Giochi semplici, indici di potere e scelte sociali.

Parte 1: giochi semplici

S. Moretti[1]
Istituto per la Matematica Applicata, Consiglio Nazionale delle Ricerche
Via De Marini 6 (Torre di Francia), 16149 Genova

F. Patrone[2]
DIMA, Università di Genova
Via Dodecaneso 35, 16146 Genova

Testo per conferenza IRRSAE del 22 Novembre 2000.

versione del 2 settembre 2006

Indice

1 Breve introduzione ai giochi cooperativi 2

2 Coalizioni vincenti e perdenti 2

3 Appendice ai giochi semplici 14

Altro materiale e informazioni sulla Teoria dei Giochi sono disponibili in rete alla pagina:
Decisori (razionali) interagenti

[1]ora: Dipartimento di Epidemiologia e Biostatistica, Istituto Nazionale per la Ricerca sul Cancro, Genova.
[2]ora: DIPTEM, Facoltà di Ingegneria, Università di Genova.

1 Breve introduzione ai giochi cooperativi

Definiamo gioco cooperativo a utilità trasferibile o *TU-game* (*Transferable Utility game*) come segue:

Definizione 1.1 Un gioco cooperativo a utilità trasferibile a n persone è una coppia $G =< N, \nu >$ dove $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ è un insieme finito con n elementi e $\nu : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ è una funzione a valori reali definita su tutti i sottoinsiemi di N e tale che $\nu(\emptyset) = 0$.

■

Gli elementi dell'insieme N rappresentano gli n *giocatori* del gioco $< N, \nu >$.
Un generico sottoinsieme S di N si chiama *coalizione*.
ν si chiama *funzione caratteristica* del gioco e $\nu(S)$ rappresenta la quantità di utilità che i membri di S possono ottenere coalizzandosi fra loro (le notazioni di gioco cooperativo a utilità trasferibile $< N, \nu >$ e (N, ν) saranno utilizzate nel seguito indifferentemente).

Definizione 1.2 [Superadditività] Il gioco $G =< N, v >$ si dice *superadditivo* se, $\forall S, T \in \mathcal{P}(N)$ (insieme delle parti di N) tali che $S \cap T = \emptyset$ si ha:
$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$

■

L'intepretazione è la seguente: se S e T sono coalizioni disgiunte, ne segue che, raggruppando le loro forze, esse possono ottenere almeno tanto quanto ottengono separatamente.
Nel caso dei giochi superadditivi è ragionevole aspettarsi che si formerà la cosiddetta "grande coalizione", cioè quella formata da tutti gli n giocatori, e il problema sarà come spartire l'utilità totale $\nu(N)$ tra tutti i giocatori. Ad ogni modo, almeno che non espressamente indicato di volta in volta, noi non assumeremo a priori che la condizione di superadditività sia soddisfatta dai giochi che considereremo.

Esempio 1.1 (Gioco dei pirati) *Tre pirati sono alla ricerca di un tesoro (il cui valore è t) e per raggiungerlo devono attraversare un fiume di larghezza d. Ognuno possiede una pertica di lunghezza* $h = \frac{2}{3}d$. *Per raggiungere il tesoro occorre quindi che si formi una coalizione di almeno due pirati. Posto* $N = \{1, 2, 3\}$ *l'insieme dei giocatori, la funzione caratteristica del gioco è chiaramente:*
$v(1) = v(2) = v(3) = 0, V(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = t$

2 Coalizioni vincenti e perdenti

In Sociologia e nelle Scienze Politiche, i giochi cooperativi ad utilità trasferibile sono stati utilizzati per studiare svariati contesti decisionali che comprendono al loro interno uno scrutinio elettorale.

Si consideri un dato insieme N di n "giocatori": possono essere individui, città, partiti, azionisti, condomini.
Si immagini una regola la quale dice quale requisito debba soddisfare un gruppo di giocatori per essere in grado di far passare una decisione.
In questo contesto è naturale pensare ad un gioco in cui ogni gruppo è o vincente o perdente, nel senso che o ottiene di far passare la propria decisione o non ottiene di farla passare.
Per questo tipo di situazioni, la teoria ci fornisce un modello che è proprio di una data classe di giochi cooperativi: i *giochi semplici*.
L'idea è quella di costruire un gioco in cui ogni coalizione S è o vincente ($\nu(S) = 1$) o perdente ($\nu(S) = 0$), in altre parole la sua funzione caratteristica sia definita come $\nu : \mathcal{P}(N) \to \{0, 1\}$.
Possiamo allora dire:

Definizione 2.1 Un gioco si dice *semplice* se:

1. $\forall S \subseteq N$, si ha $\nu(S) = 0$ oppure $\nu(S) = 1$.
2. $\nu(N) = 1$.

