Equilibri correlati

giochi a somma zero e altri “special topics”

Appunti a cura di
Paola RADRIZZANI e Fioravante PATRONE
http://www.diptem.unige.it/patrone/default.htm

versione del: 25 novembre 2006

Indice

Paola RADRIZZANI
Dottorato in Ingegneria Matematica
Dipartimento di Matematica
Politecnico di Milano
Via Bonardi 9
20133 Milano - ITALY
radrizzani@mate.polimi.it

Fioravante PATRONE
Dipartimento di Ingegneria della Produzione, Termoenergetica e Modelli Matematici
P.le Kennedy - Pad D
16129 Genova - ITALY
patrone@diptem.unige.it

http://www.diptem.unige.it/patrone homepage
http://tdg.dima.unige.it web teaching
http://www.citg.unige.it/citg.htm web server “CITG”
http://www.scallywag.it web page del gruppo Sca$\lambda\lambda$ywag
http://www.diptem.unige.it/patrone/DRI.htm Decisori (razionali) interagenti

In queste note trattiamo giochi finiti a due giocatori in forma strategica. La loro descrizione viene dunque fatta tramite bimatrici. Consideriamo, in particolare, i concetti di equilibrio di Nash e di equilibrio correlato. Un ultimo paragrafo accenna poi all'idea di equilibrio bayesiano e di incentive compatibility. Per una introduzione agli equilibri correlati si può vedere la voce omonima alla pagina: `http://www.diptem.unige.it/patrone/decisori_razionali_interagenti/decisori_razionali_interagenti_web.htm`

1 Il modello di Nash per i giochi non cooperativi

Cominciamo con un esempio. Data la bimatrice:

$$\begin{pmatrix} (10,10) & (0,2) \\ (1,1) & (4,0) \end{pmatrix};$$

se utilizziamo la strategia del maxmin (come suggerito dalla teoria dei giochi a somma zero) per trovare il possibile esito di questo gioco, otteniamo come pagamenti la coppia $(1,1)$ che non è certo quello che i due giocatori si aspettano di ottenere dal gioco: è evidente che possono fare molto meglio, ottenendo 10 entrambi.

È necessario allora un concetto diverso di soluzione, applicabile a queste situazioni più generali dei giochi strettamente competitivi.

All'inizio degli anni 50, J.F.Nash propose un modello contenente una nuova idea di equilibrio che ancora oggi ha molte applicazioni. Diamo la definizione di gioco a due giocatori in forma strategica e la conseguente definizione di equilibrio di Nash.

Definizione 1 *Un gioco a due giocatori in forma strategica è descritto da una quadrupla* (X, Y, f, g)[1]. *Un* equilibrio di Nash *per il gioco è una coppia* $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ *tale che:*

- $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y})$ *per ogni* $x \in X$*;*
- $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y)$ *per ogni* $y \in Y$*.*

[1] X, Y sono gli insiemi delle strategie dei giocatori 1,2 rispettivamente, $f(x,y) = u(h(x,y))$ con h funzione che mappa le scelte in esiti (E), $h : X \times Y \to E$ ed $u : E \to \mathbb{R}$ la funzione di utilità del giocatore 1. Analogamente per il giocatore 2, indicata con v la sua funzione di utilità $v : E \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = v(h(x,y))$

Quindi, se una coppia $(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio di Nash, essa dà un risultato che massimizza $f(x, \bar{y})$ per il primo giocatore (tenendo $\bar{y}$ fissata), e massimizza $g(\bar{x}, y)$ per il secondo (in questo caso, con $\bar{x}$ fissato). Pertanto un punto di equilibrio è una coppia $(\bar{x}, \bar{y})$ che ha la caratteristica che i due giocatori non hanno convenienza a deviare dalla strategia descritta dall'equilibrio, supposto che anche l'altro giocatore non devii. L'estensione del modello, di idea di equilibrio, e del risultato di esistenza menzionato più tardi, al caso in cui i giocatori sono più di due, è assolutamente standard, solo le notazioni diventano più pesanti.
Osserviamo che i giochi a somma zero rientrano in questo modello: basta porre $g = -f$. Inoltre, in un gioco a somma zero una coppia è un punto di sella [2] se e solo se è un equilibrio di Nash.

Osservazione 1 Un equilibrio di Nash può dare un risultato *inefficiente*, ad esempio, se consideriamo il gioco rappresentato dalla bimatrice:

$$\begin{pmatrix} & L & R \\ T & (3,3) & (1,4) \\ B & (4,1) & (2,2) \end{pmatrix},$$

questo gioco ha come equilibrio di Nash la coppia (B, R) che non rappresenta il risultato migliore per i due giocatori.

Osservazione 2 Un gioco può avere *più equilibri di Nash* che danno ai due giocatori payoff diversi, cosa che rende i giocatori non indifferenti rispetto agli equilibri trovati. Ad esempio nel gioco

$$\begin{pmatrix} & L & R \\ T & (2,1) & (0,0) \\ B & (0,0) & (1,2) \end{pmatrix}$$

ci sono due equilibri di Nash che corrispondono alle coppie (T, L) e (B, R), rispetto alle quali i due giocatori hanno delle preferenze: il primo preferisce la coppia (T, L), il secondo (B, R); se il primo sceglie T ed il secondo R rischiano di avere 0 entrambi. Questo succede perché gli equilibri di Nash non hanno in generale la proprietà di rettangolarità: se $(\overline{x}, \overline{y})$ è un equilibrio di Nash e $(\widehat{x}, \widehat{y})$ è un altro equilibrio di Nash, non è detto che la coppia $(\overline{x}, \widehat{y})$ lo sia. [3]

[2] $(\overline{x}, \overline{y})$ è un punto di sella se verifica $f(x, \overline{y}) \leq f(\overline{x}, \overline{y}) \leq f(\overline{x}, y)\ \forall x, y$.
[3] La proprietà vale invece nell'importante sottoinsieme dei giochi a somma zero.

Osservazione 3 Un gioco può non avere equilibri di Nash; se consideriamo ad esempio il gioco

$$\begin{pmatrix} & L & R \\ T & (1,0) & (0,3) \\ B & (0,2) & (1,0) \end{pmatrix}$$

nessuna coppia di strategie per i due giocatori soddisfa le condizioni per essere equilibrio di Nash.

Per cercare di dare una risposta al problema dell'esistenza di un equilibrio di Nash per un gioco a due giocatori in forma strategica, consideriamo l'*estensione mista* del gioco (X, Y, f, g), consideriamo cioè il gioco $(\Delta(X), \Delta(Y), \widehat{f}, \widehat{g})$ dove $\Delta(X), \Delta(Y)$ rappresentano, rispettivamente, gli insiemi di distribuzioni di probabilità su X e su Y. Nel caso in cui un giocatore abbia un numero finito, diciamo k, di scelte, una strategia mista è una scelta $p = (p_1, p_2, ...p_k)$ con $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, $p_i \geq 0$. Supponiamo ora di avere un gioco a due persone in cui gli insiemi finiti delle strategie sono rispettivamente $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$. Allora, dette p, q due generiche strategie miste $p \in \Delta(X)$, $q \in \Delta(Y)$ il valore atteso per i due giocatori è $\widehat{f}(p, q) = \sum_{i,j} p_i q_j f(x_i, y_j)$ $\quad \widehat{g}(p, q) = \sum_{i,j} p_i q_j g(x_i, y_j)$.

