

**QUADRO CONCETTUALE**

	Decisioni in condizioni di certezza	Decisioni in condizioni di rischio	Decisioni in condizioni di incertezza	Decisioni interattive (giochi non coop. in forma strategica)	Decisioni collettive (ottimizzazione paretiana)
Dati	$X$ : Azioni disponibili $E$ : Eventi finali certi	$X$ : Azioni disponibili $E$ : Eventi finali certi	$X$ : Azioni disponibili $E$ : Eventi finali certi $S$ : Stati di natura	$X, Y$ : Azioni disponibili per $I$ e $II$ $E$ : Eventi finali certi	$Z$ : Azioni disponibili (può essere $Z = X \times Y$ ) $E$ : Eventi finali certi
Risultati	$h : X \rightarrow E$ $x \rightsquigarrow e \in E$ (azione $\rightsquigarrow$ evento certo)	$h : X \rightarrow \Delta(E)$ $x \rightsquigarrow L \in \Delta(E)$ (azione $\rightsquigarrow$ una lotteria su eventi)	$h : X \rightarrow K$ $x \rightsquigarrow [k : S \rightarrow E]$ (azione $\rightsquigarrow$ legge che mappa ogni stato di natura in un evento)	$h : X \times Y \rightarrow E$ $x, y \rightsquigarrow e \in E$	$h : Z \rightarrow E$ $z \rightsquigarrow e \in E$
Preferenze	$\succeq$ su $E$ preord. totale	$\succeq$ su $\Delta(E)$ preord. totale che soddisfa assioma di vNM	$\succeq$ su $K = \{k : S \rightarrow E\}$ preord. totale che soddisfa assioma di Savage	$\succeq_I$ e $\succeq_{II}$ su $E$ Nota: se necessario, su $\Delta(E)$ , di vNM	$\succeq_I$ e $\succeq_{II}$ su $E$ Nota (*)
Preferenze indotte	$\succeq$ su $X$ $x' \succeq x'' \Leftrightarrow h(x') \succeq h(x'')$	$\succeq$ su $X$ $x' \succeq x'' \Leftrightarrow h(x') \succeq h(x'')$	$\succeq$ su $X$ $x' \succeq x'' \Leftrightarrow h(x') \succeq h(x'')$	$\succeq_I$ e $\succeq_{II}$ su $X \times Y$ $(x', y') \succeq_I (x'', y'') \Leftrightarrow h(x', y') \succeq_I h(x'', y'')$ analogamente per $\succeq_{II}$	$\succeq$ su $Z$ $z' \succeq z'' \Leftrightarrow h(z') \succeq_I h(z'')$ e $h(z') \succeq_{II} h(z'')$
Utilità	$u : E \rightarrow \mathbb{R}$ (ordinale)	$u : E \rightarrow \mathbb{R}$ (cardinale) utilità di vNM	$u : E \rightarrow \mathbb{R}$ (cardinale) serve anche $p \in \Delta(S)$	$u, v : E \rightarrow \mathbb{R}$ Nota: se necessario, $u, v$ di vNM	$U : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ Nota (****)
Utilità indotte	$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ $f = u \circ h$	$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ $f = \tilde{u} \circ h$ (**)	$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ $f = \hat{u} \circ h$ (***)	$f, g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ $f = u \circ h$ $g = v \circ h$	$F : Z \rightarrow \mathbb{R}^2$ $F = U \circ h$

(\*)  $\succeq_I$  e  $\succeq_{II}$  possono essere preordini totali che denotano preferenze di due decisori diversi, oppure due preordini di uno stesso decisore che non può/vuole sintetizzarli in unico preordine totale

(\*\*)  $\tilde{u} : \Delta(E) \rightarrow \mathbb{R}$  è così definita:  $\tilde{u}(L) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot u(e_i)$ , essendo  $L$  la lotteria che assegna probabilità  $p_i$  ad  $e_i$ ;  $f(x) = \tilde{u}(h(x))$ ; dato  $\bar{x} \in X$ , se  $h(\bar{x})$  è la lotteria che assegna probabilità  $\bar{p}_i$  ad  $e_i$ , è  $f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i \cdot u(e_i)$

(\*\*\*)  $\hat{u} : K \rightarrow \mathbb{R}$  è così definita:  $\hat{u}(k) = \sum_{i=1}^n p(s_i) \cdot u(k(s_i))$ ;  $f(x) = \hat{u}(h(x))$ ; dato  $\bar{x} \in X$ , se  $h(\bar{x})$  è la mappa  $\bar{k}$  per cui  $\bar{k}(s_i) = \bar{e}_i$ , è  $f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n p(s_i) \cdot u(\bar{k}(s_i)) = \sum_{i=1}^n p(s_i) \cdot u(\bar{e}_i)$

(\*\*\*\*)  $U$  "rappresenta"  $\succeq$  su  $Z$  nel senso che  $z_1 \succeq z_2 \Leftrightarrow U(z_1) \geq U(z_2)$ . Si noti che qui  $\geq$  indica l'ordine (non totale) su  $\mathbb{R}^2$  così definito:  $(x_1, y_1) \geq (x_2, y_2) \Leftrightarrow [(x_1 \geq x_2) \text{ e } (y_1 \geq y_2)]$

## Note aggiuntive

LOTTERIE INDOTTE da  $p$  su  $S$ .

Una lotteria  $L$  è data da  $p$  su  $E$ . Indichiamo con  $p_i$  la prob che  $p$  assegna a  $x_i$ , cioè  $p_i = p(x_i)$ .

Nel contesto delle decisioni in condizioni di incertezza, data  $p$  su  $S$ , una azione  $x \in X$  identifica una lotteria su  $E$ . Abbiamo:  $p(x_i) = p(\{s \in S : k(s) = x_i\})$ . Dove  $k = h(x)$ .

## UTILITA' ORDINALE

Abbiamo  $\tilde{u} : \Delta(E) \rightarrow \mathbb{R}$ . Si noti che questa  $\tilde{u}$  di fatto è una funzione di utilità "ordinale" che rappresenta le preferenze  $\sqsubseteq$  su  $\Delta(E)$ . Si noti che la  $\sqsubseteq$  è un preordine totale, quindi con poche condizioni ulteriori (tipo la continuità), sarà rappresentabile ad esempio con una funzione di utilità continua.

Noi vogliamo che  $\tilde{u}$  sia:

- esprimibile mediante una  $u : E \rightarrow \mathbb{R}$
- questa esprimibilità vogliamo sia di tipo lineare

Questi sono i requisiti del teorema di vNM

Analogo discorso per la  $\hat{u}$ , in condizioni di incertezza. La vogliamo rappresentare mediante la solita  $u$  e le prob soggettive.