Beauty contest

Appunti a cura di
Fioravante PATRONE
http://www.diptem.unige.it/patrone/default.htm

versione del: 19 marzo 2007

Indice

Queste brevi note sono dedicate alla formalizzazione del “beauty contest” come game form e gioco in forma strategica.

Fioravante PATRONE	http://www.diptem.unige.it/patrone	homepage
Dipartimento di Ingegneria della	http://tdg.dima.unige.it	web teaching
Produzione, Termoenergetica e	http://www.citg.unige.it/citg.htm	web server “CITG”
Modelli Matematici	http://www.scallywag.it	web page del gruppo
P.le Kennedy - Pad D		Scaλλywag
16129 Genova - ITALY		
patrone@diptem.unige.it	http://www.diptem.unige.it/patrone/DRI.htm	Decisori (razionali) interagenti

Ricordo la descrizione del "beauty contest", come riportata nel foglio distribuito a Cesenatico.

Vedi: `http://www.diptem.unige.it/patrone/divulgazione-pat.htm`

> Dovete scrivere sul foglio che vi viene consegnato un numero *intero* scelto fra i numeri da 1 a 100.
>
> Non essendo possibile predisporre un vero esperimento, per ottenere comunque un risultato di un qualche interesse siete pregati di *non discutere tra di voi.*
>
> I fogli consegnati sono numerati. La numerazione dei fogli serve solo per una identificazione formale dei giocatori. Vi invito a scrivere il vostro nome e cognome sul foglio.
>
> Il risultato di questo gioco è: *vincere* o *perdere.* Volendo, si può assumere che si vinca un premio monetario (da dividere eventualmente in parti uguali tra i vincitori, in caso di più vincitori).
>
> Chi vince? Il metodo per stabilire chi vince è il seguente: si raccolgono i foglietti distribuiti e si calcola il valore medio dei numeri che sono stati scritti. Vince chi si avvicina di più ai 2/3 del valore medio.
>
> In formule, vince chi si avvicina di più al numero seguente:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{n}$$

1 Game form

L'esercizio da compiere consiste nella "traduzione" della descrizione del gioco che è stata data sopra, dal linguaggio "umano" ("naturale", se preferite) a quello della TdG.

La rappresentazione più immediata del gioco (e l'unica che tratterò) è quella della forma strategica del gioco. Per chiarezza descriverò prima la game form (in questa sezione) e poi, nella successiva, farò delle considerazioni sulle preferenze dei giocatori per introdurre il gioco vero e proprio, in forma strategica.

Indico con N l'insieme dei giocatori, Anzi, per comodità, suppongo di usare i primi n numeri naturali per indicare i giocatori (n è la cardinalità di N, ovvero il numero dei giocatori). Quindi, $N = \{1, \ldots, n\}$.

Lo spazio delle strategie X_i è, evidentemente, $\{1, \ldots, 100\} = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 100\}$ per ogni $i \in N$.

L'insieme degli esiti può essere convenientemente rappresentato da $E = \{0,1\}^n \setminus \{0\}$, dove $0 = (0,\dots,0) \in \{0,1\}^n$. Un elemento $e \in E$, ovvero $(e_i)_{i \in N}$, rappresenta i vincitori del gioco nel modo seguente: se i è tra i vincitori, allora $e_i = 1$, altrimenti $e_i = 0$. Togliamo via l'elemento 0 in quanto le regole del gioco garantiscono che almeno un vincitore vi sia senz'altro (i dettagli sono visti poco oltre).

Naturalmente, se va bene E come descritto sopra come insieme degli esiti, ogni suo soprainsieme andrà ugualmente bene. Potremmo quindi prendere (volendo) $E = \{0,1\}^n$, o anche $E = \mathbb{R}^n$. Se queste scelte non creano alcuna complicazione a livello di game form, possono invece, come vedremo, creare qualche problema quando si passa a considerare le preferenze dei giocatori.

Ora si tratta di definire $h : X \to E$. Naturalmente $X = \{1,\dots,100\}^n$, ovvero $X = \prod_{i \in N} X_i$ (come al solito).