Come caratterizziamo gli equilibri di Nash? Se il giocatore 1 pensa di sapere che 2 giocherà la strategia y, lui cercherà di massimizzare la sua funzione di utilità f scegliendo una strategia x che massimizzi $\{f(\cdot, y)\}$. Indichiamo con BR_1 la seguente multifunzione:

$$BR_1 : Y \to X : \quad BR_1(y) = \operatorname{argmax} f(\cdot, y)$$

(BR sta per "best reaction"). La stessa cosa vale per il secondo giocatore per il quale definiamo

$$BR_2 : X \to Y : \quad BR_2(x) = \operatorname{argmax} g(x, \cdot).$$

Sia

$$BR : X \times Y \to X \times Y : \quad BR(x, y) = BR_1(y) \times BR_2(x).$$

Un equilibrio di Nash per il gioco è un punto fisso per BR: $(\bar{x}, \bar{y})$ è equilibrio di Nash se e solo se

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in BR(\bar{x}, \bar{y}).$$

Il teorema del punto fisso di Kakutani garantisce l'esistenza di un equilibrio di Nash.

Teorema 1 (Kakutani) *Sia Z un sottoinsieme compatto convesso non vuoto di uno spazio Euclideo di dimensione finita, sia $F : Z \to Z$ una multifunzione tale che $F(z)$ sia chiuso, convesso, non vuoto. Supponiamo inoltre che, $\forall z \in Z$, F abbia grafico chiuso*[4]. *Allora F ha un punto fisso: esiste $\bar{z} \in Z$ tale che $\bar{z} \in F(\bar{z})$.*

Dal teorema di Kakutani segue un teorema di esistenza di un equilibrio di Nash.

Teorema 2 (Nash) *Dato il gioco (X, Y, f, g), supponiamo X, Y sottoinsiemi convessi, compatti non vuoti di uno spazio Euclideo di dimensione finita, supponiamo f, g continue e siano:*

- *$x \mapsto f(x, y)$ quasi concava per ogni $y \in Y$;*
- *$y \mapsto g(x, y)$ quasi concava per ogni $x \in X$.*

Allora il gioco ha un equilibrio.

Ricordiamo che la funzione $h : Z \to \mathbb{R}$, con Z spazio vettoriale si dice quasi concava se $\{z : h(z) \geq a\}$ è convesso $\forall a \in \mathbb{R}$. Si noti che i punti di massimo di una funzione quasi concava formano un insieme convesso.

Abbiamo visto che una bimatrice può non avere equilibri di Nash in strategie pure, ma deve averne in strategie miste come garantisce il precedente teorema. In questo caso è interessante ricordare il *principio di indifferenza.*

Consideriamo, per semplicità, un gioco individuato da una bimatrice con due righe e due colonne, e cerchiamo strategie completamente miste per i due giocatori. Fissata una strategia per un giocatore, ad esempio il giocatore 1, la *best reaction* dell'altro giocatore, il giocatore 2, contiene in ogni caso sempre una strategia pura (perché la funzione di pagamento è lineare). Se ne contiene una sola, l'equilibrio non può essere in strategie miste. Dunque le contiene tutte e due, e quindi esse danno lo stesso payoff. Generalizzando, in un equilibrio tutte le strategie pure *giocate con probabilità positiva* danno lo stesso payoff.

Applichiamo questo principio all'esempio precedente.

[4] Il grafico di F è l'insieme $G = \{(z, w) \in Z \times Z$ tali che $w \in F(z)\}$.

Consideriamo il gioco descritto dalla bimatrice:

$$\begin{pmatrix} (1,0) & (0,3) \\ (0,2) & (1,0) \end{pmatrix}.$$

Non ci sono equilibri di Nash in strategie pure. Indichiamo con $\bar{p}$ e $\bar{q}$ rispettivamente, la probabilità usata dai due giocatori all'equilibrio, usando la prima riga (colonna). Quando il secondo giocatore usa $(\bar{q}, 1-\bar{q})$, il primo deve essere indifferente tra la prima e a seconda riga. Perciò:

$$\bar{q}1 + (1-\bar{q})0 = \bar{q}0 + (1-\bar{q})1,$$

che ha come soluzione $\bar{q} = \frac{1}{2}$. Analogamente, otteniamo $\bar{p} = \frac{2}{5}$. L'equilibrio di Nash è

$$[(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})],$$

con pagamenti

$$(\frac{1}{2}, \frac{6}{5}).$$

Si possono verificare questi risultati calcolando le multifunzioni BR_1, BR_2.

Questo esempio è interessante anche per un altro motivo. Anche se i valori conservativi dei giocatori in un gioco non a somma zero hanno meno importanza rispetto a quelli nei giochi a somma zero, è interessante per i giocatori calcolarli per sapere quanto sono in grado di ottenere dal gioco indipendentemente da cosa fa l'altro giocatore.
Il valore atteso del primo giocatore è $\widehat{f}(p,q) = q(2p-1) - p + 1$, il suo livello di sicurezza sarà

$$\max_p \min_q \quad q(2p-1) - p + 1;$$

per il secondo $\widehat{g}(p,q) = p(3-5q) + 2q$, ed il suo livello di sicurezza

$$\max_q \min_p \quad p(3-5q) + 2q.$$

I valori che si ottengono sono

$$[(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})],$$

con pagamenti

$$(\frac{1}{2}, \frac{6}{5}).$$

Se li confrontiamo con gli equilibri di Nash, osserviamo che:

1. i pagamenti sono gli stessi;

2. le strategie (conservative e di Nash) sono diverse per entrambi i giocatori.

Osserviamo che, in un qualunque gioco, in ogni equilibrio di Nash i giocatori ottengono almeno quanto possono ottenere giocando la strategia di maxmin. Infatti, se $(\bar{x}, \bar{y})$ è un qualunque equilibrio di Nash, ad esempio per il primo giocatore si ha: $\forall x$,

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \geq \min_y f(x, y),$$

e quindi

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq \max_x \min_y f(x, y).$$

In alcuni giochi, come in quello sopra, può accadere che in nessun equilibrio di Nash i giocatori ottengano più del loro valore conservativo (maxmin)[5]. Tali giochi vengono in letteratura definiti *non profitable games* e sono oggetto anche di studi sperimentali. L'interesse per questo tipo di giochi è abbastanza intuitivo da capire. Visto che i livelli di utilità sono gli stessi nei due casi, che tipo di ragionamento possono fare i due giocatori? Supponendo che il loro compagno di gioco sia razionale, non esiste alternativa all'equilibrio di Nash. D'altra parte, anche persone razionali possono commettere errori, essere distratte, avere dubbi, quindi perché non garantirsi la stessa utilità, *senza far dipendere il risultato da ipotesi sull'altro*? D'altra parte, visto che il ragionamento è simmetrico, uno dei due (o entrambi) potrebbero ipotizzare che l'altro faccia questo ragionamento, ed in tal caso rispondere con la best reply. È chiaro che tutto questo porta ad un ragionamento regressivo senza fine e prevede uno sforzo da parte dei due giocatori nel cercare di muoversi all'interno di scelte "casuali". È abbastanza logico pensare che un giocatore preferisca non rischiare quando può ottenere lo stesso payoff (in modo certo) giocando la strategia di maxmin. Senza entrare in ulteriori dettagli, citiamo alcuni lavori: i primi sono fra i più importanti dal punto di vista del dibattito teorico sulla questione, l'ultimo descrive uno studio sperimentale su un non profitable game [Au, AM, Ha, MS].