■

L'interpretazione è che la coalizione S con valore 1 possa decidere sul problema sotto considerazione senza l'aiuto dei giocatori al di fuori di S. Per questo motivo, queste coalizioni sono chiamate *vincenti*. Si noti che nella definizione di gioco semplice, la coalizione N di tutti i giocatori è in grado di aggiudicarsi 1. Questo, nel contesto decisionale a cui ci si riferiva all'inizio di questo paragrafo, potrebbe essere interpretato come il fatto che il gruppo formato da tutti i giocatori riesce sempre a soddisfare il requisito per far passare la propria decisione.
In letteratura è possibile trovare definizioni diverse di gioco semplice. Per esempio, una molto diffusa è quella che definisce gioco semplice come gioco che soddisfi il solo requisito 1 della definizione 2.1, introducendo il requisito 2 nella definizione di un'ulteriore sottoclasse di giochi semplici, i *giochi di controllo*. Noi comunque indicheremo giochi semplici quelli definiti come in 2.1.
Senza nessuna ulteriore specificazione, è quindi anche possibile che, per esempio, se una coalizione $S \subseteq N$ è vincente, anche la sua complementare in N, cioè $N \setminus S$ sia a sua volta vincente (a questo proposito si veda il paragrafo 3).

Esercizio 2.1 *Descrivere un gioco semplice $G = (N, v)$, dove N è l'insieme degli n giocatori del gioco G, in cui una qualsiasi coalizione è vincente se* *possiede il* consenso unanime *di tutti i giocatori appartenenti ad un gruppo* $U \subseteq N$*, dove* U *è una coalizione fissata avente un numero di giocatori strettamente maggiore di* 1.

Dovrebbe essere chiara, a questo punto, la portata dei giochi semplici nello studio, soprattutto, delle scienze politiche. Ma se ancora non lo è si consideri la seguente particolare classe di giochi semplici: i *giochi di maggioranza pesata.*

Definizione 2.2 Sia $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ un vettore di componenti non negative e sia $q \in \mathbb{R}$ t.c.

$$0 < q < \sum_{i=1}^{n} p_i \tag{1}$$

Allora si definisce *gioco di maggioranza pesata* $[q; p_1, p_2, \ldots, p_n]$ il gioco semplice (N, v) definito da:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } \sum_{i \in S} p_i \leq q \\ \\ 1 & \text{se } \sum_{i \in S} p_i > q \end{cases} \tag{2}$$

■

Un'interpretazione può essere la seguente: i giocatori sono n partiti politici aventi rispettivamente $p_1, p_2, \ldots, p_n$ seggi in parlamento e q il "quorum", cioè il numero minimo di voti necessario per approvare una legge.
Si noti nella definizione 2.2 il segno di maggiore stretto come criterio di attribuzione del valore 1 ad una coalizione generica S. Per quanto ragionevole (si pensi ad esempio alla frase "maggioranza della metà più uno"), tale criterio non è affatto scontato. Anzi, è molto facile in letteratura (si veda ad esempio il libro di Owen), trovare definizioni di giochi di maggioranza pesata con funzioni caratteristiche che prevedono valore zero per la coalizione la cui somma dei pesi è strettamente minore alla quota di maggioranza e valore pari a uno per la coalizione la cui somma dei pesi sia maggiore o uguale alla stessa quota. Cambia qualcosa? Ovviamente sì , dato che le due definizioni sono diverse. C'è però un'ulteriore aspetto interessante legato alle due diverse formulazioni di gioco di maggioranza: dato un gioco di maggioranza definito in uno dei due modi, è sempre possibile indicare una quota in grado di rappresentare lo stesso gioco secondo l'altra definizione? L'esempio seguente illustra in una specifica situazione il precedente interrogativo.