Ebbene, ato un profilo di strategie $x = (x_1,\dots,x_n) \in X$, $h(x)$ si ottiene così: $e = h(x)$ è l'elemento di E che ha la coordinata k-esima uguale a 1 se e solo se:

$$k \in \arg\min \phi$$

dove $\phi : N \to \mathbb{R}$ è così definita (dato $x \in X$):

$$\phi(1,\dots,n) = \left| x_j - \frac{2}{3} \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{n} \right|$$

Osservo che, per come è definita h, ed in particolare per il fatto che utilizza lo arg min di una funzione definita sull'insieme finito N, siamo certi che questo arg min sia non vuoto e, pertanto, almeno una coordinata sia uguale ad 1.

2 Preferenze e gioco

Quando si descrive il "beauty contest", si sottintende che i giocatori abbiano preferenze "ovvie", caratterizzate dalle seguenti due proprietà:
- di un esito, loro guardano solo la coordinata che"li riguarda"
- fra 1 e 0 (ovvero, fra vincere e perdere) preferiscono 1

Se queste sono le preferenze, esse possono essere facilmente rappresentate con una funzione di utilità. Dato il giocatore $k \in N$, indichiamo con P_k la proiezione di E sulla sua k-esima coordinata. Allora:

$$u_k(e) = P_k(e)$$

Con preferenze come queste sopra descritte, lo spazio degli esiti E viene partizionato in due sottoinsiemi disgiunti, che rappresentano ciascuno una "curva di indifferenza[1]": $E_0 = \{e \in E : P_k(e) = 0\}$ e $E_1 = \{e \in E : P_k(e) = 1\}$.

Ovviamente, se assumiamo che le preferenze del nostri giocatori soddisfano alle condizioni di von Neumann e Morgenstern per le decisioni in condizione di rischio, ogni funzione che assuma su E_0 un valore strettamente minore di quello che assume in E_1 andrà altrettanto bene per rappresentare le preferenze.

Naturalmente, le preferenze del decisore sono fatti suoi, e quindi lui potrebbe anche preferire gli elementi di E_0 a quelli di E_1 (ovvero, preferire perdere anziché vincere).

Non solo, nulla vieta al nostro decisore di avere preferenze di tipo diverso. Per esempio, potrebbe preferire che ("ceteris paribus") il giocatore[2] 7 vinca anziché perda.

Oppure potrebbe preferire la situazione in cui vincono tutti a tutto il resto: $u(1, \dots, 1) = 1$ e $u(e) = 0$ per ogni $e \in E$, $e \neq (1, \dots, 1)$.

Oppure potrebbe preferire la situazione in cui vincono 7 e 23 a quella in cui vincono 5, 8 e 11, a quella in cui vincono 7, 23 e 5, etc...

O preferire che vi siano quanti più "pari merito" possibile (o avere questo tipo di preferenze, posto però di essere fra i vincitori).

L'elenco sta diventando noioso. Credo che quanto detto basti a mettere in evidenza quanto diverse possano essere le preferenze dei giocatori.

Non solo, nel contesto delle funzioni di utilità di vNM (von Neumann-Morgenstern), possono sussistere differenze anche nella "intensità relativa" delle preferenze. Ad esempio, il caso del decisore che preferisce che vi siano quanti più "pari merito" possibile (indipendentemente dal suo proprio personale risultato), può essere descritto con la seguente funzione di utilità:

$$u_k(e) = \mathrm{card}(\arg\min \phi)$$

Ma prendere $v_k = (u_k)^2$ corrisponde a considerare una diversa funzione di utilità di vNM, che esprime preferenze identiche sugli esiti in E, ma diverse rispetto alle lotterie su E.

Finora abbiamo implicitamente assunto che le preferenze dei giocatori fossero su $E = \{0, 1\}^n \setminus \{0\}$ (o su lotterie su E). Come detto nella sezione precedente, nulla vieta di prendere, nella definizione di game form, ad esempio $E = \mathbb{R}^n$. Ma, così facendo, "obblighiamo" i decisori ad avere preferenze su un insieme molto più grande di alternative, mentre è sufficiente considerare il predetto $\{0, 1\}^n \setminus \{0\}$.

[1] Per omaggio al linguaggio tradizionalmente usato dagli economisti. Evidentemente, questi due sottoinsiemi di E hanno una struttura che ricorda poco l'idea di "curva".

[2] Supponendo che $n \geq 7$...