[5] Osserviamo che la scelta contemporanea delle due strategie conservative può portare ad un esito del gioco che dà ad entrambi i giocatori più di quanto ottengono in un equilibrio di Nash. Proponiamo di seguito un esempio di tale situazione in strategie pure.

$$\begin{pmatrix} & A & B & C \\ A & (40,40) & (60,10) & (10,40) \\ B & (10,60) & (10,10) & (60,40) \\ C & (40,10) & (40,60) & (50,50) \end{pmatrix}$$

2 Equilibri correlati

Consideriamo il seguente gioco [CS]. Due lavoratori devono contribuire al raggiungimento di un certo risultato con un impegno (non osservabile) che può essere alto o basso. Indichiamo con e_h, e_l rispettivamente, il livello di impegno alto o basso dei due lavoratori. Se entrambi i lavoratori contribuiscono con un impegno alto (H), il guadagno totale è 156, se l'impegno è basso (L) è 6, se uno contribuisce con un impegno H e l'altro L (questa situazione verrà indicata con M) è 96.

Dati gli esiti possibili $\{H, L, M\}$, facciamo le seguenti ipotesi:

1. il salario ricevuto dai due lavoratori dipende solo dall'esito, ed è: $\{w_L, w_H, w_M\} = \{3, 78, 48\}$;

2. ogni lavoratore ha un'utilità $w - e$ con $e_h = 39 \;\; e_l = 0$.

La bimatrice del gioco dei due lavoratori è: (1)

$$\begin{pmatrix} & e_L^{II} & e_H^{II} \\ e_L^I & (3,3) & (48,9) \\ e_H^I & (9,48) & (39,39) \end{pmatrix}$$

Gli equilibri di Nash in strategie pure sono due e sono le coppie (e_H^I, e_L^{II}) e (e_L^I, e_H^{II}). Cerchiamo ora quello in strategie miste usando il principio di indifferenza.
$3\bar{q} + 48(1-\bar{q}) = 9\bar{q} + 39(1-\bar{q})$ cioè $\bar{q} = \frac{3}{5}$; facendo lo stesso ragionamento per $\bar{p}$, otteniamo $\bar{p} = \frac{3}{5}$ cioè entrambi i giocatori giocano quattro volte su dieci la seconda riga e la seconda colonna rispettivamente, coppia che dà l'uscita "cooperativa". A questi valori corrispondono dei payoff pari a 21 per entrambi i giocatori.
È possibile trovare un equilibrio che dia payoff migliori ai due giocatori?

Una prima idea potrebbe essere quella di giocare (e_L^I, e_H^{II}) e (e_H^I, e_L^{II}) con probabilità 1/2 ciascuno. Questo non è un equilibrio di Nash in strategie miste, visto che questa probabilità sullo spazio prodotto delle strategie non è prodotto di due probabilità (ovvero, strategie miste) definite sugli spazi di strategie di ciascuno dei giocatori. Si tratta di un esempio di equilibrio *correlato*, basato sull'uso di segnali (ad esempio, il risultato del lancio di una moneta) pubblicamente osservabili dai due giocatori. Non ci soffermeremo qui su questi "semplici" tipi di equilibri correlati: rinviamo per questo alla pagina web citata in prefazione.

I due giocatori potrebbero accordarsi per considerare anche la coppia (e_H^I, e_H^{II}) decidendo di assegnare probabilità $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ alle coppie (e_L^I, e_H^{II}),

(e_H^I, e_L^{II}) e (e_H^I, e_H^{II}); in questo modo otterrebbero un payoff pari a $(32, 32)$. Il risultato è migliore rispetto a quello ottenuto con le strategie miste (ed anche rispetto al "semplice" equilibrio correlato sopra descritto), ma quest'accordo non è stabile: il fatto che sia coinvolta la coppia di strategie (e_H^I, e_H^{II}), che non è un equilibrio di Nash, fa sì che non abbia la proprietà di stabilità rispetto a deviazioni unilaterali.

Per trovare una strada che consenta ai due giocatori di ottenere payoff migliori senza ricorrere ad accordi vincolanti, dobbiamo introdurre un *mediatore affidabile.* Il mediatore, accettato come tale da entrambi i giocatori, ha il compito di suggerire ai giocatori, in forma *privata,* quale strategia giocare. La strategia suggerita deve essere tale da non dare incentivi a deviare ai giocatori (razionali e intelligenti): l'equilibrio deve essere stabile. Da qui nasce l'idea di Aumann di *equilibrio correlato* del gioco.

Definizione 2 *Dato un gioco bimatrice* (a_{ij}, b_{ij}) $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, *un equilibrio correlato è una soluzione* $(p_{ij})_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,m}$ *del seguente sistema:*

$$\begin{cases} p_{ij} \geq 0 \\ \sum_{j=1}^m p_{\bar{i}j} a_{\bar{i}j} \geq \sum_{j=1}^m p_{\bar{i}j} a_{ij} & \forall \bar{i}, \forall i \\ \sum_{i=1}^n p_{i\bar{j}} b_{i\bar{j}} \geq \sum_{i=1}^n p_{i\bar{j}} b_{ij} & \forall \bar{j}, \forall j \\ \sum_{ij} p_{ij} = 1 \end{cases}.$$

I vincoli del primo e quarto tipo dicono che p_{ij} deve stare nel simplesso di $\mathbb{R}^{nm}$. In particolare, quelli del primo tipo si chiamano vincoli di non negatività. Gli altri $n^2 + m^2$ vincoli (secondo e terzo tipo) invece sono i vincoli che chiamiamo *strategic incentive constraints* .

Osservazione 4 Ogni equilibrio in strategie miste è un equilibrio correlato.