Esempio 2.1 *Sia* $G =< \{1, 2, 3\}, v >$ *un gioco di maggioranza secondo la definizione 2.2 con una struttura di pesi e quota pari a* $[2; 1, 1, 1]$. *Tale struttura determina la funzione caratteristica che assume i seguenti valori:*
$v(\emptyset) = 0; v(1) = 0; v(1, 2) = 0; v(2) = 0; v(2, 3) = 0; v(1, 2, 3) = 1; v(1, 3) = 0; v(3) = 0$

La stessa struttura di pesi e la stessa quota, secondo la definizione alternativa, cioè quella che assegna il valore 1 *ad una generica coalizione qualora venga raggiunta o superata la quota di maggioranza e il valore* 0 *qualora la stessa non venga raggiunta, determina invece un gioco la cui funzione caratteristica risulta* $v(\emptyset) = 0; v(1) = 0; v(1,2) = 1; v(2) = 0; v(2,3) = 1; v(1,2,3) = 1; v(1,3) = 1; v(3) = 0$
I due giochi non sono gli stessi, ce lo aspettavamo. In questo secondo contesto, dove si guadagna 1 *anche in corrispondenza del raggiungimento della quota* $q = 2$*, anche le coalizioni con due giocatori sono vincenti. È però interessante notare che in questa seconda tipologia di giochi di maggioranza, è possibile descrivere il gioco ottenuto in base alla definizione 2.2 semplicemente attribuendo il valore* $2 + \delta$ *alla quota di maggioranza, con* $\delta \in (0, 1]$*. Con tale quota infatti, a parità di pesi, in base alla definizione alternativa, si ottiene il gioco con* $v(\emptyset) = 0; v(1) = 0; v(1,2) = 0; v(2) = 0; v(2,3) = 0; v(1,2,3) = 1; v(1,3) = 0; v(3) = 0$
che è esattamente il gioco di partenza, in cui la quota era pari a 2*.*

Quanto discende dal precedente esempio può essere generalizzato. Ossia: dato un gioco di maggioranza secondo la definizione 2.2, esiste sempre un gioco di maggioranza secondo la definizione alternativa equivalente al primo.

Proposizione 2.1 *Sia* $G =< N, v >$ *un gioco di maggioranza in base all definizione 2.2 con pesi* $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *e* $q \in \mathbb{R}$*.*
Sia inoltre $G^* =< N, w >$ *un gioco di maggioranza in base alla definizione alternativa, cioè tale per cui*

$$w(S) = \begin{cases} 0 & se \sum_{i \in S} p_i < q^* \\ \\ 1 & se \sum_{i \in S} p_i \geq q^* \end{cases}, \qquad q^* \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Allora $v(S) = w(S) \forall S \subseteq N \Leftrightarrow q^* = q + \epsilon$*, con* $\epsilon \in (0, m]$ *dove*
$m = \min \left\{ \Big((\sum_{i \in S} p_i) - q \Big) : S \subseteq N, \sum_{i \in S} p_i > q \right\}$.

Dim.
(⇒.)
Evidentemente si avrà

$$\begin{cases} \sum_{i \in S} p_i \leq q \\ \sum_{i \in S} p_i < q^* = q + \epsilon \end{cases}, \qquad \forall S \subseteq N \qquad t.c. \qquad v(S) = w(S) = 0 \tag{4}$$

che è verificata per qualsiasi $\epsilon > 0$*.*
Inoltre dalle ipotesi si vede subito che

$$\begin{cases} \sum_{i \in S} p_i > q \\ \sum_{i \in S} p_i \geq q^* = q + \epsilon \end{cases}, \qquad \forall S \subseteq N \qquad t.c. \qquad v(S) = w(S) = 1 \tag{5}$$

poichè esiste sempre, per definizione di gioco semplice, almeno una coalizione vincente, segue immediatamente che $q + \epsilon \leq q + m$.
Quindi $0 < \epsilon \leq m$.
(⇐.)
Per definizione di minimo, si ha

$$\sum_{i \in S} p_i \geq q + \epsilon, \qquad \epsilon \in (0, m] \qquad \forall S \subseteq N : w(S) = 1 \tag{6}$$

poichè $\epsilon > 0$*, si ha pure che*

$$\sum_{i \in S} p_i \geq q + \epsilon > q \tag{7}$$

e quindi rimane dimostrato che in entrambi i giochi sono vincenti le stesse coalizioni. Con ragionamenti analoghi si dimostra che le coalizioni il cui valore della funzione caratteristica è nullo sono le stesse in entrambi i giochi.
■

Parlando di quote di maggioranza, come già accennato, non possiamo fare a meno di considerare di parlare del "classico" quorum del 50%. Ci servirà, dato un insieme E finito, avere un simbolo per indicare il numero dei suoi elementi: useremo a tale fine il simbolo $|E|$. Quindi $|N|$ indica il numero complessivo dei giocatori.

