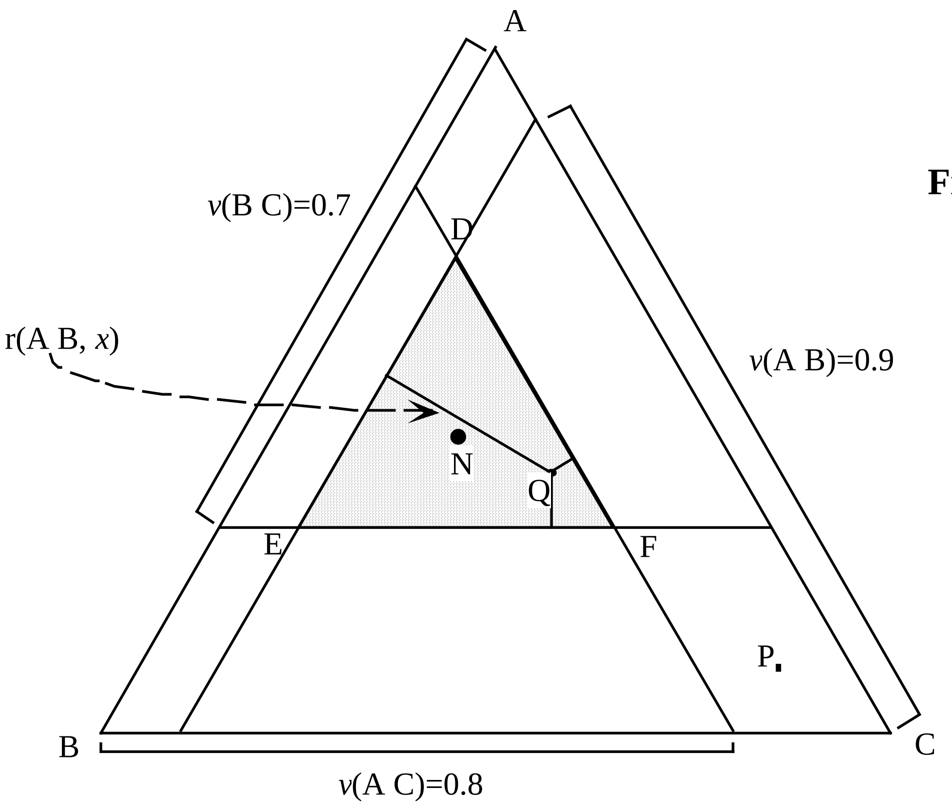


Fig. 11

Se consideriamo l'ε-nucleo $C_\varepsilon(G)$, esso è vuoto per $\varepsilon < \frac{2}{15}$, contiene il solo punto N per $\varepsilon = \frac{2}{15}$, contiene infiniti punti per $\varepsilon > \frac{2}{15}$. Non è questa però la situazione che si verifica in generale: se indichiamo con $\tilde{\varepsilon}$ il minimo su x del massimo su S di $r(S, x)$ risulta che l'ε-nucleo è vuoto per $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$, contiene infiniti punti per $\varepsilon > \tilde{\varepsilon}$ ed è un poliedro X di dimensione minore di n-1 per $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$. In tal caso, per determinare il nucleolo bisognerà cercare tra tutte le imputazioni di X quelle che minimizzano il massimo rimpianto tra i rimpianti minori di $\tilde{\varepsilon}$, cioè "il secondo rimpianto in ordine di grandezza" e, a parità del secondo, "il terzo rimpianto in ordine di grandezza", e così via fino ad arrivare ad un singolo punto che chiameremo, per definizione, nucleolo di G.

Tutte queste considerazioni euristiche si possono formalizzare come segue:

Definizione 17: Definiamo in $\mathbb{R}^n$ l'*ordinamento lessicografico* $\leq_L$ nel seguente modo: dati due vettori $x = (x_1,\ldots,x_n)$ e $y = (y_1,\ldots,y_n)$, diciamo che $x \leq_L y$ se $x = y$ oppure se $\exists$ un intero k $(1 \leq k \leq n)$ t.c. $x_i = y_i \ \forall\, i < k$ e $x_k < y_k$.

Lemma 1: Sia X un sottoinsieme compatto non vuoto di $\mathbb{R}^n$. Allora X ammette uno ed un solo minimo lessicografico.

Definiamo ora l'applicazione θ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ così: $\theta(x)$ è il vettore formato dalle componenti di x disposte in ordine decrescente.

Esempio: $\theta(2, 3, 1, 8) = (8, 3, 2, 1)$.

Definizione 18: Dato un gioco a n persone $G=\langle N,v\rangle$ indichiamo con S_k $(1 \leq k \leq 2^n\text{-}1)$ tutte le coalizioni possibili relative al gioco G. Per ogni imputazione $x(G)$ indichiamo con $\lambda(x)$ il vettore dei rimpianti, cioè poniamo $\lambda_k(x) = r(S_k, x)$. Definiamo *nucleolo* di G l'insieme

$$\eta(G) = \{x \in E(G) \mid \theta(\lambda(x)) \leq_L \theta(\lambda(y)) \ \forall\, y \in E(G)\}$$

Teorema 4: *Il nucleolo* $\eta(G)$ *contiene un unico punto e se* $C(G) \neq \emptyset$ *allora* $\eta(G) \in C(G)$.

In breve: il nucleolo è l'unica imputazione che minimizza lessicograficamente il vettore dei rimpianti ordinati in ordine decrescente.

Il nucleolo verifica i seguenti assiomi: **A1** (stabilità), **A3**(invarianza per *S*-equivalenza), **A4**(simmetria), **A5**(consistenza) e **A6**(proprietà del giocatore di paglia), non verifica invece l'assioma dell'additività (**A2**). Anzi, si può dimostrare che vale la seguente caratterizzazione assiomatica:

Teorema 5: *Il nucleolo è l'unica soluzione puntuale invariante per S-equivalenza, simmetrica e consistente* (Sobolef, 1975).

Notiamo che tra gli assiomi **A1**-**A6** la simmetria, l'invarianza per*S*-equivalenza e la proprietà del giocatore di paglia sono "naturali" e tutte le soluzioni "accettabili" dovrebbero verificarli (v. Tab.1 di pag.9).

La stabilità e la consistenza sono invece due proprietà caratteristiche del nucleolo,

- la consistenza nel senso del teorema 5,
- la stabilità, che impone l'appartenenza al nucleo, è verificata dal nucleolo e non dalle altre soluzioni considerate. Ciò mette in rilievo l'importanza del nucleolo ma il suo principale difetto è la difficoltà di calcolo, infatti questo si effettua risolvendo una sequenza di problemi di programmazione lineare come segue:

Dato il gioco a n persone G=<N,v>, si inizia ricercando la soluzione di:

$$\begin{cases} \min \ \alpha \\ \sum_{i \in S} x_i + \alpha \geq v(S) & \forall S \subset N \\ x \in \mathrm{E(G)} \end{cases}$$

Detto α_1 il minimo del problema, se esso è assunto in corrispondenza di un unico punto $\bar{x}$ allora $\bar{x}$ = η(G). Generalmente, però il minimo viene assunto in tutto un insieme X^1; in tal caso si selezionano le coalizioni che hanno il massimo rimpianto, cioè si individua l'insieme B^1 delle coalizioni tali che $e(S, x) = \alpha_1 \ \forall x \in X^1$. Quindi si procede risolvendo:

$$\begin{cases} \min \ \alpha \\ \sum_{i \in S} x_i + \alpha \geq v(S) & \forall S \in 2^N - B^1 \\ x \in X^1 \end{cases}$$

La soluzione α_2 è il secondo rimpianto in ordine di grandezza, in corrispondenza del quale si ha un insieme di coalizioni B^2. Si continua reiterando il procedimento descritto finché non si giunge ad una soluzione puntuale: il nucleolo.

Nel caso in cui il nucleo non sia vuoto, la proprietà di consistenza del nucleolo η ha un'interessante interpretazione geometrica: η è il "centro lessicografico" del nucleo, nel senso che si ottiene da C(G) con un "dimagrimento" successivo: si cercano i punti di C che siano lontani dal bordo più di ε, si fa aumentare ε fino ad ottenere un poliedro di dimensione minore di n-1 e poi si ripete il procedimento fino ad arrivare ad un unico punto.

Dal punto di vista geometrico, la consistenza equivale alla seguente proprietà del nucleolo: se dal punto η tracciamo un iperpiano π (del tipo $\sum_{i \in S} x_i = \text{costante}$) parallelo ad una faccia del simplesso delle imputazioni e consideriamo $\pi \cap \mathrm{C(G)}$, η è il centro lessicografico di $\pi \cap \mathrm{C(G)}$ qualunque sia π. Nella figura 12 (particolare della Fig.10), ciò significa che, tracciando da η le tre rette parallele ai lati di ABC, η è il punto medio di ciascuno dei tre segmenti in cui le tre rette intersecano il nucleo.