Una tipica disuguaglianza da verificare per il primo giocatore è:

$$\sum_{j=1}^m p_{\bar{i}j} a_{\bar{i}j} \geq \sum_{j=1}^m p_{\bar{i}j} a_{ij},$$

che rappresenta il fatto che la riga $\bar{i}$ è meglio della riga i, una volta che l'arbitro suggerisce l'uso della riga $\bar{i}$. Ora, supponiamo che $(\bar{p}, \bar{q})$ sia una coppia di strategie miste in equilibrio, $\bar{p} \in S_n$, $\bar{q} \in S_m$. In tal caso, posto $p_{ij} = \bar{p}_i \bar{q}_j$, la disuguaglianza di sopra diventa:

$$\bar{p}_{\bar{i}} \sum_{j=1}^m \bar{q}_j a_{\bar{i}j} \geq \bar{p}_i \sum_{j=1}^m \bar{q}_j a_{ij},$$

relazione ovviamente vera se $\bar{p_{\bar{i}}} = 0$. Supponiamo $\bar{p_{\bar{i}}} > 0$. La relazione da dimostrare allora diventa:

$$\sum_{j=1}^{m} \bar{q}_j a_{\bar{i}j} \geq \sum_{j=1}^{m} \bar{q}_j a_{ij}.$$

Osserviamo che la somma a sinistra (destra) rappresenta il pagamento atteso del primo giocatore[6], se gioca la riga $\bar{i}$ (i). Ora, essendo la riga $\bar{i}$ giocata con probabilità positiva per ipotesi, per definizione di equilibrio il pagamento atteso del primo, giocando tale riga, deve essere non minore che giocando una qualunque altra riga, per definizione di miglior risposta. Dunque la disuguaglianza di sopra è verificata. ■

Nel caso i_1 e i_2 siano due righe giocate con probabiltà positiva ad un equilibrio in strategie miste, le disuguaglianze di sopra, applicate una volta con $\bar{i} = i_1$ ed $i = i_2$, e poi con $\bar{i} = i_2$ ed $i = i_1$, mostrano che in realtà vale l'uguaglianza, e questo non è altro che il principio di indifferenza per gli equilibri in strategie miste.

Scriviamo il sistema che permette di calcolare gli equilibri correlati del nostro gioco (1):

$$\begin{cases} 3p_{11} + 48p_{12} \geq 9p_{11} + 39p_{12} \\ 9p_{21} + 39p_{22} \geq 3p_{21} + 48p_{22} \\ 3p_{11} + 48p_{21} \geq 9p_{11} + 39p_{21} \\ 9p_{12} + 39p_{22} \geq 3p_{12} + 48p_{22} \end{cases} .$$

È facile verificare che la distribuzione di probabilità $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ *non* è un equilibrio correlato del gioco[7]. Ciò nonostante, ci sono degli equilibri correlati di questo gioco i quali danno dei payoff per i due giocatori migliori rispetto a quelli generati dagli equilibri di Nash[8]. Un equilibrio correlato che prevede di giocare (e^I_L, e^{II}_H) e (e^I_H, e^{II}_L) con probabilità pari a 0.375 e (e^I_H, e^{II}_H) con probabilità 0.25. Questo è, fra gli equilibri correlati di questo gioco, quello che massimizza la somma dei payoff (valgono i consueti *caveat* quando si parla di sommare payoff di due giocatori differenti!).

---

[6] quando il secondo gioca $\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_m$

[7] $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ è considerato come potenziale distribuzione per due motivi: è una strategia proposta molto semplice per la sua simmetria, escludendo l'uscita peggiore per tutti, e dà pagamento alto ai due giocatori (superiore a quello ottenibile con gli equilibri correlati).

[8] Migliori anche rispetto al "semplice" equilibrio correlato prevede di giocare (e^I_L, e^{II}_H) e (e^I_H, e^{II}_L) con probabilità 1/2.

Soprattutto negli ultimi anni è nata l'esigenza di capire quanto la teoria dei giochi sia in accordo col comportamento abituale delle persone. Naturalmente questo è un tema molto complicato, per numerosi motivi, tra i quali certamente quello che il comportamento delle persone non è in generale univoco[9] e che l'influenza dell'ambiente in cui si effettua l'esperimento rischia di invalidare l'analisi stessa dei risultati, un po' come accade in fisica delle particelle, quando l'osservatore modifica il comportamento di un oggetto per il semplice fatto di osservarlo. Stiamo parlando della teoria dei giochi sperimentale, disciplina relativamente nuova, nata dall'economia sperimentale. Il fatto fondamentale è che numerosi esperimenti sembrano indicare che in genere gli individui, anche se opportunamente istruiti, tendono a non comportarsi come la teoria dei giochi prevede.

Un ambito ideale in cui sperimentare il comportamento di agenti che devono interagire è quello degli equilibri correlati, proprio perché la loro definizione prevede il ruolo attivo di un arbitro esterno. È dunque naturale che siano stati fatti esperimenti per capire il comportamento di agenti di fronte al problema di seguire oppure no le raccomandazioni di un arbitro che suggerisce l'utilizzo di un equilibrio correlato.

Di seguito riportiamo in riassunto i risultati di una sperimentazione descritta nel lavoro "Recommended play and Correlated Equilibria. An Experimental Study", di T. Cason e T. Sharma. Il gioco considerato è quello già illustrato precedentemente.

Abbiamo visto che l'equilibrio correlato che massimizza la somma dei payoff è dato dalle coppie (e^I_L, e^{II}_H) e (e^I_H, e^{II}_L) giocate con probabilità 0.375 e (e^I_H, e^{II}_H) con probabilità 0.25 che danno un payoff per entrambi i giocatori pari a 31.125. Questo equilibrio correlato porta ad una condizione di indifferenza[10]; per evitare questa situazione, il mediatore ha proposto ai giocatori di giocare le precedenti coppie con probabilità 0.4, 0.4, 0.2 che danno origine ad un payoff pari a 30.6.

---

[9] Persone diverse, ma tutte razionali, pur trovandosi nella stessa situazione hanno comportamenti molto diversi. Inoltre, se ad uno stesso gruppo di persone viene presentato un problema modellizzato in due modi diversi, accade spesso che la risposta risposta cambi a seconda del modello utilizzato.

[10] Questo equilibrio, che prevede di giocare (e^I_L, e^{II}_H) e (e^I_H, e^{II}_L) con probabilità pari a 0.375 e (e^I_H, e^{II}_H) con probabilità 0.25, crea una situazione di indifferenza tra la prima e la seconda riga in accordo con le probabilità assegnate alla seconda: il giocatore 1 è indifferente se scegliere la riga basso o la riga alto:

$$0,375 \times 9 + 0,25 \times 39 = 13,125 = 0,375 \times 3 + 0,25 \times 48.$$

Un giocatore non ha quindi alcun incentivo a seguire le indicazioni del mediatore, rispetto all'opzione di disattenderle. Osserviamo comunque che il payoff per entrambi i giocatori è pari a 31.125.

Gli esperimenti sono stati condotti in situazioni diverse. Sono stati analizzati i comportamenti di persone che giocano con un'altra persona, senza essere stati istruiti precedentemente, persone che giocano con un'altra persona, avendo ricevuto istruzioni, persone che giocano contro un robot, senza che il payoff del robot sia dato ad un altro essere umano, persone che giocano con un robot, con il payoff del robot dato ad un altro essere umano. Inoltre, sono state analizzate persone che avevano già fatto un'esperienza, sia nel caso in cui essa fosse stata fatta contro un altro sia nel caso che fosse stata fatta contro un robot.