Esempio 2.2 (Gioco di maggioranza pesata con quorum del 50%)
Si consideri un gioco $G = (N, v)$ *in cui*

$$v(S) = \begin{cases} 0 & |S| \leq \frac{|N|}{2} \\ \\ 1 & |S| > \frac{|N|}{2} \end{cases} \tag{8}$$

Evidentemente, nell'ottica di quanto visto sino ad ora, questo gioco potrebbe rappresentare la situazione in cui, in un gruppo di $|N|$ *giocatori, viene fatta passare la decisione presa a maggioranza semplice, e cioè con almeno la metà dei consensi. Ebbene questo gioco* $G = (N, v)$ *altro non è che un gioco a maggioranza pesata* $[\frac{|N|}{2}; \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{|N| \ volte}]$.

Esercizio 2.2 *Il Regolamento della Camera dei Deputati in vigore dal primo maggio 1971 contiene i seguenti articoli:*
Art. 46

1. *Le deliberazioni dell'Assemblea e delle Commissioni in sede legislativa non sono valide se non è presente la maggioranza dei loro componenti.*
   ...

2. *I deputati che sono impegnati per incarico avuto dalla Camera, fuori della sua sede o, se membri del Governo, per ragioni del loro ufficio, sono computati come presenti per fissare il numero legale.*
   ...

Art. 48

1. *Le deliberazioni dell'Assemblea e delle Commissioni sono adottate a maggioranza dei presenti, salvo i casi per i quali è stabilita una maggioranza speciale.*

2. *Ai fini del comma 1 sono considerati presenti coloro che esprimono voto favorevole o contrario.*
   ...

Come potrebbe essere modellizzato il meccanismo di funzionamento della Camera, limitatamente a quanto descritto in questi stralci di articoli del regolamento, nei termini di un gioco semplice? Descrivere accuratamente le assunzioni e le semplificazioni che si ritengano opportune.

Un altro esempio analogo a quello del Parlamento potrebbe essere quello di un collegio elettorale formato dai rappresentanti di stati o regioni i cui rappresentanti siano eletti direttamente dai cittadini dei rispettivi stati o regioni. In ogni collegio elettorale, quindi, gli aventi diritto al voto partecipano ad un altro gioco a maggioranza pesata, con struttura diversa da quello che verrà poi giocato nel Consiglio ma che, se vogliamo, detterà gli elementi per quest'ultimo gioco.
Ancora una volta la teoria ci fornisce gli strumenti per studiare questa sorta di composizione di giochi di maggioranza pesata in un gioco "complessivo".

Definizione 2.3 Siano $M_1, M_2, \ldots, M_n$, n insiemi disgiunti e non vuoti di giocatori. Siano inoltre $(M_1, w_1), (M_2, w_2), \ldots, (M_n, w_n)$, n giochi semplici. Sia $(N, v), |N| = n$ un gioco su N con v funzione caratteristica non negativa. Allora la *v-composizione* di $(M_1, w_1), (M_2, w_2), \ldots, (M_n, w_n)$ denotata da

$$u = v[w_1, w_2, \ldots, w_n] \tag{9}$$

è il gioco con insieme dei giocatori dato da

$$M^* = \bigcup_{j=1}^{n} M_j \tag{10}$$

e funzione caratteristica

$$u(S) = v(\{j \mid w_j(S \cap M_j) = 1\}) \qquad \forall S \subseteq M^* \tag{11}$$