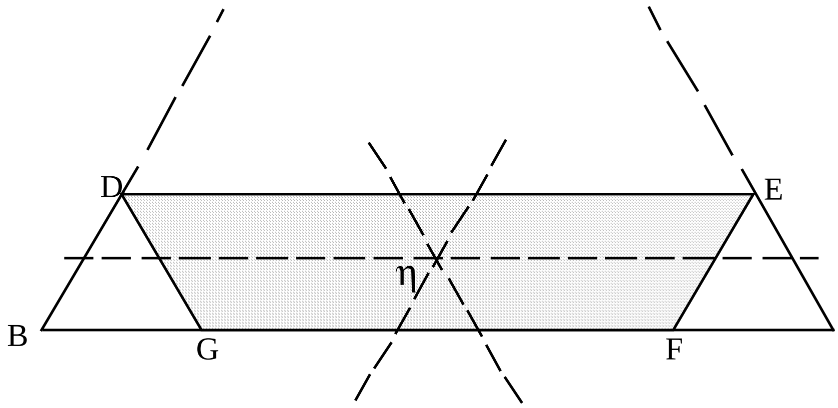


Fig. 12

S5 - Il valore Shapley

Dato un gioco a n persone G=<N,v>, consideriamo una qualunque permutazione π dell'insieme N e un qualunque giocatore $i \in N$. Indichiamo con P(i,π) l'insieme dei giocatori che precedono i nella permutazione π e con $\mathrm{M}(i,\pi) = v(\mathrm{P}(i,\pi) \cup \{i\}) - v(\mathrm{P}(i,\pi))$ il "contributo marginale di i alla coalizione P(i,π)".

Il valore Shapley $\phi: \mathrm{G}^n \to \mathbb{R}^n$ è la soluzione puntuale così definita:

$$\phi_i(\mathrm{G}) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi} \mathrm{M}(i,\pi) \qquad (2)$$

Questa formula si può interpretare così: immaginiamo che gli n giocatori entrino ad uno ad uno in una stanza in un ordine casuale (specificato dalla permutazione π) e che ogni giocatore, appena entrato, si aggreghi alla coalizione S formata dai giocatori già presenti e riceva in premio un'utilità $v(S \cup \{i\}) - v(S)$. Il valore Shapley è la media di tale utilità, calcolata al variare di π in tutti gli n! modi possibili. Cioè ϕ_i(G) è il valore atteso della variabile aleatoria "contributo marginale di i alla coalizione P(i,π)" che può assumere n! valori, ciascuno con probabilità $\frac{1}{n!}$.

Sembra quindi che per calcolare il valore Shapley di un gioco a 10 persone occorra sommare 10!=3˙628˙800 termini. In realtà, quando entra nella stanza, al giocatore i non interessa sapere in che ordine sono entrati gli s giocatori presenti (s=cardinalità di S), né in che ordine entreranno gli n-s-1 giocatori assenti. Quindi il valore $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ si presenta nella sommatoria $s!(n-s-1)!$ volte e di conseguenza la formula del valore Shapley si può riscrivere in questa forma:

$$\phi_i(\mathrm{G}) = \frac{1}{n!}\sum_{S:i \notin S} s!(n-s-1)!(v(S \cup \{i\}) - v(S)) \qquad (3)$$

Poiché le coalizioni S che non contengono i sono 2^{n-1}, questa sommatoria contiene soltanto 2^{n-1} termini (512 se n=10), il che semplifica notevolmente il calcolo.

Si può dimostrare che il vettore ϕ(G) è un'imputazione cioè

(i) $\sum_{i \in N} \phi_i(\mathrm{G}) = v(N),$

(ii) $\phi_i(\mathrm{G})_i \geq v(\{i\})$ per ogni $i \in N$.

Dimostrazione della (i) :

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(\mathrm{G}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n!} \sum_{\pi} (v(P(i,\pi) \cup \{i\}) - v(P(i,\pi))) =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \sum_{i=1}^{n} (v(P(i,\pi) \cup \{i\}) - v(P(i,\pi))) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} v(N) =$$

$$= \frac{1}{n!} n!\, v(N) = v(N).$$

La (ii) discende dal fatto che nella (2) ogni termine della sommatoria è maggiore o uguale di $v(i)$;

Esempio: per un generico gioco a tre persone in normalizzazione (0,1) con tre giocatori A, B, C e funzione caratteristica v(A B) = c, v(A C) = b,v(B C) = a, il valore Shapley risulta:

$$\phi(G) = \left(\frac{2+b+c-2a}{6}, \frac{2+a+c-2b}{6}, \frac{2+a+b-2c}{6} \right).$$

Nel gioco dei Pirati (es.1 pag.1), in cui il nucleo è vuoto, il valore Shapley è $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Se il nucleo non è vuoto (il che accade se a+b+c $\leq$ 2), non è detto che il valore Shapley ci stia; per esempio, nel gioco dei Pirati modificato (es.5 pag.7), il nucleo contiene l'unica imputazione (1,0,0), ma il valore Shapley è $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$. Nel gioco della Produzione (es.2 pag.2) il valore Shapley è $\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{12}, \frac{5}{12}\right)$, e nel gioco dell'Acquedotto (es.3 pag.2) è (0.26, 0.48, 0.26); in entrambi i casi sta nel nucleo.

Il valore Shapley soddisfa gli assiomi **A2**(additività), **A3**(invarianza per *S*-equivalenza), **A4**(simmetria), **A6**(proprietà del giocatore di paglia); non soddisfa invece **A1**(stabilità) né **A5**(consistenza). Inoltre gli assiomi **A2**, **A4**, **A6** caratterizzano il valore Shapley; per dimostrare ciò occorre premettere quanto segue:

Definizione 19: Fissata una coalizione $T \subset N$, $T \neq \emptyset$, dicesi <u>Gioco del Consenso Unanime</u> relativo a T, il gioco $\mathrm{U}_T = \langle N, u_T \rangle$ la cui funzione caratteristica u_T è così definita:

$u_T(S) = 1$ se $S \supset T$, $u_T(S) = 0$ altrimenti.

Lemma 2: I sottoinsiemi di N con un numero pari di elementi sono tanti quanti quelli con un numero dispari di elementi, (per la precisione 2^{n-1}):

La dimostrazione discende immediatamente dalla formula della potenza del binomio:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{n-1}a\,b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

se in essa si pone a=1, b=-1, tenendo conto che il numero di sottoinsiemi di cardinalità pari è $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots$ e quello dei sottoinsiemi di cardinalità dispari è $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots$ □

Lemma 3: Ogni gioco a n persone G=<N,v> è combinazione lineare dei 2^n-1 giochi di Consenso Unanime relativi a tutte le coalizioni non vuote $T \subset N$, cioè $v = \sum_T \lambda_T u_T$ dove i coefficienti λ_T sono dati da: $\lambda_T = \sum_{R \subset T} (-1)^{t-r} v(R)$ (con t=cardinalità di T e r=cardinalità di R). Si può anche dire che i giochi U_T sono una base dello spazio vettoriale IG^n di tutti i giochi cooperativi a n persone (anche non superadditivi) in cui G^n rappresenta un cono convesso.

Dimostrazione: basta dimostrare che $v(S) = \sum_T \lambda_T u_T(S) \quad \forall S \subset N$, ma per la definizione di $U_T(S)$ nella sommatoria restano solo i termini con $T \subset S$ e quindi:

$$\sum_T \lambda_T u_T(S) = \sum_{T \subset S} \lambda_T = \sum_{T \subset S} \sum_{R \subset T} (-1)^{t-r} v(R) =$$

$$= \sum_{R \subset S} \sum_{T: R \subset T \subset S} (-1)^{t-r} v(R) = \sum_{R \subset S} (-1)^r v(R) \sum_{T: R \subset T \subset S} (-1)^t$$

ma se R ≠ S nell'ultima sommatoria ci sono tanti T di cardinalità pari quanti di cardinalità dispari (Lemma 2), per cui essa si annulla; allora nella prima sommatoria resta solo il termine con R = S e quindi:

$$\sum_T \lambda_T u_T(S) = (-1)^s v(S) \sum_{T=S} (-1)^t = v(S).$$ □

Dimostriamo ora la caratterizzazione assiomatica del valore Shapley:

Teorema 6: *Nella classe* G^n *dei giochi cooperativi a n persone, il valore Shapley è l'unica soluzione puntuale additiva, simmetrica e avente la proprietà del giocatore di paglia.*

Dimostrazione: Sia f una soluzione puntuale che verifica i tre assiomi suddetti e consideriamo il gioco $\lambda_T U_T$ dove λ_T è il valore definito nel Lemma 3. Poiché i giocatori che non appartengono a T sono di paglia, deve essere $\phi(\lambda_T U_T) = 0 \quad \forall\, i \notin T$. Inoltre, poiché permutando fra loro i giocatori di T il gioco non cambia, per la simmetria, f deve assegnare lo stesso valore a tutti i giocatori di T e quindi deve essere $\phi(\lambda_T U_T) = \frac{\lambda_T}{t} \quad \forall\, i \in T$.

In altre parole i due assiomi finora considerati individuano univocamente f sui giochi $\lambda_T U_T$ (e quindi per tali giochi f coincide con il valore Shapley). Ma allora, per l'additività, f coincide con il valore Shapley per ogni gioco G a n persone in quanto, per il lemma 3, G è somma di giochi del tipo $\lambda_T U_T$. □

Una condizione sufficiente affinché il valore Shapley appartenga al nucleo è che il gioco G=<N,v> sia *convesso*. Diamo quindi la seguente:

Definizione 20: Dicesi *gioco convesso* un gioco G=<N,v> tale che:

$$v(S \cap T) + v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \quad \forall\ S, T \subset N.$$

Questa condizione si può anche riscrivere nella forma:

$$v(S \cup T) - v(S) \geq v(T) - v(S \cap T),$$

Posto $C=(S \cup T) - S$, il primo membro di questa disuguaglianza rappresenta il "contributo marginale" di C a S e il secondo membro rappresenta il "contributo marginale" di C a $S \cap T$. Quindi la convessità del gioco si può anche enunciare così: il contributo marginale di una coalizione C ad un'altra coalizione S disgiunta da C aumenta (o meglio non diminuisce) ingrandendo S.