Vediamo, senza entrare in troppi dettagli, gli aspetti principali dell'esperimento, e le congetture degli autori sull'interpretazione dei risultati. Dopo una sessione di riferimento in cui è stato chiesto ai giocatori di giocare senza dar loro raccomandazioni, l'esperimento vero e proprio cominciava con una sessione in cui si forniva la raccomandazione ai giocatori avendo spiegato che seguire la raccomandazione sarebbe stato per loro conveniente. Una simile generica affermazione tuttavia, portava ad una violazione delle raccomandazioni piuttosto sistematica. Per questo nella parte principale dell'esperimento la raccomandazione era più esplicita, nel senso di spiegare ad ogni giocatore come aggiornare le sue aspettative, data l'informazione di che cosa giocare (altri esperimenti mostrano che la legge di Bayes, anche in casi semplici, è spesso violata dalle credenze delle persone, che non sono in genere capaci di aggiornare le loro aspettative), e come e perché fosse la loro migliore opzione giocare la mossa suggerita, una volta convinti che anche l'altro agente avrebbe seguito le raccomandazioni. In altre parole, veniva proposto l'uso dell' equilibrio selezionato e veniva spiegato, in modo semplice e completo, perché non convenisse deviare dalla scelta suggerita dal computer[11], mostrando che il cambio di riga/colonna avrebbe portato ad un minor guadagno[12].

Tuttavia, anche in questo caso le violazioni delle raccomandazioni erano in numero significativo[13].

Nel tentativo di avere più informazioni possibili, sono stati fatti esperimenti, come detto prima, con un giocatore che giocava con un robot. Questo

[11] Anche nel caso di esperimenti con opponenti umani, i giocatori ricevevano informazioni e davano risposte lavorando al computer.

[12] Le interessanti istruzioni date ai giocatori possono essere lette al seguente indirizzo web: `www.krannert.purdue.edu/faculty/cason/papers/corr-inst.pdf`.

[13] Le ripetizioni sono state suddivise in blocchi: in ogni blocco la raccomandazione "cooperativa" (e_H^I per il primo e e_H^{II} per il secondo) veniva suggerita dal mediatore circa 60 volte su 100. Si è visto sperimentalmente che nei primi blocchi di esperimenti, i giocatori effettivamente giocavano circa sei volte su dieci la raccomandazione cooperativa mentre, negli ultimi blocchi di ripetizioni la loro media si attestava sul 40% che forse, non del tutto casualmente, rispecchia la percentuale legata alle strategie miste.

per almeno due motivi: innanzitutto in ogni caso veniva esplicitamente detto che il robot avrebbe seguito la raccomandazione, secondariamente il fatto che l'opponente fosse non umano riduce l'effetto dell'influenza di "preferenze sociali". Spiego meglio questo punto. Una delle questioni più difficili è certamente quella di stabilire le "vere" preferenze degli individui. Tanto per fare un esempio, non è chiaro che per tutti sia meglio ricevere 1 sapendo che un altro riceve 10, piuttosto che non ricevere nulla, sapendo che anche gli altri non riceveranno nulla. Questo tipo di fenomeni però dovrebbe essere attenuato se "l'altro" è non umano. Proprio perché entrambi i fattori precedenti potrebbero spiegare la deviazione dal comportamento suggerito, gli sperimentatori hanno introdotto la variante del pagamento ad una persona terza, estranea al gioco. In questo modo, dovrebbe essere messo in evidenza il ruolo dell'influenza delle preferenze sociali, cosa che non succedeva quando non erano previsti pagamenti all'opponente.

Nel caso di esperimenti con agenti umani, è stata anche introdotta l'idea di chiedere al giocatore di esprimere, in termini percentuali, una previsione del comportamento dell'avversario, introducendo un ulteriore meccanismo di pagamento che premiasse l'accuratezza della previsione. Questo, nella speranza di ottenere informazioni ulteriori sul perché le raccomandazioni non venivano seguite, e per osservare le variazioni nel tempo del processo di apprendimento degli agenti.

Naturalmente la fase più difficile, come già accennato, è quella dell'interpretazione dei risultati. All'incirca un quarto dei partecipanti ha sempre seguito, in ogni caso, le raccomandazioni ricevute. Inoltre, i risultati sulle aspettative dei comportamenti dell' altro agente mostrano che la probabilità che le raccomandazioni fossero seguite aumenta significativamente in presenza delle istruzioni, un segno chiaro che, una volta consapevoli, gli agenti tendono a comportarsi razionalmente ed ad aspettarsi che lo siano anche gli altri. Dunque, una conclusione che è possibile trarre dall'esperimento è che i giocatori si comportano razionalmente, una volta istruiti, ed imparano col tempo (come mostra il progressivo miglioramento dell'accuratezza sulle aspettative del comportamento altrui). Ma la domanda veramente interessante e senza risposta univoca è: perché i giocatori non seguono *subito* le raccomandazioni ricevute? Gli autori del lavoro avanzano qualche ipotesi. I soggetti hanno una *gerarchia* sulle aspettative: essi pensano che i loro opponenti seguono le raccomandazioni ma fanno errori e quindi scelgono un'azione differente con una certa probabilità, credono inoltre che i loro opponenti pensino che loro stessi seguono le raccomandazioni ma fanno errori eccetera eccetera. In questo contesto è interessante citare un gioco famoso del quale la Teoria dei Gochi dà una soluzione che porta ad un equilibrio di Nash: il gioco del *beau-*

ty contest [14]. Anche se un giocatore sa come agire (perché ha già giocato precedentemente o perché è in grado di calcolarne la soluzione) non è certo di vincere in questo gioco, la sua possibile vittoria dipende anche dagli errori commessi dagli altri giocatori (negli esperimenti citati in nota alcuni, ben consapevoli di questo, hanno scritto esplicitamente sul foglio commenti del tipo: "scrivo 1 anche se so che perderò..." o "la soluzione sarebbe 1 ma se indicassi 1 perderei"). Sotto certe condizioni questo porta al formarsi di un'aspettativa sul comportamento dell'avversario, cui si risponde con una scelta ottimale. Questa congettura secondo gli autori è corroborata dal fatto che contro i robot la raccomandazione di giocare gli equilibri puri di Nash è seguita praticamente sempre, mentre la strategia (e_H^I, e_H^{II}) qualche volta viene rifiutata. Il computer non fa errori, la dichiarazione di scegliere alto per il primo e sinistra per il secondo porta a sapere con certezza quel che viene detto all'opponente, questo porta a un equilibrio di Nash: non c'è ragione di deviare. Passando all'esperimento con gli umani invece, persino in questi casi (degli equilibri di Nash) le raccomandazioni non sono sempre seguite. Questo è spiegabile, secondo gli autori, proprio per il fatto che gli opponenti possono fare errori, e dunque, se anche ad esempio al primo viene detto di giocare alto, pur sapendo che all'altro viene detto destra, poiché gli opponenti possono fare errori, non è detto che sia ottimale seguire la raccomandazione alto.

Una congettura finale degli autori, che sembra condivisibile, è che certi equilibri correlati siano meno accettati di altri, cioè che l'insieme degli equilibri effettivamente implementabili sia più piccolo del politopo degli equilibri correlati.