■

Esempio 2.3 (Il Collegio Elettorale) .
Sia $G = (N, v)$*, con* $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*, il gioco a maggioranza pesata* $[60; 40, 25, 21, 6, 5, 5]$.
I sei giocatori sono le regioni di uno stato che vengono rappresentate nel collegio con un numero di seggi pari a quelli indicati sopra. Il quorum per far approvare una legge è appunto 60.
Per ogni $j \in N$*,* M_j *consiste dei votanti nella* j*-esima regione;* w_j *è la funzione caratteristica del gioco di maggioranza pesata con quorum del 50% con insieme dei giocatori* M_j.
L'idea naturalmente è che $G' = (M^*, u)$ *sia un gioco semplice sull'insieme dei giocatori*

$$M^* = \bigcup_{j=1}^{6} M_j \tag{12}$$

che consiste nell'insieme di tutti i giocatori aventi diritto al voto nello stato costituito dalle sei regioni.
In quest'ultimo gioco una coalizione $S \subseteq M^*$ *è vincente se contiene un sottoinsieme della forma*

$$S' = \bigcup_{j \in T} S_j \tag{13}$$

dove $w_j(S_j) = 1 \forall j \in T$*, e* $v(T) = 1$*. Perciò una coalizione vince se ha almeno metà dei voti popolari* $[w_j(S_j) = 1]$ *in regioni che totalizzano almeno* 60 *voti elettorali* $[v(T) = 1]$ *. In altre parole, tutto questo significa che se per esempio la metà più uno della popolazione della regione* 1 *insieme alla metà più uno della regione* 3 *si mettono d'accordo per far passare una o più leggi, ebbene ci riusciranno eleggendo i propri rappresentanti regionali, i quali avranno poi la maggioranza nel Collegio stesso.*

Esempio 2.4 (Consiglio di Sicurezza delle Nazioni Unite) .
Il Consiglio di Sicurezza delle Nazioni Unite consiste di cinque stati permanenti, il cui insieme indicheremo con M_1*, e dieci altri membri che costituiscono l'insieme* M_2.
Le mozioni devono essere approvate da nove membri, tra i quali devono essere inclusi tutti e cinque i membri permanenti.
È facile vedere che siamo in presenza di un gioco $G = (M^*, u)$*, con* M^* *insieme di tutti gli stati membri e in cui*

$$u = v[w_1, w_2] \tag{14}$$

dove:

1. M_1 *è l'insieme degli stati permanenti del gioco* $G_1 = (M_1, w_1)$ *con*

$$\forall S \subseteq M_1, w_1(S) = \begin{cases} 0 & se\ S \neq M_1, \\ \\ 1 & se\ S = M_1, \end{cases} \tag{15}$$

2. M_2 è l'insieme degli altri membri del gioco $G_2 = (M_2, w_2)$ con

$$\forall S \subseteq M_2, w_2(S) = \begin{cases} 0 & se\ |S| \leq 3, \\ \\ 1 & se\ |S| \geq 4, \end{cases} \tag{16}$$

3. v è data da

$$\begin{aligned} v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0 \\ v(\{1,2\}) = 1. \end{aligned} \tag{17}$$

Si noti che sebbene nel gioco $G_2 = (M_2, w_2)$ due coalizioni disgiunte possono risultare vincenti, nel gioco $G_v = (\{1,2\}, v)$ solo la coalizione $\{1,2\}$ è vincente. Ciò non toglie che in base all'equazione 11, le coalizioni vincenti del gioco $G = (M^*, u)$ sono $M_1 \cup \widetilde{S}$, con $\widetilde{S} \subseteq M_2$ e $|\widetilde{S}| \geq 4$.

Esercizio 2.3 *Si descriva il gioco del Consiglio di Sicurezza ONU nei termini di un gioco di maggioranza pesata.*
Suggerim.
Provare ad impostare le condizioni sui pesi e sulla quota di maggioranza che devono essere soddisfatte contemporaneamente per rispecchiare il processo elettorale impiegato al Consiglio dell'ONU. Per esempio il gioco di maggioranza pesata $< \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}, v >$ con struttura la quota e la struttura di pesi definita come
$[38; 7,7,7,7,7,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]$ *rispecchia tale meccanismo? Se sì, è l'unica che lo rispecchia?* ∎

I giochi di maggioranza pesata sono giochi semplici. D'altra parte non è vero che ogni gioco semplice sia un gioco di maggioranza pesata, come mostra l'esempio seguente:

Esempio 2.5 *Si consideri una ipotetica commissione parlamentare formata da tre senatori $\{x, y, z\}$ e tre deputati $\{a, b, c\}$. Se per l'approvazione di una certa mozione occorre il consenso di almeno due senatori e di almeno due deputati, non c'è modo di trovare una struttura di pesi per ciascun giocatore e una quota in grado di rappresentare il suddetto gioco. Infatti devono essere* *soddisfatte contemporaneamente*

$$\left\{\begin{array}{l} p_x + p_y + p_a + p_b > q \\ p_x + p_z + p_a + p_c > q \\ p_z + p_y + p_c + p_b > q \\ p_x + p_z + p_y + p_a \leq q \\ p_x + p_z + p_y + p_b \leq q \\ p_x + p_z + p_y + p_c \leq q \\ p_a + p_b + p_c + p_x \leq q \\ p_a + p_b + p_c + p_y \leq q \\ p_a + p_b + p_c + p_z \leq q \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2p_x + 2p_y + 2p_z + 2p_a + 2p_b + 2p_c > 3q \\ 4p_x + 4p_y + 4p_z + 4p_a + 4p_b + 4p_c \leq 6q \end{array}\right. \tag{18}$$

che è evidentemente impossibile da soddisfare.

L'esempio sul Consiglio dell'ONU ci permette di introdurre un altro concetto connesso ai giochi semplici, quello di *giocatore di veto*.
Gli stati permanenti del Consiglio di Sicurezza hanno infatti la possibilità di porre il loro veto alle scelte decisionali del Consiglio stesso. Questa proprietà nei termini formali della teoria si traduce nella seguente definizione:

Definizione 2.4 Sia $G = (N, v)$ un gioco semplice. Definiamo $i \in N$ un giocatore di veto nel gioco G se per ogni $S \subseteq N$

$$i \notin S \Rightarrow v(S) = 0 \tag{19}$$

■

Abbiamo sin qui visto alcuni metodi formali di modellizzazione di particolari situazioni decisionali esclusivamente dal punto di vista della formazione delle coalizioni, senza indagare gli ulteriori aspetti esistenti al loro interno.
Non bisogna dimenticare che le coalizioni, anche se vincenti, sono formate da singoli giocatori che, per convenienza, sono liberi di abbandonare la coalizione per entrare a far parte di un'altra.
La convenienza, ovviamente, potrebbe stare nel fatto che entrando in un'altra coalizione essi, come singoli, ci guadagnano di più. *Ma ci guadagnano che cosa?* Per rispondere a questa domanda bisogna fare un passo indietro. Eravamo rimasti agli strumenti che la teoria ci fornisce per descrivere quali coalizioni sono vincenti e quali perdenti. Non è però a mio avviso difficile immaginare situazioni in cui (si vedano per esempio i partiti in parlamento) i giocatori decidano di coalizzarsi in gruppi più o meno vincenti purchè venga loro assegnata una quota di merito, o se si vuole di rilevanza o ancor meglio di potere decisionale all'interno della coalizione che si sta formando, che essi ritengano ripaghi la loro entrata nella coalizione stessa.
Per esempio, l'essere giocatore di veto o, per continuare nei termini dei contesti decisionali portati come esempi, avere la capacità di porre il veto ad

una decisione sostenuta da una certa coalizione, potrebbe far ragionevolmente credere a tale giocatore di avere diritto a più potere decisionale degli altri all'interno della coalizione.
Questo tipo di considerazioni aprono la strada verso quello che può essere considerato il problema fondamentale dell'analisi dei *TU-games*: come "spartire i guadagni" tra i giocatori. Come vedremo, non c'è una indicazione univoca, o una regola "incontestabile". La teoria non dice quale "deve essere" la soluzione, bensì analizza le proprietà delle diverse possibili soluzioni, mettendo in evidenza sia gli aspetti "positivi" che quelli "negativi".
Come di consueto, per esprimere più agevolmente e con maggiore precisione i concetti che ci interessano, avremo bisogno di un linguaggio appropriato. Introduciamo quindi la terminologia essenziale.

Definizione 2.5 Sia $G = (N, v)$ un TU-game. Un elemento $x \in \mathbb{R}^n$ si dice allocazione (per G). Se $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$ l'allocazione x si dice pre-imputazione.
Una pre-imputazione che soddisfa anche la condizione $x_i \geq v(\{i\}) \forall i \in N$ è detta *imputazione*. Chiameremo $I(v)$ l'insieme delle imputazioni per il gioco G.