Teorema 7: *Se il gioco* G=<N,v> *è convesso, il valore Shapley appartiene al nucleo.* (corollario ovvio: i giochi convessi hanno nucleo non vuoto).

Dimostrazione: Sia S una qualunque coalizione e π una qualunque permutazione di N. Usando le stesse notazioni della definizione del valore Shapley, indichiamo con $\mathrm{P}(i,\pi)$ l'insieme dei giocatori che precedono i nella permutazione π e con $\mathrm{M}(i,\pi)$ = $= v(\mathrm{P}(i,\pi) \cup \{i\}) - v(\mathrm{P}(i,\pi))$ il contributo marginale di i alla coalizione $\mathrm{P}(i,\pi)$.

Indichiamo inoltre con $i_1, i_2,\ldots,i_k,\ldots,i_s$ gli elementi di S nell'ordine in cui compaiono in π. Per la convessità di G, si ha che:

$$\mathrm{M}(i_k,\pi) \geq v(i_1, i_2,\ldots,i_k) - v(i_1, i_2,\ldots,i_{k-1})$$

da cui:

$$\sum_{k=1}^{s} M(i_k,\pi) \geq \sum_{k=1}^{s} (v(i_1,i_2,\ldots,i_k) - v(i_1,i_2,\ldots,i_{k-1})) = v(S)$$

Ne deriva che il vettore la cui componente i-esima è $\mathrm{M}(i,\pi)$ appartiene al nucleo di G. Poiché il nucleo di G è un insieme convesso e poiché il valore Shapley è la media dei vettori $\mathrm{M}(i,\pi)$ al variare della permutazione π, anche il valore Shapley sta nel nucleo. □

Consideriamo ora una particolare classe di giochi convessi, i cosiddetti giochi decomponibili in elementi di costo.

Sia G=<N,v> un <u>Gioco di Costo</u>, cioè un gioco la cui funzione caratteristica è sempre negativa, in tal caso poniamo $c(S) = -v(S)$ dove $c(S)$ ha il significato di costo che devono pagare complessivamente i giocatori di S coalizzandosi.

Supponiamo che ci siano m diversi servizi, o "elementi di costo" $\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2,\ldots,\mathrm{E}_m$ (ad es. strade, linee elettriche, terminali...), e che ogni giocatore possa usare uno o più di essi. Indichiamo con $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\ldots,\mathrm{P}_m$ i costi rispettivi di $\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_2,\ldots,\mathrm{E}_m$ e con S_i l'insieme dei giocatori che utilizzano l'elemento di costo E_i; sia inoltre s_i la cardinalità di S_i.

Se $c(S) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ k: S \cap S_k \neq \emptyset}} \mathrm{P}_k$, si dice che <u>G è decomponibile in elementi di costo</u>.

Ciò significa che il costo che grava su S è la somma dei costi dei servizi usati da almeno un giocatore di S.

Esempi classici di situazioni che danno luogo a giochi di questo tipo sono le tariffe aeroportuali (es.8 pag.15), le tariffe telefoniche, la ripartizione delle spese condominiali ecc...

Si vede facilmente che se G è decomponibile in elementi di costo, lo si può esprimere come somma di m giochi semplici $G_1, G_2,\ldots,G_m$ le cui funzioni di costo $c_1, c_2,\ldots,c_m$ sono così definite:

$$c_k(S) = \begin{cases} P_k & \text{se } S \cap S_k \neq \emptyset \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

I giochi $G_1, G_2,\ldots,G_m$ sono convessi e la somma di giochi convessi è convessa, quindi otteniamo il seguente:

Teorema 8: *Ogni gioco decomponibile in elementi di costo è convesso (e quindi ha nucleo non vuoto e il valore Shapley appartiene al nucleo).*

Per i giochi di questo tipo possiamo dare una formula semplice per calcolare il valore Shapley. Infatti per ciascuno dei giochi G_k il valore Shapley è dato da:

$$\phi_i(G_k) = \begin{cases} 0 & se\ x_i \notin S_k \\ -\dfrac{P_k}{s_k} & se\ x_i \in S_k \end{cases}$$

infatti, per la proprietà del giocatore di paglia, i giocatori che non usano E_k non devono pagare, mentre per la proprietà di simmetria, i giocatori che usano E_k devono ripartirsi equamente la spesa totale P_k. Infine per la proprietà di additività, il valore Shapley di G è semplicemente la somma dei $\phi_i(G_k)$, cioè:

$$\phi_i(G) = -\sum_{k:\, i \in S_k} \frac{P_k}{s_k}.$$

Concludiamo accennando ad un'altra interessante caratterizzazione assiomatica del valore Shapley nella classe G^* di tutti i giochi cooperativi con un numero qualsiasi di giocatori.

Dato un gioco $G=<N,v>$, una soluzione puntuale f e una coalizione$T \subset N$, definiamo un opportuno "gioco ridotto" $G'(T,f)=<T,v'_{T,f}>$ (in un senso diverso da quello dell'assioma **A5** di consistenza di pag.10) nel seguente modo:

$$v'_{T,f}(S) = v(S \cup (N\text{-}T)) - \sum_{k \in N-T} f_k(< S \cup (N-T), v >).$$

In altre parole, l'utilità della coalizione S nel gioco ridotto si ottiene sottraendo dall'utilità di $S \cup N\text{-}T$ in G i pagamenti effettuati ai giocatori di $N\text{-}T$ secondo la soluzione f applicata a $< S \cup (N-T), v >$.

Definizione 21: Una soluzione f si dice *coerente* se per ogni gioco G=<*N*,*v*>, e per ogni coalizione non vuota $T \subset N$, f assegna ai giocatori di *T* la stessa utilità che assegnerebbe loro considerando il gioco ridotto G'(*T*,f).

Ci occorre ancora la seguente:

Definizione 22: Una soluzione f si dice *standard per i giochi a due persone* se per ogni gioco a due persone G=<{1,2},*v*> si ha:

$$f_1(G) = \frac{v(1\,2)+v(1)-v(2)}{2} \quad \text{e} \quad f_2(G)= \frac{v(1\,2)+v(2)-v(1)}{2}$$

Ciò premesso si può enunciare il seguente:

Teorema 9: *Esiste un'unica soluzione puntuale* f *definita su* G^* *che sia coerente e standard per i giochi a due persone: il valore Shapley*.

Estensioni multilineari

Owen (1972) ha proposto un metodo ingegnoso per calcolare il valore Shapley, basato sulla nozione di *estensione multilineare*.

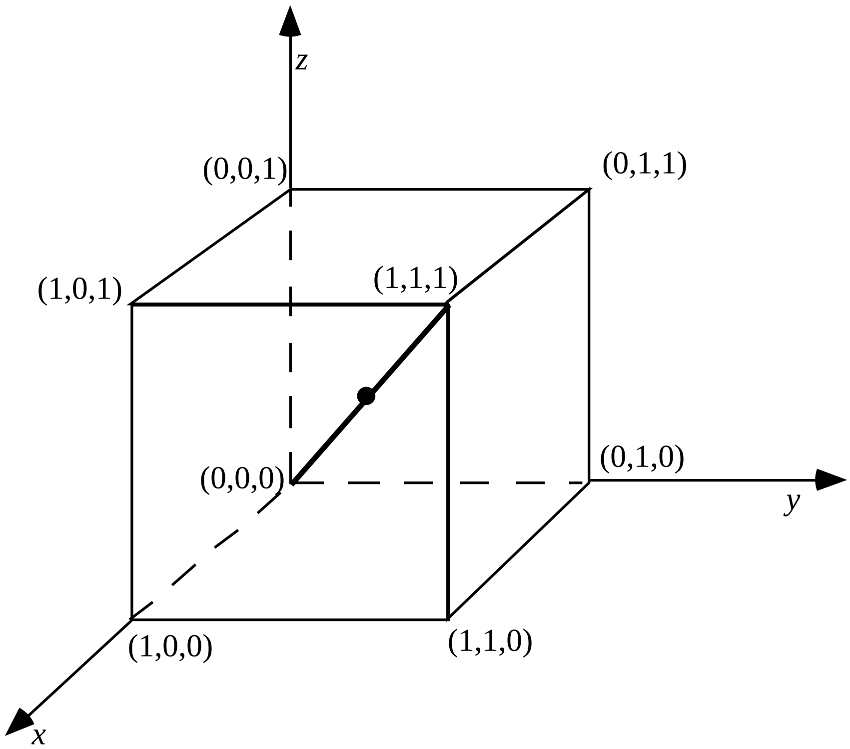


Fig. 13

Sia G=<*N*,*v*> un gioco a *n* persone. Una generica coalizione $S \subset N$ può essere individuata dal cosiddetto vettore caratteristico e^S la cui *i*-esima componente $e^S(i)$ vale 1 se $i \in S$ e 0 altrimenti. Pensando gli e^S come punti in $\mathbb{R}^n$, al variare di *S* otteniamo i 2^n vertici dell'ipercubo *n*-dimensionale $[0,1]^n$. Ad esempio nel caso *n*=3, posto *N*={A, B, C}, le otto coalizioni Ø, A, B, C, AB, AC, BC, ABC corrispondono agli otto vertici (0,0,0), (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1) del cubo di Fig.13.

La funzione caratteristica *v* del gioco G si può considerare allora come un'applicazione di $\{0,1\}^n$ (l'insieme dei vertici dell'ipercubo) in $\mathbb{R}$.