3 Caso giochi a somma zero con matrici 2×2

In questo paragrafo prendiamo in considerazione i giochi a somma zero rappresentati con matrici 2×2 e vogliamo mostrare che in questo caso gli equilibri correlati non sono altro (essenzialmente) che gli equilibri in strategie miste. Questo corrisponde all'idea che, in un gioco strettamente competitivo, un arbitro che consiglia i giocatori dando loro informazioni su che strategia giocare

[14] n giocatori scrivono su un foglio un numero tra 1 e 100, vince chi ha scritto il numero che si avvicina di più ai $\frac{2}{3}$ della media dei numeri scritti dagli n giocatori. Un giocatore razionale non sceglie un numero a caso ma un numero minore o uguale a 67, che è l'intero più vicino a $(\frac{2}{3} \cdot 100)$. Tuttavia, se lui pensa che gli altri giocatori siano razionali giocherà un numero minore o uguale a 45, che è l'intero più vicino a $(\frac{2}{3} \cdot 67)$ e questo procedimento verrà iterato fino a raggiungere 1. Le istruzioni e i risultati di un paio di esperimenti si trovano qui: `http://www.diptem.unige.it/patrone/divulgazione-pat.htm`, vedasi la conferenza a Cesenatico (6 maggio 2006).

(in forma privata), non dovrebbe aggiungere nulla visto che arrivare all'equilibrio non necessita coordinamento.

Per ottenere questo risultato abbiamo semplicemente fatto tutti i calcoli...
Consideriamo una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

e sia

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

un equilibrio correlato associato al gioco. Un primo risultato è il seguente:

Sia $x = 0$, e siano $y, z > 0$. Allora $a = b = c = d$.

Si ha infatti il sistema:

$$\begin{cases} yb \geq yd \\ zc + wd \geq za + wb \\ cd \leq dz \\ by + dw \leq ay + cw \end{cases}.$$

Dalla prima disuguaglianza segue $b \geq d$, dalla terza $c \leq d$ quindi deve essere $b \geq d \geq c$. La seconda dà: $z(c - a) \geq w(b - d)$ e dunque $c \geq a$. Dalla quarta infine si ricava $a \geq b$, e dunque l'asserto è dimostrato.

È chiaro che nel caso in cui tutti i coefficienti sono uguali, gli equilibri correlati sono tutto il simplesso S_4, mentre gli equilibri in strategie miste sono l'insieme $S_2 \times S_2$, che è molto più piccolo. Il risultato precedente in qualche senso va nella direzione di mostrare che questo è l'unico caso in cui tale fenomeno può accadere. Infatti il caso $x = 0$, $y, z > 0$ rappresenta una situazione in cui un equilibrio correlato non può essere in strategie miste (infatti, se l'equilibrio fosse misto, con p (q) la probabiltà associata alla prima riga (colonna), allora $x = pq$ $y = p(1 - q)$ etc, per cui deve valere la relazione $(x + y)(x + z) = x$; se $x = 0$ questa implica a sua volta $yz = 0$, quindi uno dei due almeno deve essere nullo).

Supponiamo ora che ci sia una strategia (strettamente[15]) dominata: senza perdere generalità, possiamo supporre che la prima riga domini la seconda,

[15] Una strategia $x_1 \in X$ domina strettamente una strategia $x_2 \in X$ per il giocatore 1 se $f(x_1, y) \geq f(x_2, y), \forall y \in Y$ ed esiste un $\overline{y} \in Y$ per il quale $f(x_1, \overline{y}) > f(x_2, \overline{y})$. Si noti che malauguratamente in letteratura questa dominanza è spesso indicata con l'appellativo di dominanza debole.

per cui $a \geq c$, $b > d$. Possiamo anche supporre $a \leq b$. Esempio tipico:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede immediatamente che il sistema degli *strategic incentive constraints* implica $z = w = 0$, e quindi gli equilibri correlati sono misti, perché è chiaro che il giocatore gioca la prima riga con certezza ed il secondo gioca a caso la prima e la seconda, essendo totalmente indifferente fra le due. Quindi gli equilibri in miste sono del tipo $(1, 0, q, 1 - q)$, come i correlati. Casi del tipo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in cui c'è dominanza forte[16] o i coefficienti sono tutti differenti sono casi più semplici che si vedono con gli stessi calcoli.

Rimane il caso in cui non c'è dominanza tra le strategie. Possiamo supporre, senza perdere di generalità, $a > c$. Questo implica allora $d > b$ e $b < a$. caso tipico:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che in questo caso la strategia mista (completamente mista) è unica, e si calcola banalmente col principio di indifferenza. Si ottiene allora

$$aq + b(1 - q) = cq + d(1 - q) \quad ap + c(1 - p) = bp + d(1 - p),$$

che dà come risultato l'equilibrio

$$(\frac{d-c}{d-c+a-b}, \frac{a-b}{d-c+a-b}, \frac{d-b}{d-c+a-b}, \frac{a-c}{d-c+a-b}).$$

Il sistema degli *strategic incentive constraints* è il seguente:

$$\begin{cases} (a-c)x + (b-d)y \geq 0 \\ (c-a)z + (d-b)w \geq 0 \\ (b-a)x + (d-c)z \geq 0 \\ (a-b)y + (c-d)w \geq 0 \end{cases},$$

cui vanno aggiunti i vincoli di non negatività e di normalizzazione $((x + y + z + w = 1)$. Bisogna dimostrare che il sistema di disuguaglianze più

[16] Una strategia $x_1 \in X$ domina fortemente una strategia $x_2 \in X$ per il giocatore 1 se $f(x_1, y) > f(x_2, y), \forall y \in Y$. Si noti che in letteratura questa dominanza è spesso indicata con l'appellativo di dominanza stretta.

i vincoli accessori danno unica soluzione. Una maniera per vedere questo è la seguente: innanzitutto si mostra che le disuguaglianze devono essere uguaglianze. Poi, osservando che il sistema lineare ha (come deve essere!) determinante nullo si prendono tre delle 4 equazioni e si aggiunge l'equazione $x + y + z + w = 1$. A questo punto si vede che il sistema ammette unica soluzione (che necessariamente soddisfa le ipotesi di non negatività, perché una soluzione esiste sempre, e del resto si vede ad occhio).

Si trova che deve essere:

$$x \geq \frac{d-b}{a-c}y, \quad y \geq \frac{d-c}{a-b}w, \quad w \geq \frac{a-c}{d-b}z, \quad z \geq \frac{d-b}{a-c}x.$$

Per confronto, si ottiene che tutte devono essere uguaglianze. Da qui si conclude.