■

L'interpretazione di una pre-imputazione è ovvia: si tratta di una ripartizione di $v(N)$ tra i giocatori. Ovviamente, il concetto di pre-imputazione è particolarmente interessante per i giochi superadditivi: è per questa classe di giochi che è ragionevole immaginare che si formi la grande coalizione N e che quindi una "soluzione" debba consistere nello scegliere una (o più di una) possibile ripartizione di $v(N)$.
Si noti che la condizione $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$ può essere "letta" come esprimente due condizioni contemporaneamente: $\sum_{i=1}^n x_i \leq v(N)$ (che è riconducibile a una condizione di fattibilità) e $\sum_{i=1}^n x_i \geq v(N)$ (che rappresenta invece una condizione di efficienza). Quest'ultima condizione viene anche indicata come condizione di "razionalità collettiva".
Da questo punto di vista, la condizione $x_i \geq v(\{i\})$ è interpretabile come condizione di "razionalità individuale" per il giocatore i.
L'idea euristica, sempre legata ai nostri esempi, è quella di credere plausibile che ciascun giocatore, anche se non di veto, non sarà mai d'accordo ad entrare a far parte di una coalizione per quanto vincente ($v(S) = 1$) se la quota di potere decisionale assegnatagli all'interno della coalizione è inferiore a quella che egli è in grado di garantirsi da solo (razionalità individuale). D'altro canto sarà almeno altrettanto difficile che nel complesso i giocatori si possano arrogare più diritto decisionale di quanto il gioco stesso ne attribuisca alla coalizione (in questo caso 1 se vincente e 0 se perdente). Ma sono poi veramente ragionevoli queste considerazioni? (si veda la parte seconda sugli indici di potere).

Esercizio 2.4 *Trovare, se esiste, un gioco semplice il cui insieme di imputazioni è vuoto.*

Esempio 2.6 *Si consideri una Società con quattro azionisti,* $N = \{1, 2, 3, 4\}$, *che si dividono l'intero stock azionario nelle percentuali del* $10, 20, 30$ *e* 40 *per cento rispettivamente.*
Si assuma che ogni decisione possa essere approvata dal consiglio degli azionisti solo se in possesso della maggioranza semplice (quorum del 50%*) delle quote azionarie.*
Questo gioco può essere trattato come un gioco semplice a quattro giocatori nel quale le coalizioni vincenti sono:
$\{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$ *e* $\{1, 2, 3, 4\}$.
Una delle imputazioni di questo gioco potrebbe essere quella che assegna a ciascun giocatore la rispettiva componente del "vettore dei voti", cioè quel vettore che assegna a ciascun giocatore la frazione di voti che egli è in grado di pronunciare normalizzata a 1, ovvero $(\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5})$.
Si noti tuttavia che la maggior quota attribuita al giocatore 3 rispetto a quella attribuita al giocatore 2 in conformità al maggior numero di azioni in possesso dell'uno rispetto all'altro, non ha poi così tanta ragione di essere: i due giocatori hanno in realtà lo stesso numero di opportunità di formare una coalizione vincente (cinque a cinque). Quindi il giocatore 2 avrebbe elementi sufficienti per sostenere che l'imputazione precedente lo penalizzi oltremodo.

L'esempio precedente mostra come l'idea di razionalità collettiva e di razionalità individuale legata al concetto di imputazione, per quanto ragionevole, non sia ancora abbastanza per garantire una certa "stabilità" delle allocazioni.
Non occorre molta fantasia per pensare anche a condizioni di razionalità "intermedia", che sono date evidentemente da condizioni del tipo: $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$, dove S è una generica "coalizione". Questa idea elementare ci porta immediatamente ad uno dei concetti chiave di "soluzione" per un generico gioco TU, e quindi anche per un gioco semplice: è l'idea di nucleo.

Definizione 2.6 Sia (N, v) un gioco TU. Indichiamo con $C(v)$ il nucleo del gioco, dove: $C(v) = \{x \in I(v) : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \forall S \subseteq N\}$

■

Come è evidente dalla definizione e dalla discussione precedente, si ha: $C(v) \subseteq I(v)$.
Talvolta, pur essendo $I(v) \neq \emptyset$, si può avere che $C(v) = \emptyset$.