Ci chiediamo se essa si può estendere a tutto l'ipercubo mediante una f: $[0,1]^n \to \mathbb{R}$ che sia lineare rispetto a ciascuna variabile. Si può dimostrare che una f siffatta esiste ed è unica e precisamente è data dalla formula:

$$\mathrm{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{S \subset N} \left(\prod_{i \in S} x_i \prod_{i \in N-S} (1 - x_i) \right) v(S) \quad .$$

La f così definita si chiama <u>*estensione multilineare*</u> di *v*.

Esempio: nel generico gioco a tre persone in normalizzazione (0,1) con tre giocatori A, B, C e funzione caratteristica *v*(A B) = c, *v*(A C) = b, *v*(B C) = a, l'estensione multilineare di v è data da:

$$\mathrm{f}(x,y,z) = \mathrm{c}xy(1\text{-}z) + \mathrm{b}xz(1\text{-}y) + \mathrm{a}yz(1\text{-}x) + xyz$$

Il legame tra l'estensione multilineare di *v* e il valore Shapley è espresso dal seguente:

Teorema 10: *Il valore Shapley* ϕ(G) *del gioco* G=<*N*,*v*> *è dato da*:

$$\phi_i(\mathrm{G}) = \int_0^1 \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_i}(t, t, \ldots, t)\, dt$$

ovverosia: il valore Shapley è l'integrale del Gradiente di f lungo la diagonale principale dell'ipercubo $[0,1]^n$.

Per la dimostrazione occorre il seguente:

Lemma 4: $\displaystyle \int_0^1 t^m (1-t)^n\, dt = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$.

Dimostrazione: Integrando per parti e reiterando il metodo n volte otteniamo:

$$\varphi(m,n) = \int_0^1 t^m (1-t)^n\, dt = \left[\frac{t^{m+1}(1-t)^n}{m+1} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{m+1}}{m+1} n (1-t)^{n-1}\, dt =$$

$$= 0 + \frac{n}{m+1} \varphi(m+1, n-1) = \frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)} \varphi(m+2, n-2) = \ldots$$

$$= \frac{n!}{(m+1)\ldots(m+n)} \varphi(m+n, 0) = \frac{n!}{(m+1)\ldots(m+n+1)}$$

poiché $\displaystyle \varphi(m+n,0) = \int_0^1 t^{m+n} dt = \frac{1}{(m+n+1)}$.

Ma $$\frac{n!}{(m+1)\ldots(m+n+1)} = \frac{n!\,m!}{(m+1)\ldots(m+n+1)\,m!} = \frac{n!\,m!}{(m+n+1)!} \qquad \square$$

Dimostrazione del teorema 10:

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_i} = \sum_{S:i\in S}\Big(\prod_{k\in S-\{i\}} x_k \prod_{k\in N-S}(1-x_k)\Big)v(S) - \sum_{U:i\notin U}\Big(\prod_{k\in U} x_k \prod_{k\in N-U-\{i\}}(1-x_k)\Big)v(U) =$$

$$= \sum_{U:i\notin U}\Big(\prod_{k\in U} x_k \prod_{k\in N-U-\{i\}}(1-x_k)\Big)\Big(v(U\cup\{i\} - v(U)\Big)$$

da cui:

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t,t,\ldots,t)\,dt = \sum_{U:i\notin U}\Big(v(U\cup\{i\} - v(U)\Big)\int_0^1 t^u(1-t)^{n-u-1}\,dt =$$

$$= \frac{u!(n-u-1)!}{n!}\sum_{U:i\notin U}\Big(v(U\cup\{i\} - v(U)\Big) = \phi_i(\mathrm{G}) \qquad \square$$

Esempio: nel generico gioco a tre persone in normalizzazione (0,1) con tre giocatori A, B, C e funzione caratteristica v(A B) = c, v(A C) = b, v(B C) = a, si ha:

$$\mathrm{f}(x,y,z) = \mathrm{c}xy(1-z) + \mathrm{b}xz(1-y) + \mathrm{a}yz(1-x) + xyz$$

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} = \mathrm{c}y(1-z) + \mathrm{b}z(1-y) - \mathrm{a}yz + yz$$

$$\int_0^1 \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x}(t,t,t)\,dt = \int_0^1 (\mathrm{c}t - \mathrm{c}t^2 + \mathrm{b}t - \mathrm{b}t^2 - \mathrm{a}t^2 + t^2)\,dt =$$

$$\frac{\mathrm{b}+\mathrm{c}}{2} + \frac{1-\mathrm{a}-\mathrm{b}-\mathrm{c}}{3} = \frac{2-2\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}}{6}$$

che è proprio la prima componente del valore Shapley.

L'estensione multilineare si presta ad un'interessante rilettura in chiave probabilistica, la quale spesso permette di calcolare rapidamente (se pure in modo approssimato) il valore Shapley, come dimostra il seguente :

Esempio 9 : Gioco dei Guanti

Siano L e R due insiemi disgiunti di giocatori con l e r elementi rispettivamente e sia N = L $\cup$ R, $n=l+r$. Ogni giocatore di L ha un guanto sinistro, ogni giocatore di R ha un guanto destro. Un guanto singolo non vale nulla, un paio di guanti vale 1. Questa situazione dà luogo al seguente gioco G=<N,v> la cui funzione caratteristica è definita da:

$v(S)$ = min (s_r,s_l), dove s_r e s_l sono rispettivamente le cardinalità di $S \cap$ R e $S \cap$ L, cioè il numero di guanti destri e sinistri posseduti da S.

In questo caso nella formula del valore Shapley:

$$\phi_i(\mathrm{G}) = \frac{1}{n!}\sum_{S:i\notin S} s!(n-s-1)!(v(S\cup\{i\})-v(S))$$

il termine $v(S \cup \{i\})$ - $v(S)$ vale 1 se $i \in$ R e $s_r < s_l$ oppure $i \in$ L e $s_l < s_r$, vale 0 altrimenti. Comunque il calcolo di ϕ_i(G) è molto lungo perché bisogna sommare un numero enorme di termini del tipo $s!(n-s-1)!$(se l e r sono dell'ordine di 100 la somma contiene circa 10^{60} termini; ammettendo di sommare un miliardo di termini al secondo, il tempo totale è 10^{33} volte maggiore dell'età dell'Universo). Il calcolo esatto del valore Shapley è quindi impossibile. Tuttavia è possibile calcolarlo approssimativamente con metodi probabilistici.

Detta f($x_1, x_2,\ldots,x_n$) l'estensione multilineare di un gioco G=<N,v>, le seguenti formule:

$$\mathrm{f}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{S\subset N}\left(\prod_{i\in S} x_i \prod_{i\in N-S}(1-x_i)\right)v(S)$$

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_i} = \sum_{S:i\notin S}\left(\prod_{k\in S} x_k \prod_{k\in N-S-\{i\}}(1-x_k)\right)\left(v(S\cup\{i\})-v(S)\right) \qquad (4)$$

possono essere rilette in chiave probabilistica.

Supponiamo che una generica coalizione S si formi in modo random e che gli n giocatori $1,2,\ldots,n$ abbiano rispettivamente le probabilità $x_1, x_2,\ldots,x_n$ di partecipare alla coalizione S. Esempio tipico: n individui ricevono la convocazione per un'assemblea; non è possibile sapere in anticipo chi di loro andrà all'assemblea, ma è possibile (conoscendo $x_1, x_2,\ldots,x_n$) calcolare la probabilità di ciascuna delle 2^n composizioni possibili dell'assemblea. Infatti la probabilità p(S) che si formi una prefissata coalizione S è data da $\prod_{i\in S} x_i \prod_{i\in N-S}(1-x_i)$, quindi f($x_1, x_2,\ldots,x_n$) non è altro che $\sum_{S\subset N} \mathrm{p}(S)\, v(S)$ = E($v(S)$), cioè la media della variabile aleatoria $v(S)$.

Supponiamo ora che il giocatore i decida di andare all'assemblea: egli potrà trovarci una qualunque coalizione S e potrà quindi calcolare il valore atteso E(M(i,S)) dell'utilità marginale M(i,S)=$v(S \cup \{i\})$ - $v(S)$ che gli spetta. Risulta che E(M(i,S)) non è altro che $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_i}$. Infatti, poiché la probabilità p(S/i) che i trovi S è $\prod_{k\in S} x_k \prod_{k\in N-S-\{i\}}(1-x_k)$, si ha :

$$\mathrm{E}(\mathrm{M}(i,S)) = \sum_{S:i\notin S} \mathrm{p}(S/i)\mathrm{M}(i,S) = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_i}$$

Torniamo ora al gioco dei Guanti. Consideriamo il giocatore i e supponiamo, per fissare le idee, che abbia un guanto destro ($i \in$ R): data una qualunque coalizione S non contenente i il contributo marginale $v(S \cup \{i\})$ - $v(S)$ vale 1 se $s_r < s_l$ e 0 altrimenti. Ne deriva che $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_i}$ = p($s_r < s_l$). Supponiamo ora che tutti i giocatori abbiano la stessa probabilità t di partecipare a una qualunque coalizione. Allora possiamo considerare s_r, s_l come variabili aleatorie ed è chiaro che:

$$\mathrm{p}(s_r = k) = \binom{r-1}{k} t^k (1-t)^{r-1-k} \quad \text{e} \quad \mathrm{p}(s_l = k) = \binom{l}{k} t^k (1-t)^{l-k},$$

cioè trattasi di variabili aleatorie binomiali di parametri r-1,t e l,t rispettivamente. Le loro medie sono quindi $(r-1)t$ e lt e le loro varianze sono $(r-1)t(1-t)$ e $lt(1-t)$. Posto Y = s_l-s_r , Y ha media $(l-r+1)t$ e varianza $(l+r-1)t(1-t)$. Inoltre:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,t,\ldots,t) = \mathrm{p}(s_r<s_l) = \mathrm{p}\left(Y \geq \tfrac{1}{2}\right).$$

Se r e l sono grandi, possiamo approssimare Y con una variabile aleatoria normale con egual media e varianza e ricavare immediatamente $\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,t,\ldots,t)$ dalla tavola della funzione di distribuzione cumulata della variabile aleatoria normale standardizzata .