Osservazione 5 Sarebbe interessante sapere se esiste un metodo più diretto per ottenere il risultato, e soprattutto mostrarlo nel caso in cui le strategie siano più di 2. Tuttavia la cosa non sembra banale, ogni tentativo di calcolo è sempre lungo e noioso. Va però osservato che questo sta nella natura esponenziale del numero di disequazioni da risolvere per determinare gli equilibri correlati. Infatti le disequazioni da risolvere sono $n(n-1) + m(m-1)$, cui vanno aggiunti mn vincoli di non negatività ed un vincolo di uguaglianza. Naturalmente questo rende i calcoli impossibili da fare a mano già per m, n di poco maggiori di 2. Ad esempio, sono state fatte simulazioni([NCH], nota 5) per giochi 4×4, e se è vero che all'incirca in metà dei casi il politopo dei vincoli aveva 5 vertici o meno, nel caso di 4 giochi il politopo degli equilibri correlati aveva più di 100.000 vertici! Analogamente, un teorema generale di esistenza degli equilibri correlati, anche per giochi 2×2, basato puramente sui calcoli, non sembra facile da ottenere. Non a caso, l'esistenza degli equilibri correlati si mostra in maniera indiretta osservando che ogni equilibrio in miste è correlato, oppure in alternativa richiede tecniche di programmazione lineare (vedi [Pa] e [HS]). ■

Un'altra questione interessante è la seguente: Dove giacciono gli equilibri in strategie miste nel politopo P degli equilibri correlati? Osserviamo che questo politopo P giace nel simplesso di dimensione $N = nm$. Si ha che gli equilibri in strategie miste necessariamente giacciono in una faccia del politopo di dimensione minore del politopo stesso. Questo, tradotto in termini analitici, significa che almeno una delle disuguaglianze del sistema che caratterizza P (esclusa la condizione di appartenenza al simplesso $\sum p_{ij} = 1$) è verificata con il vincolo di uguaglianza, a condizione che il gioco non sia triviale, e con questo si intende che almeno un giocatore ha almeno due strategie che gli danno risultati diversi, per almeno una strategia fissata dell'altro giocatore.

La dimostrazione di questo fatto è la seguente.
Dato un equilibrio i strategie miste, ci sono due casi;
- o esiste almeno un giocatore che gioca una sua strategia con probabiltà nulla,
- oppure la coppia di strategie è fatta di strategie completamente miste.

Nel primo caso, ovviamente, un vincolo di non negatività è una uguaglianza,

Nel secondo caso, i due giocatori sono indifferenti fra le loro strategie, fissate quelle dell'altro: è sempre il principio di indifferenza! Ma questo significa che tutte le disuguaglianze che descrivono gli *strategic incentive constraints* sono uguaglianze, ed almeno una è necessariamente non banale perché il gioco è non banale. Per ulteriori risultati in questo senso vedi [NCH] e [So].

4 "Incentive Compatibility"

Una generalizzazione del modello classico di Nash di gioco non cooperativo in forma strategica, consiste nell'idea di *gioco Bayesiano*. In tali giochi, i giocatori possono avere informazioni incomplete sugli altri giocatori, e delle congetture, di tipo probabilistico, sui parametri a loro ignoti. Vediamo subito un esempio semplice, mettendo un parametro di incertezza nel gioco della battaglia dei sessi. Una matrice possibile che lo rappresenta è la seguente:

$$\begin{pmatrix} & L & R \\ T & (2,1) & (0,0) \\ B & (0,0) & (1,2) \end{pmatrix}$$

Nella storiella T (L) rappresenta la mossa di recarsi a teatro per il primo (secondo) giocatore, B (R) rappresenta la mossa di recarsi al cinema per il primo (secondo) giocatore. Entrambi preferiscono stare assieme, ma il primo a teatro il secondo al cinema. La variante che introduciamo è che il primo non sa se la matrice del gioco è quella precedente oppure la seguente:

$$\begin{pmatrix} & L & R \\ T & (2,0) & (0,2) \\ B & (0,1) & (1,0) \end{pmatrix}$$

Secondo il modello, il primo sa che il secondo preferisce recarsi al cinema piuttosto che a teatro, ma in ogni caso preferisce stare da solo. Dunque, il secondo ha informazione completa, il primo incompleta. La prima idea per costruire un modello adatto a questi tipi di situazioni è quella di supporre che ogni giocatore possa essere dividersi in vari *tipi*. Ogni giocatore sa il suo tipo, ed ha una distribuzione di probabilità sui tipi dell'altro giocatore. Nel nostro esempio, il tipo del primo giocatore è uno solo, mentre il secondo ha due tipi, diciamo tipo A (prima matrice) e tipo B (seconda matrice). In questo caso, assumeremo che alla matrice A il giocatore 1 associ probabilità p: in altre parole, con probabilità p pensa che il secondo voglia stare assieme, quindi con probabilità $1-p$ che voglia stare solo. Si tratta ora di definire un profilo di strategie, e le funzioni di utilità. Appare comodo pensare che ogni tipo rappresenti un giocatore. Dunque un profilo di strategie deve in questo caso essere una terna (x_1, x_2, x_3), che rappresenta la scelta del primo giocatore x_1, la scelta x_2 del secondo di tipo A e quella x_3 del secondo di tipo B. Analogamente, possiamo elencare le utilità dei giocatori nelle varie possibili uscite del gioco:

$$u_1(T, L, L) = 2p + 2(1-p),\ u_1(T, L, R) = 2p + 0(1-p),$$

$$u_1(T, R, L) = 0p + 2(1-p),\ u_1(T, R, R) = 0p + 0(1-p),$$
$$u_1(B, L, L) = 0p + 0(1-p),\ u_1(B, L, R) = 0p + 1(1-p),$$
$$u_1(B, R, L) = 1p + 0(1-p),\ u_1(B, R, R) = 1p + 1(1-p).$$

Analogamente, per il giocatore 2 di tipo A:

$$u_{2A}(T, L, L) = 1, u_{2A}(T, L, R) = 1, \ldots,$$

$$u_{2B}(T, L, L) = 1, u_{2B}(T, L, R) = 2. \ldots,$$

fare tutto questo è utile perché a questo punto definire che cosa sia un equilibrio del gioco Bayesiano è molto naturale. In effetti, a partire dal gioco Bayesiano, abbiamo costruito un gioco classico, per cui un profilo di strategie è di equilibrio Bayesiano per il gioco di partenza se e solo se è un equilibrio di Nash del gioco associato.

Formalmente: un gioco Bayesiano è un gioco definito da un insieme N di giocatori, un insieme C_i di azioni possibili per ogni giocatore i, un insieme di *tipi* T_i, una funzione di probabilità p_i e una funzione di utilità u_i. La funzione di probabilità $p_i : T_i \to \Delta(T_{-i})$ dove T_{-i} indica l'insieme di tutte le possibili combinazioni di tipi per i giocatori tranne i. Se $C = \times_{i \in N} C_i$ e $T = \times_{i \in N} T_i$, la funzione di utilità è una funzione $u_i : C \times T \to R$: $u_i(c, t)$ rappresenta il payoff che il giocatore i può ottenere se i tipi dei giocatori sono tutti come in t e se tutti i giocatori scelgono le loro mosse come specificato in c. Un equilibrio Bayesiano di tale gioco è un equilibrio di Nash del gioco classico associato, come spiegato nell'esempio precedente.