Integrando numericamente tra 0 e 1 il valore trovato come funzione di t, si trova facilmente un'approssimazione del valore Shapley $\phi_i(G)$ per il gioco dei Guanti.

Esempio numerico: r = 96, l = 101. La leggera prevalenza dei guanti sinistri fa supporre che i possessori di guanti destri siano leggermente avvantaggiati. Il valore Shapley approssimato, calcolato come sopra, risulta ϕ_i = 0.6 se $i \in$ R, ϕ_i = 0.38 se $i \in$ L. Perciò il vantaggio dei membri di R in realtà è più grande di quanto sembrerebbe dal semplice confronto dei numeri r e l.

Giochi composti

Per introdurre la definizione di gioco composto partiamo dall'esempio delle Elezioni Presidenziali degli U.S.A., dove gli elettori di ciascuno stato eleggono un certo numero di senatori che a loro volta eleggono il presidente. Quindi un candidato, per vincere, deve fare in modo che l'insieme degli stati in cui egli raggiunge la maggioranza dei voti porti in senato la maggioranza dei senatori. Questo non significa che il candidato ha la maggioranza dei voti di tutta la popolazione (basta considerare il seguente esempio con due stati: A con 1 milione, B con 10 milioni di abitanti che eleggono rispettivamente 1 e 10 senatori; un candidato che ha 0 voti nello stato A e 5˙000˙001 nello stato B diventa presidente).

La formalizzazione di questo semplice esempio sotto forma di *gioco composto* è piuttosto complicata. Sia n il numero degli stati, M_i l'insieme degli elettori dell'i-esimo stato, $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$ l'insieme di tutti gli elettori, N l'insieme degli stati, p_i il numero dei senatori eletti nell'i-esimo stato. Siano $G_1,\ldots,G_n$ i Giochi delle elezioni nei singoli stati, cioè $G_i = \langle M_i, w_i \rangle$ dove la funzione caratteristica w_i è definita da:

$$w_i(S_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } s_i > \frac{m_i}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove, come al solito s_i e m_i rappresentano le cardinalità di S_i e M_i. Sia G=<N,v> il Gioco delle elezioni al Senato, dove la funzione caratteristica v è definita da:

$$v(T) = \begin{cases} 1 & se \quad \sum_{i \in T} p_i > \sum_{i \notin T} p_i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

L'intero meccanismo delle elezioni presidenziali può essere rappresentato dal gioco composto G' = <M,u> la cui funzione caratteristica u è definita da: $u(S) = v(T)$, dove $T=\{i \mid w_i(S \cap M_i)=1\}$. Indichiamo questo gioco composto con $G[G_1, \ldots G_n]$.

Questa può essere presa come definizione di gioco composto nel caso in cui i giochi "interni" $G_1, \ldots G_n$ siano giochi semplici. Ma si può dare anche una definizione più generale che vale anche se $G_1, \ldots G_n$ non sono semplici.

Definizione 23: Dati n giochi $G_1,\ldots,G_n$ con G_i=<M_i, w_i>, supponiamo che ciascun G_i sia in normalizzazione (0,1) e che gli insiemi M_i siano disgiunti; sia inoltre G=<N,v> con $N=\{1,\ldots,n\}$ un generico gioco a n persone e sia $f(x_1,\ldots,x_n)$ l'estensione multilineare di v. Definiamo il *gioco composto* G' = <M, u> = $G[G_1,\ldots,G_n]$ nel seguente modo:

$M = M_1 \cup M_2 .... \cup M_n$,
$u(S) = f(w_1(S \cap M_1),\ldots,w_n(S \cap M_n))$.

Esplicitando l'espressione dell'estensione multilineare si ha equivalentemente:

$$u(S) = \sum_{T \subset N} \left(\prod_{i \in T} w_i(S \cap M_i) \prod_{i \notin T} (1 - w_i(S \cap M_i)) \right) v(T)$$

Nel caso che $G_1,\ldots,G_n$ siano semplici si ricade nella definizione vista prima. Infatti nella sommatoria resta soltanto un termine, quello per cui tutti i fattori del prodotto fra parentesi sono uguali a 1; questo termine corrisponde alla coalizione $T = \{i \mid w_i(S \cap M_i)=1\}$, e allora $u(S) = v(T)$.

Si può dimostrare il seguente:

Teorema 11: *Siano* G_i=<M_i, w_i> ($i=1,\ldots,n$; $M_i \cap M_j = \emptyset$ se $i \neq j$) *n giochi in normalizzazione* (0,1), G=<N,v> *un gioco a n persone e* G'=<M, u> = $G[G_1,\ldots,G_n]$ *il gioco composto definito come sopra. Siano inoltre* $g=(g_1,\ldots,g_n)$, f, h *le estensioni multilineari di* $w_1,\ldots,w_n$, v, u *rispettivamente. Allora si ha* $h = f \circ g$.

Ciò significa che la composizione di giochi corrisponde alla composizione delle estensioni multilineari. Poiché l'estensione multilineare è strettamente collegata col valore Shapley, si potrebbe pensare che anche tale valore si componga, cioè $\phi_i(G') = \phi_i(G_j)\ \phi_j(G)$ per $i \in M_j$. In effetti, questo in generale è falso, come dimostra il seguente esempio, che è interessante anche perché dimostra come il teorema 10 può semplificare il calcolo del valore Shapley di un gioco composto:

Esempio 10: Consiglio di Sicurezza dell'ONU

Il Consiglio di Sicurezza delle Nazioni Unite consiste di quindici membri di cui cinque permanenti. Le mozioni devono essere approvate da almeno nove membri fra cui tutti i cinque permanenti. E' facile vedere che la situazione si può rappresentare con un gioco composto $G'=G[G_1,G_2]$, dove G, G_1,G_2 sono così definiti:

$G_1=<M_1, w_1>$ dove M_1 è l'insieme dei cinque membri permanenti e $w_1(M_1)=1$, $w_1(S)=0$ se $S\neq M_1$.

$G_2=<M_2, w_2>$ dove M_2 è l'insieme dei dieci membri transitori e $w_2(M_2)=1$ se M_2 ha almeno quattro elementi, $w_2(M_2) = 0$ altrimenti. Notiamo che questo è un gioco improprio cioè non superadditivo, ma ciò non inficia la validità del teorema 11.

$G=<\{M_1,M_2\},v>$ è un gioco a due persone dove $v(\{M_1\}) = v(\{M_2\}) = 0$, $v(\{M_1,M_2\})=1$.

Per la proprietà di simmetria il valore Shapley dei giochi G_1,G_2, G è rispettivamente:

$$\phi(G_1)=\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right),$$
$$\phi(G_2)=\left(\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10}\right)$$
$$\phi(G)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Il valore Shapley del gioco composto G' è più difficile da calcolare. Osserviamo dapprima che l'estensione multilineare g_1 di w_1 è data da $g_1(x_1,\ldots,x_5) = x_1x_2x_3x_4x_5$. Detta g_2 l'estensione multilineare di w_2, anziché calcolare direttamente $g_2(x_6,\ldots,x_{15})$, calcoliamo $\frac{\partial g_2}{\partial x_i}(t,t,t,t,t,t,t,t,t,t)$ con $i \geq 6$ usando la formula:

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_i} = \sum_{S:i\notin S}\left(\prod_{k\in S} x_k \prod_{k\in M_2-S-\{i\}}(1-x_k)\right)\left(w_2(S\cup\{i\})-w_2(S)\right)$$

Nella sommatoria rimangono soltanto i termini per cui $w_2(S)=0$ ma $w_2(S\cup\{i\})=1$ che corrispondono alle coalizioni S di tre elementi non contenenti i; questi termini sono in numero di $\binom{9}{3} = 84$ e quindi $\frac{\partial g_2}{\partial x_i}(t,t,t,t,t,t,t,t,t,t) = 84\, t^3(1-t)^6$. Infine osserviamo che l'estensione multilineare di G è data da $f(y_1,y_2) = y_1y_2$.

Per il teorema 11 l'estensione multilineare h del gioco composto $G'=<M_1 \cup M_2, u>$ è data da:

$h(x_1,\dots,x_{15}) = f(g_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5),g_2(x_6,\dots,x_{15})) = x_1x_2x_3x_4x_5\, g_2(x_6,\dots,x_{15})$

e quindi se $i > 5$:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_{15}) = x_1x_2x_3x_4x_5\frac{\partial g_2}{\partial x_i}(x_6,\dots,x_{15})$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(t,t,t,t,t,t,t,t,t,t,t,t,t,t,t) = t^5 84t^3(1-t)^6 = 84t^8(1-t)^6$$

ne segue che se $i > 5$ il valore Shapley del gioco composto è dato da:

$$\phi_i(G') = \int_0^1 84t^8(1-t)^6\,dt = 84\frac{8!6!}{15!} = \frac{4}{2145}$$

Quindi i dieci membri transitori ricevono complessivamente i $\frac{40}{2145}$ dell'utilità complessiva; ne deriva che i cinque membri permanenti ricevono i restanti $\frac{2105}{2145}$, cioè $\frac{421}{2145}$ a testa (per la simmetria).

Concludiamo che i membri permanenti del Consiglio di Sicurezza fanno la parte del leone nella suddivisione del potere. Infatti, se vogliamo credere al valore Shapley, il potere di un membro permanente è 105.25 volte superiore al potere di un membro transitorio.

Questo stesso esempio dimostra che il valore Shapley, contrariamente all'estensione multilineare, non si compone. Infatti, se il valore Shapley si componesse, dovremmo avere che:

se $i \le 5$, $\phi_i(G')=\phi_1(G)\phi_i(G_1) = \frac{1}{2}\ \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

se $i > 5$, $\phi_i(G')=\phi_2(G)\phi_i(G_2) = \frac{1}{2}\ \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$

e quindi il potere di un membro permanente sarebbe solo il doppio di quello di un membro transitorio.

Il Potenziale

Indichiamo con G^* l'insieme di tutti i giochi cooperativi con un numero qualsiasi di giocatori (in particolare avremo anche bisogno di un gioco a zero giocatori che indicheremo con $G_0=<\emptyset,v>$).

Definizione 24: per <u>*potenziale*</u> si intende una funzione $P: G^* \to \mathbb{R}$ tale che:

a) $P(G_0) = 0$

b) $\sum_{i\in N}(P(<N,v>) - P(<N-\{i\},v>)) = v(N) \qquad \forall$ gioco $G =<N,v> \in G^*$

Se non richiediamo la condizione a) e supponiamo che $P(G_0)$ sia una certa costante K, si vede facilmente che dalla condizione b) discende:

$$P(<\{1\},v>) = v(\{1\})+K$$

$$P(<\{1,2\},v>) = \frac{v(\{1,2\}) + P(<\{1\},v>) + P(<\{2\},v>)}{2}$$

$$P(<\{1,2,3\},v>) = \frac{v(\{1,2,3\}) + P(<\{1,2\},v>) + P(<\{1,3\},v>) + P(<\{2,3\},v>)}{3}$$

e in generale, se G=<*N*,*v*> è un gioco a *n* persone:

$$P(G) = \frac{1}{n}\left(v(N) + \sum_{i\in N} P(< N - \{i\}, v >)\right).$$

Questa formula fornisce un metodo ricorsivo per calcolare "facilmente" il potenziale di qualunque gioco (con un numero finito di giocatori) a partire dal potenziale dei suoi sottogiochi a 1, 2, 3, … giocatori.

Ne discende anche che la funzione P: $G^* \to \mathbb{R}$ che soddisfa la condizione b) è unica a meno di una costante K; se imponiamo anche la condizione a), fissando così K=0, P è effettivamente unica.

Il potenziale P è strettamente collegato al valore Shapley ϕ, come dimostra il seguente:

Teorema 12: *Per un gioco a n persone* G=<*N*,*v*>, *il valore Shapley è dato da*:

$$\phi_i(G) = P(< N, v >) - P(< N - \{i\}, v >)$$

Dimostrazione: Definiamo la funzione Q(<*N*,*v*>) nella seguente maniera:

$$Q(< N,\ v >) = \sum_{S\subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} v(S)$$

dove, come al solito *s*, *n* indicano le cardinalità di *S*, *N* rispettivamente.

Si verifica facilmente che Q(<*N*,*v*>) soddisfa la condizione b) della definizione di potenziale. Infatti:

$$\sum_{i\in N} (Q(< N, v >) - Q(< N - \{i\}, v >)) =$$

$$= \sum_{i\in N} \left(\sum_{S\subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} v(S) - \sum_{T\subset N-\{i\}} \frac{(t-1)!(n-1-t)!}{(n-1)!} v(T) \right) =$$

$$= \sum_{S\subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{(n-1)!} v(S) - \sum_{i\in N} \sum_{T\subset N-\{i\}} \frac{(t-1)!(n-1-t)!}{(n-1)!} v(T)$$

ma nell'ultima doppia sommatoria *v*(*T*) compare *n-t* volte con lo stesso coefficiente e quindi:

$$\sum_{i\in N}(\mathrm{Q}(<N,v>)-\mathrm{Q}(<N-\{i\},v>)) =$$

$$= \sum_{S\subset N}\frac{(s-1)!(n-s)!}{(n-1)!}v(S) \; - \sum_{T\subset N,\, T\neq N}\frac{(t-1)!(n-t)!}{(n-1)!}v(T) \;=\; v(N).$$

Per quanto detto prima, Q(<*N*,*v*>) coincide con il potenziale P(<*N*,*v*>) a meno di una opportuna costante K, e si vede facilmente che K=0 (basta considerare il caso n=1).

Si ha allora:

$$\mathrm{P}(<N,v>)-\mathrm{P}(<N-\{i\},v>) =$$

$$= \sum_{S\subset N}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}v(S) - \sum_{T\subset N-\{i\}}\frac{(t-1)!(n-1-t)!}{(n-1)!}v(T) =$$

$$= \sum_{S\subset N-\{i\}}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}v(S) + \sum_{S:i\in S}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}v(S) - \sum_{T\subset N-\{i\}}\frac{(t-1)!(n-1-t)!}{(n-1)!}v(T)$$

Nella penultima sommatoria poniamo $S = T \cup \{i\}$, da cui s-1 = t e quindi:

$$\mathrm{P}(<N,v>)-\mathrm{P}(<N-\{i\},v>) = \sum_{S\subset N-\{i\}}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}v(S) +$$

$$+ \sum_{T\subset N-\{i\}}\frac{t!(n-1-t)!}{n!}v(T\cup\{i\}) - \sum_{T\subset N-\{i\}}\frac{(t-1)!(n-1-t)!}{(n-1)!}v(T) =$$

$$= \sum_{T\subset N-\{i\}}\frac{t!(n-1-t)!}{n!}v(T\cup\{i\}) + \sum_{T\subset N-\{i\}}\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}v(T) - \sum_{T\subset N-\{i\}}\frac{(t-1)!(n-1-t)!}{(n-1)!}v(T) =$$

$$= \sum_{T\subset N-\{i\}}\frac{t!(n-1-t)!}{n!}v(T\cup\{i\}) - \sum_{T\subset N-\{i\}}\frac{t!(n-1-t)!}{n!}v(T) = \phi_i(\mathrm{G})$$

per la formula (3) di pag.24 . □

Questo risultato consente di calcolare il valore Shapley in modo efficiente per qualsiasi gioco G=<*N*,*v*> a partire dai suoi sottogiochi a 1, 2, 3,… giocatori. Per vedere come si procede ricorriamo al solito esempio del generico gioco G=<A B C,*v*> a tre persone in normalizzazione (0,1):

v(A) = *v*(B) = *v*(C) = 0, *v*(A B) = c, *v*(A C) = b, *v*(B C) = a, *v*(A B C) = 1

Usando la formula ricorsiva per il calcolo del potenziale otteniamo:

$$\mathrm{P(A\,B)} = \frac{c}{2},\;\; \mathrm{P(A\,C)} = \frac{b}{2},\;\; \mathrm{P(B\,C)} = \frac{a}{2},\;\; \mathrm{P(A\,B\,C)} = \frac{2+a+b+c}{6}$$

$$\phi_1(\mathrm{G}) = \mathrm{P(A\,B\,C)} - \mathrm{P(B\,C)} = \frac{2-2a+b+c}{6}$$

$$\phi_2(\mathrm{G}) = \mathrm{P(A\,B\,C)} - \mathrm{P(A\,C)} = \frac{2-2b+a+c}{6}$$

$$\phi_3(G) = P(A\ B\ C) - P(A\ B) = \frac{2-2c+a+b}{6}$$

che sono proprio le componenti del valore Shapley del gioco G.

Il calcolo del valore Shapley mediante il potenziale consente un certo risparmio di tempo rispetto al calcolo usando la formula (3) di pag.24.

Abbiamo messo a confronto i due metodi implementando un programma che dà come output i tempi di calcolo t1 (per la formula (3)) e t2 (per il metodo del potenziale) in funzione del numero n dei giocatori: i risultati sono riportati nella Tabella 2 con $1 \le n \le 20$, t1 e t2 in secondi, dove è indicato anche il risparmio di tempo (in percentuale) x = $\frac{(t1-t2)*100}{t1}$.

n° gioc.	Shapley	Potenziale	x
1	0	0	-
2	0	0	-
3	0	0	-
4	0	0	-
5	0	0	-
6	.06	.05	16.7
7	.06	.06	0
8	.16	.1	37.5
9	.38	.33	13.2
10	.77	.66	14.3

n° gioc.	Shapley	Potenziale	x
11	1.76	1.38	21.6
12	3.74	3.07	17.9
13	8.12	6.54	19.4
14	17.47	14.06	19.5
15	37.29	30.04	19.4
16	79.48	63.77	19.8
17	168.57	135.17	19.8
18	356.08	285.45	19.8
19	750.67	601.44	19.9
20	1578.34	1263.56	19.9

Tabella 2

Come ulteriore applicazione del potenziale, possiamo dimostrare il teorema 9 di pag.29 che caratterizza assiomaticamente il valore Shapley come l'unica soluzione puntuale definita per i giochi cooperativi con un numero qualsiasi di giocatori che sia coerente e standard per i giochi a due persone.