Naturalmente, dato un gioco bayesiano finito (cioè in cui c'è un numero finito di giocatori, ciascuno ha un numero finito di tipi, ed ogni giocatore ha un numero finito di mosse), nulla vieta di definire anche gli equilibri in strategie miste. Ma il discorso non termina qui, perché viene spontaneo provare a capire che cosa sia, in un contesto Bayesiano, l'equivalente di un equilibrio correlato della teoria classica. Ora, visto che è stata introdotta la figura del mediatore, si può ipotizzare che le informazioni non viaggino più, come nel modello classico, solo dal mediatore ai giocatori, ma anche nel senso opposto. Si può allora ipotizzare che i giocatori comunichino, privatamente, il loro tipo al mediatore il quale, avendo queste informazioni, raccomandi poi certe mosse ai giocatori (raccomandazioni che possono anche essere sia di tipo deterministico, sia di tipo stocastico). Sia $(N, (C_i)_{i\in N}, (T_i)_{i\in N}, (p_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$ un gioco Bayesiano con i giocatori. Per ogni $c = (c_i)_{i\in N}$ in $C = \times_{i\in N} C_i$ e per ogni $t = (t_i)_{i\in N}$ in $T = \times_{i\in N} T_i$, sia $\mu(c|t)$ la probabilità condizionata che il mediatore suggerisce ad ogni giocatore i che sceglie la mossa c_i se il giocatore i è del tipo t_i. Naturalmente i valori $\mu(c|t)$ devono soddisfare i vincoli:

$$\sum_{c\in C} \mu(c|t) = 1 \quad \mu(d|t) \geq 0 \quad \forall d \in C, \forall t \in T.$$

La funzione $\mu : T \to \Delta(C)$ è detta *mediation plan* per il gioco con comunicazione.
Se ogni giocatore segue le raccomandazioni suggerite dal mediatore, l'utilità attesa per il tipo t_i del giocatore i dal piano μ è:

$$U_i(\mu|t_i) = \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} \sum_{c\in C} p_i(t_{-i}|t_i)\mu(c|t)u_i(c,t)$$

dove $T_{-i} = \times_{j\in N-i} T_j$ e $t = (t_{-i}, t_i)$.

E' chiaro che in generale non è verificabile se un giocatore mente oppure no sul suo tipo. Esattamente come, ricevuta una raccomandazione, non sia possibile in generale forzarlo a seguire la stessa. Che condizione rende un communication plan "credibile"? L'utilità del giocatore i, condizionata dal fatto che sia del tipo t_i, se sceglie di dichiarare al mediatore di essere del tipo s_i, e di compiere l'azione d_i, è data da:

$$U_i^*(\mu, d_i, s_i|t_i) = \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} \sum_{c\in C} p_i(t_{-i}|t_i)\mu(c|t_{-i}, s_i)u_i(c_{-i}, d_i, t).$$

Abbiamo detto che il modello prevede che il giocatore riferisca al mediatore il suo tipo, noto a lui solo e compia delle scelte non influenzabili da altri. Così, nel nuovo gioco bayesiano ogni giocatore deve decidere di che tipo dichiararsi al mediatore ed il suo piano di scelta di un'azione in C_i come funzione delle raccomandazioni del mediatore. Quindi una generica strategia per i è una coppia (s_i, δ_i) dove s_i è un tipo ($s_i \in T_i$) e $\delta_i : C_i \to C_i$ è una generica funzione. Posto $\delta_i(c_i) = d_i$, si ha che un communication plan è *incentive compatible* se si ha che:

$$U_i(\mu|t_i) \geq U_i^*(\mu, d_i, s_i|t_i),$$

per ogni i, per ogni t_i, per ogni δ_i, per ogni s_i. È facile verificare che, nel caso in cui ogni giocatore sia di un solo tipo, il sistema di disequazioni è equivalente a quello che caratterizza gli equilibri correlati.

E' chiaro che la definizione di incentive compatible mediation plan è la naturale generalizzazione all'ambiente Bayesiano dell'idea di equilibrio correlato per la teoria classica[My].

La seguente è una bibliografia, senza troppe pretese di completezza, di lavori su gli equilibri correlati dal 2000 in poi.

Riferimenti bibliografici

5 Bibliografia

5.1 Riferimenti citati nel testo

[Au] R.J. Aumann, On the Non-Transferable Utility Value: A Comment on the Roth-Schaffer Examples, *Econometrica* **53** (1985), 667–677.

[AM] R.J. Aumann e M. Maschler, Some Thoughts on the Minimax Principle, Management Sci. 18, 54-63, (1972).

[CS] T. Cason e T. Sharma, Recommended play and Correlated equilibria: An Experimental Study, *Working Paper*, (2006).

[Ha] J.C. Harsanyi, A General Solution for Finite Non-Cooperative Games, Based on Risk-Dominance, in *Advances in Game Theory* (M. Dresher, L. S. Shapley, and A.W. Tucker, Eds.), Princeton, NJ: Princeton University Press, (1964).

[HS] S. Hart e D. Schmeidler, Existence of correlated equilibria, *Mathematics of Operation research* **14** (1989), 18–25.

[MS] J. Morgan e M. Sefton, An Experimental Investigation of Unprofitable Games, *Games and Economic Behavior* **40** (2002), 123–146.

[My] R.B. Myerson, *Game Theory, Analysis of Conflit*, Harvard University Press 1991

[NCH] R. Nau, S. Gomez Canovas e P. Hansen, On the geometry of Nash equilibria and correlated equilibria, *International Journal of Game Theory*, **32** (2003), 443–453.

[Pa] C. Papadimitriou, Computing correlated equilibria in multi-player games, *Annual ACM Symposium on Theory of Computing archive Proceedings of the thirty-seventh annual ACM symposium on Theory of computing* (2005),49–56

[So] J. Sorensen, An Analytic Study of the Correlated Equilibrium Polytope, *Technical Report* (2006).

5.2 Altri riferimenti sugli equilibri correlati

[ABD] E. Altman, N. Bonneau e M. Debbah, Correlated Equilibrium in Access Control for Wireless Communications, Networking 2006, Coimbra, Portugal, May 15–19, 2006.

[Ar] A. Calvó-Armengol, The set of correlated equilibria of 2×2 games, *Technical Report* (2006).

[CK] G. Christodulu e E. Koutsoupias, On the price of anarchy and stability of correlated equilibria of linear congestion games, *Technical Report* (2005).

[GL] F. Germano e G. Lugosi , Existence of sparsely supported correlated equilibria, *Technical Report* (2006).

[HM] S. Hart e A. Mas-Colell, A simple adaptive procedure leading to a correlated equilibrium, *Econometrica* **68** (2000), 1127–1150.

[LM] P. La Mura, Correlated Equilibria of Classical Strategic Games with Quantum Signals, *International Journal of Quantum Information*, **3** (2005).

[LS] J. Lenzo e T. Sarver, Correlated Equilibrium in Evolutionary Models with Subpopulations investment model problems in topological spaces, *Games and Economic Behavior, forthcoming.*

[Pat] F. Patrone, *Decisori (razionali) interagenti*, Edizioni Plus, Pisa, 2006

[RS] D.M. Ramsey e K. Szajowski, Correlated equilibria in competitive staff selection problem, *Banach Center publications*, **71** (2006), 253–265.

[SL] G. Stoltz e G. Lugosi, Learning Correlated equilibria in games with compact sets of strategies, *Games and Economic Behavior, submitted.*

[SV] E. Solan e R.V. Vohra, Correlated equilibrium in quitting games, *Mathematics of Operation Research* **26** (2001), 601–610.

[TU] T. Ui, Correlated Equilibrium and Concave Games, *Technical report* (2004).