Dimostrazione del teorema 9: E' chiaro che il valore Shapley $\phi(G)$ è standard per i giochi a due persone in quanto se G=<{1,2},v> si ha:

$$\phi_1(G) = \frac{v(12)+v(1)-v(2)}{2} \quad \text{e} \quad \phi_2(G) = \frac{v(12)+v(2)-v(1)}{2}$$

Ricordiamo la definizione di coerenza: dire che il valore Shapley è coerente significa che: se G=<N,v> è un gioco a n persone e $T \subset N$ è una coalizione non vuota, allora $\phi_i(G) = \phi_i(G')$ $\forall\ i \in T$, dove G'(T,ϕ)=<T,v'> è il gioco ridotto associato a T e a ϕ, la cui funzione caratteristica v' è definita da:

$$v'(S) = v(S \cup (N-T)) - \sum_{k \in N-T} \phi_k(< S \cup (N-T), v >)$$

Osserviamo che se $T \subset T_1 \subset N$, il gioco ridotto G'(T,ϕ) di G coincide con il gioco ridotto associato a T,ϕ del gioco ridotto associato a T_1,ϕ di G. Ne deriva che per dimostrare che ϕ è coerente basta dimostrarlo per il passaggio da n a n-1 elementi e iterare il procedimento. Supponiamo quindi che T abbia n-1 elementi (per fissare le idee $T=\{1\ 2\ \ldots\ n-1\}$).

Per ogni $S \subset T$ definiamo:

$$Q(S) = P(<S \cup \{n\}, v>)$$

dove P è la funzione potenziale. Basterà far vedere allora che:

$$\phi_i(<T,v'>) = \phi_i(<N,v>) \qquad \forall\, i \in T.$$

Ma per ogni $S \subset T$ si ha:

$$v'(S) = v(S \cup \{n\}) - \phi_n(S \cup \{n\}, v>) \quad = \sum_{i \in S} \phi_i(< S \cup \{n\}, v >) =$$

$$= \sum_{i \in S} P(< S \cup \{n\}, v >) - P(< S \cup \{n\} - \{i\}, v >) \quad = \sum_{i \in S} Q(S) - Q(S - \{i\}).$$

Quindi Q(S) è il potenziale relativo a G' a meno di una costante, cioè:

$$Q(S) = P(<S,v'>) + Q(\emptyset) = P(S,v') + P(\{n\},v).$$

Ma allora:

$$\phi_i(<T,v'>) = P(<T,v'>) - P(<T-\{i\},v'>) = Q(T)-Q(T-\{i\}) =$$

$$= P(<N,v>) - P(<N-\{i\},v>) = \phi_i(N,v)$$

Quindi il valore Shapley è coerente. Dobbiamo dimostrare viceversa che se f è una soluzione puntuale coerente e standard per i giochi a due persone allora f coincide con il valore Shapley.

Se riusciamo a costruire una funzione Q: $G^* \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$Q(\emptyset) = 0 \quad \text{e} \quad Q(<N,v>)-Q(<N-\{i\},v>) = f_i(<N,v>) \qquad (5)$$

per ogni gioco a n persone G=$<N,v>$, allora si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} (Q(< N, v >) - Q(< N - \{i\}, v >)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(< N, v >) = v(N),$$

quindi Q soddisfa le proprietà caratteristiche del potenziale, perciò coincide con il potenziale; ma allora f coincide con il valore Shapley. Tutto sta quindi a costruire Q.

Cominciamo col porre:

$Q(\varnothing) = 0$, $\qquad Q(<\{i\},v>) = v(i)$, $\qquad Q(<\{i,j\},v>) = \dfrac{v(i,j)+v(i)+v(j)}{2}$

e continuiamo ricorsivamente come segue. Sia $n \geq 3$ e supponiamo che Q soddisfi la proprietà (5) per tutti i giochi con meno di n giocatori. Allora si potrà definire Q per i giochi a n persone in modo che soddisfi (5), ponendo semplicemente:

$$Q(<N,v>) = f_i(<N,v>) + Q(<N-\{i\},v>)$$

purché questa sia una definizione ben posta, cioè non dipenda dalla scelta di $i \in N$. E' sufficiente quindi dimostrare che $\forall\, i,j \in N$ si ha:

$$f_i(<N,v>) - f_j(<N,v>) = Q(<N-\{j\},v>) + Q(<N-\{i\},v>).$$

Per far ciò prendiamo $k \in N-\{i,j\}$ (il che è possibile perché $n \geq 3$) e indichiamo con v' la funzione caratteristica del gioco ridotto G'=$<N-\{k\},v'>$. Allora abbiamo:

$$f_i(<N,v>)-f_j(<N,v>) = f_i(<N-\{k\},v'>) - f_j(<N-\{k\},v'>) =$$

$$= Q(<N-\{k\},v'>) - Q(<N-\{k,i\},v'>) - Q(<N-\{k\},v'>) + Q(<N-\{k,j\},v'>)=$$

$$= - Q(<N-\{k,i\},v'>) + Q(<N-\{k,j\},v'>) =$$

$$= - Q(<N-\{k,i\},v'>) + Q(<N-\{k,i,j\},v'>) + Q(<N-\{k,j\},v'>) - Q(<N-\{k,i,j\},v'>) =$$

$$= - f_j(<N-\{k,i\},v'>) + f_i(<N-\{k,j\},v'>) = - f_j(<N-\{i\},v>) + f_i(<N-\{j\},v>) =$$

$$= - Q(<N-\{i\},v>) + Q(<N-\{i,j\},v>) + Q(<N-\{j\},v>) - Q(<N-\{i,j\},v>) =$$

$$= Q(<N-\{j\},v>) - Q(<N-\{i\},v>). \qquad \square$$

L' indice di Banzhaf-Coleman

L'indice di Banzhaf-Coleman è un altro "indice di potere" basato sul concetto di utilità marginale, simile al valore Shapley.

Dato un gioco a n persone G=$<N,v>$, si chiama indice di Banzhaf-Coleman il vettore ψ(G) la cui componente i-esima è data da:

$$\psi_i(G) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subset N:\, i \notin S} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Cioè ψ_i(G) è l'utilità marginale media del giocatore i rispetto a tutte le coalizioni di cui può entrare a far parte. Questa formula è simile a (3) di pag. 24 che definisce il valore

Shapley, però tutti i coefficienti sono uguali a $\frac{1}{2^{n-1}}$, mentre per il valore Shapley dipendono dalla cardinalità di S.

Dalla formula (4) di pag.32, ponendo $x_k = \frac{1}{2}$ $\forall\, k$ si trova subito

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{S\subset N:i\notin S}(v(S\cup\{i\})-v(S)) = \psi_i(\mathrm{G})$$

dove f è l'estensione multilineare della funzione caratteristica di G. Questa proprietà può essere utile per calcolare ψ. Per illustrare ciò riprendiamo l'esempio 10 del Consiglio di Sicurezza dell'ONU: esso si può rappresentare con un gioco composto G'=G[G_1,G_2], dove G, G', G_1, G_2 hanno rispettivamente, come estensioni multilineari f, h, g_1, g_2, e si ha:

$$\mathrm{h}(x_1,\ldots,x_{15}) = \mathrm{f}(\mathrm{g}_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5),\mathrm{g}_2(x_6,\ldots,x_{15})) = x_1x_2x_3x_4x_5\ \mathrm{g}_2(x_6,\ldots,x_{15}),$$

quindi se $i > 5$:

$$\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial x_i}(t,t,t,t,t,t,t,t,t,t,t,t,t,t,t) = t^5 84t^3(1-t)^6 = 84t^8(1-t)^6,$$

$$\psi_i(\mathrm{G}) = \frac{\partial \mathrm{h}}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right) = \frac{84}{2^{14}} = \frac{21}{4096};$$

se invece $i \le 5$:

$$\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial x_i}(t,t,t,t,t,t,t,t,t,t,t,t,t,t,t) = t^4\mathrm{g}_2(t,t,t,t,t,t,t,t,t,t)$$

e applicando la definizione di estensione multilineare:

$$\psi_i(\mathrm{G}) = \frac{\partial \mathrm{h}}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}\mathrm{g}_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}\sum_{S\subset M_2}\frac{1}{2^{10}}w_2(S)$$

ma $w_2(S) = 0$ se S ha meno di 4 elementi, $w_2(S) = 1$ altrimenti, quindi:

$$\psi_i(\mathrm{G}) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2^{10}}\left(2^{10}-\binom{10}{0}-\binom{10}{1}-\binom{10}{2}-\binom{10}{3}\right)\right) = \frac{53}{1024} = \frac{212}{4096}$$

Ne deriva che, secondo l'indice di Banzhaf-Coleman, il potere dei membri permanenti è circa 10 volte quello dei membri transitori (i membri permanenti fanno sempre la parte del leone, ma non così sfacciatamente come nel caso del valore Shapley).

L'indice di Banzhaf-Coleman non è una soluzione puntuale per la classe dei giochi a n persone perché non è efficiente, cioè in generale si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i(\mathrm{G}) \neq v(N)$$

Tuttavia lo si può modificare per renderlo efficiente introducendo l'indice di Banzhaf-Coleman normalizzato β(G), definito da:

$$\beta_i(\mathrm{G}) = v(i) + \frac{\psi_i(\mathrm{G}')\left(v(N) - \sum_{i=1}^{n} v(i)\right)}{\sum_{i=1}^{n} \psi_i(\mathrm{G}')},$$

dove G' è la normalizzazione (0,1) di G. In pratica, β(G) ripartisce l'utilità aggiuntiva totale in parti proporzionali a ψ_i(G') (e non a ψ_i(G)). Questa definizione si usa soprattutto per i giochi che sono già normalizzati (0,1), nel qual caso essa diventa:

$$\beta_i(\mathrm{G}) = \frac{\psi_i(\mathrm{G})}{\sum_{i=1}^{n} \psi_i(\mathrm{G})}$$

Ricorriamo al solito esempio del generico gioco G=<A B C,*v*> a tre persone in normalizzazione (0,1):

v(A)=v(B)=v(C)=0, v(A B)=c, v(A C)=b, v(B C)=a, v(A B C)=1

$$\psi_1(G) = \frac{v(\mathrm{A}) - v(\varnothing) + v(\mathrm{AB}) - v(\mathrm{B}) + v(\mathrm{AC}) - v(\mathrm{C}) + v(\mathrm{ABC}) - v(\mathrm{BC})}{4} = \frac{c+b+1-a}{4}$$

per cui: $$\psi(\mathrm{G}) = \left(\frac{b+c+1-a}{4}, \frac{a+c+1-b}{4}, \frac{a+b+1-c}{4}\right).$$

Notiamo che ψ(G) è un'imputazione se e solo se a+b+c = 1.

L'indice di Banzhaf-Coleman normalizzato è dato da:

$$\beta(\mathrm{G}) = \left(\frac{b+c+1-a}{3+a+b+c}, \frac{a+c+1-b}{3+a+b+c}, \frac{a+b+1-c}{3+a+b+c}\right)$$

Casi particolari:

i) a=b=c=1 (gioco dei Pirati) in tal caso il valore Shapley ϕ(G) e gli indici ψ(G), β(G) sono rispettivamente:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \qquad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

ii) a=0, b=c=1 (gioco dei Pirati modificato) in tal caso ϕ(G), ψ(G) e β(G) sono rispettivamente:

$$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right), \qquad \left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right), \qquad \left(\frac{3}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right).$$

Ricordiamo che nel primo caso il nucleo è vuoto, nel secondo è ridotto all'unico punto (1,0,0) e nessuno dei tre indici sta nel nucleo.

L'indice di Banzhaf-Coleman normalizzato soddisfa gli assiomi:
A3(invarianza per *S*-equivalenza), **A4**(simmetria), **A6**(proprietà del giocatore di paglia).

Sono comunque più interessanti le proprietà dell'indice ψ(G) non normalizzato. Esso soddisfa gli assiomi **A2**(additività), **A4** e **A6**, che sono gli stessi che caratterizzano assiomaticamente il valore Shapley ϕ(G). Come mai allora $\psi(G) \neq \phi(G)$? La risposta è semplice: perché ψ(G) non è una imputazione.

Per caratterizzare assiomaticamente ψ bisogna aggiungere i seguenti assiomi:

A7. Se un gioco G'=$<N \cup \{n+1\},v'>$ è ottenuto da G=$<N,v>$ aggiungendo un giocatore di paglia, allora $\psi_i(G') = \psi_i(G) \;\; \forall\, i \in N$.

A8. $\psi_i(\alpha G) = \alpha\psi_i(G) \quad \forall\, \alpha \geq 0$ (<u>*omogeneità*</u>)

A9. Se G' = G[$G_1,\ldots,G_n$] è un gioco composto (dove $G_j = <M_j, w_j>$), allora esiste un vettore $x=(x_1,\ldots,x_n)$ tale che $\psi_i(G') = x_j\psi_i(G_j) \;\; \forall\, i \in M_j$ (in altre parole, i membri di M_j in G' hanno un potere che è proporzionale al loro potere in G_j).

A10. Se G' = G[$G_1,\ldots,G_n$] è un gioco composto (dove $G_j = <M_j, w_j>$), e se i G_j sono giochi a somma costante, allora ψ si compone, cioè:

$$\psi_i(G') = \psi_j(G)\; \psi_i(G_j) \;\; \forall\, i \in G_j$$

Si può dimostrare che l'indice di Banzhaf-Coleman è l'unico indice "non banale" che soddisfa gli assiomi **A2**, **A4**, **A6**, **A7**, **A8**, **A9**, **A10**, infatti vale il seguente:

Teorema 13: *Esistono esattamente quattro indici che soddisfano* **A2**, **A4**, **A6**, **A7**, **A8**, **A9**, **A10** *per la classe di tutti i giochi a n persone. Essi sono: l'indice di Banzhaf-Coleman* $\psi_i(G)$, *l'indice nullo* $\lambda_i(G) = 0$, *l'indice dittatoriole* $\rho_i(G) = v(i)$, *l'indice marginale* $\mu_i(G) = v(N)-v(N-\{i\})$.

Giochi di Sequenza

Come esempio finale sul valore Shapley consideriamo quello dei giochi di sequenza. La situazione tipica che dà luogo a questa classe di giochi è quella in cui *n* persone sono in coda in attesa che venga il loro turno di ricevere un certo servizio. Sia $N = \{1,2,\ldots,n\}$, e sia π una permutazione dell'insieme *N*: $\pi(i)=j$ significa che il giocatore *i*-esimo occupa la *j*-

esima posizione nella coda. Sia z_i il tempo di servizio del giocatore i-esimo e c_i la relativa funzione di costo. Supponiamo che c_i dipenda sia dal tempo di attesa sia da quello di servizio e sia lineare, cioè della forma $c_i(t) = \alpha_i t + \beta_i$. Data una qualunque coalizione $S \subset N$, scambiando l'ordine dei giocatori in S il costo totale corrispondente al tempo di attesa di S può cambiare.

Formalmente diremo che una situazione di sequenza consiste di un insieme finito $N = \{1,2,\dots,n\}$ e di una terna (π, α, z) dove π è una permutazione di N e α, z sono vettori di $\mathbb{R}^n_+$.

Definiamo l'<u>*indice di urgenza* u_i</u> del giocatore i il rapporto $u_i = \dfrac{\alpha_i}{z_i}$. L'interpretazione è la seguente: se, nella permutazione π, j è il successivo di i ($\pi(j) = \pi(i)+1$), quando i e j si scambiano di posto il costo totale cambia del valore $\alpha_j z_i - \alpha_i z_j$. Ne segue che se $u_i < u_j$ si ha una diminuzione di costo, se $u_i > u_j$ si ha un aumento, se $u_i = u_j$ lo scambio è irrilevante.

Una coalizione S si dice <u>*connessa*</u> quando, presi comunque due giocatori $i,j \in S$, tutti i giocatori che nella coda stanno fra i e j appartengono ad S. Da quanto detto sopra segue che per una coalizione connessa l'ordinamento ottimale è quello di avere i propri membri disposti secondo gli indici di urgenza decrescenti.

Per formalizzare la situazione sotto forma di gioco cooperativo $G=\langle N,v\rangle$, basta definire $v(S)$ come il risparmio che S può ottenere disponendosi nell'ordine ottimale, per ogni coalizione connessa $S \subset N$. Per una coalizione non connessa S' ciò evidentemente non può valere, perché non è consentito scavalcare giocatori non appartenenti a S' senza coalizzarsi con loro. Quindi, se S' non è connessa definiamo $v(S')$ come la somma delle utilità delle sue componenti connesse (la definizione di componente connessa è semplicemente questa: T è una *componente connessa* di S' se: $T \subset S'$, T è connessa e $T \cup \{i\}$ non è connessa $\forall\, i \in S'-T$).

Esempio: Sia $N=\{1,2,3\}$ e supponiamo che:

$\pi(1) = 1$, $\pi(2) = 2$, $\pi(3) = 3$, $z_1 = 3$, $z_2 = 1$, $z_3 = 2$, $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = 6$.

Calcolando gli indici di urgenza, si vede subito che l'ordine ottimale in cui dovrebbero presentarsi i giocatori è 2, 3, 1.

La funzione caratteristica del corrispondente gioco di sequenza è data da:

$v(1)=v(2)=v(3)=0$, $v(1\ 2)=9$, $v(1\ 3)=v(2\ 3)=0$, $v(1\ 2\ 3)=15$.

Si possono dimostrare i seguenti:

Teorema 14: *I giochi di sequenza sono convessi (quindi hanno nucleo non vuoto e il valore Shapley appartiene al nucleo).*

Teorema 15: *Il valore Shapley del gioco di sequenza a n giocatori* G=<*N*,*v*> *corrispondente a* (π, α, *z*) *è dato da*:

$$\phi_i(G) = \sum_{j,k:\pi(j)\leq\pi(i)\leq\pi(k)} \frac{g_{jk}}{\pi(k)-\pi(j)+1}$$

dove $g_{jk} = \alpha_k z_j - \alpha_j z_k$ se $\alpha_k z_j - \alpha_j z_k > 0$, $g_{jk} = 0$ altrimenti.

Nell'esempio precedente questa formula dà $\phi(G)=\left(\frac{13}{2},\frac{13}{2},2\right)$.

Se *n* è pari ($n = 2k$), il numero di termini della sommatoria può variare da $2k$ a k^2, se *n* è dispari ($n = 2k+1$) può variare da $2k+1$ a $k(k+1)$; comunque è sempre molto minore di 2^{n-1}, che è il numero di termini della sommatoria di (3) - pag. 24 (definizione del valore Shapley).

- ☺ - ☺ - ☺ -

Bibliografia

– H.P.Young, *Cost Allocation*, Handbook of Game Theory, vol.II, Cap.34, North - Holland, 1994.

– G. Owen, *Game Theory* , Academy Press, New York, 1995.

– G.Pederzoli, *Giochi Cooperativi-Teoria, Metodi, Applicazioni*, Università di Trento, 1994.