Esempio 2.7 Sia $N = \{1, 2, 3\}$ e $v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$, mentre $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 1$ (si noti che questo gioco è il "gioco dei pirati" delle esempio 1.1 per $t = 1$).

Evidentemente questo gioco ha $I(v) \neq \emptyset$.
Se vogliamo che $x \in \mathbb{R}^3$ stia anche in $C(v)$ deve essere:
$x_1 + x_2 \geq v(\{1,2\}) = 1$
$x_1 + x_3 \geq v(\{1,3\}) = 1$
$x_2 + x_3 \geq v(\{2,3\}) = 1$
Sommando membro a membro si ottiene: $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 3$, cioè $x_1 + x_2 + x_3 \geq 3/2$. Ma questo è evidentemente incompatibile con la condizione $x_1+x_2+x_3 = v(N) = 1$. In termini intuitivi, ciò che accade è che le coalizioni "intermedie" sono troppo forti relativamente alla grande coalizione.

Può quindi essere interessante andare a cercare le condizioni per le quali, dato un gioco semplice, il suo nucleo è non vuoto. A questo proposito può essere utile il seguente teorema:

Teorema 2.1 *Dato un gioco semplice $G = (N, v)$, il suo nucleo $C(v)$ è non vuoto se e solo se c'è almeno un giocatore di veto.*
Dim.
($\Rightarrow$.)
Si supponga che v non abbia giocatori di veto. Allora, per ogni $i \in N$, esiste una coalizione $S \subset N$ tale che $i \notin S$ e $v(S) = 1$. Per un'imputazione x che sta nel nucleo, abbiamo che:

$$\sum_{j \in N} x_j = v(N) = 1, \tag{20}$$

$$\sum_{j \neq i} x_j \geq \sum_{j \in S} x_j \geq v(S) = 1, \tag{21}$$

Quindi $x_i = 0$ per ogni i che appartiene a N, e perciò x non può essere un'imputazione. Questa contraddizione prova che $C(v) = \emptyset$.
($\Leftarrow$.)
Si supponga ora che v abbia almeno un giocatore di veto. Sia S l'insieme di tali giocatori di veto ($|S| \geq 1$). Sia x un'allocazione tale che

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{i \in S} x_i = 1, \\ &x_i \geq 0 \qquad \textit{per ogni } i \in S\ , \\ &x_i = 0 \qquad \textit{per } i \notin S \end{aligned} \tag{22}$$

Ora, se T è una coalizione vincente, dobbiamo avere $S \subseteq T$ e poichè la somma delle componenti dell'allocazione in S deve essere pari ad 1 si ottiene

$$\sum_{i \in T} x_i \geq \sum_{i \in S} x_i = 1 = v(T), \tag{23}$$

il che significa che x rispetta la razionalità intermedia per ogni $T \subset N$ oltre che quella individuale e collettiva. Quindi $x \in C(v)$. ■

Esercizio 2.5 *Perchè* $\sum_{j \neq i} x_j \geq \sum_{j \in S} x_j$ *nella 21?*

3 Appendice ai giochi semplici

Nel paragrafo precedente abbiamo definito la classe dei giochi semplici come quella classe di giochi cooperativi a utilità trasferibile la cui funzione caratteristica può assumere valori esclusivamente in $\{0,1\}$, con l'ulteriore particolarità che $v(N) = 1$. Nulla di più è stato richiesto nella definizione di gioco semplice. Non si poteva quindi escludere la possibilità di avere giochi semplici in cui ci fossero più coalizioni disgiunte vincenti (e quindi anche che se una coalizione S fosse vincente, la sua complementare in N, cioè $N \setminus S$ fosse pure vincente), o che una coalizione T fosse perdente sebbene contenesse al suo interno una coalizione vincente, o ancora che l'unione di due coalizioni vincenti disgiunte desse origine a una coalizione perdente.
È evidente come queste particolari situazioni possano essere quantomeno difficili da giustificare nell'interpretazione dei giochi semplici come regole per prendere decisioni in contesti di scelta collettiva, come quelli presi ad esempio nel paragrafo precedente (Parlamento, consigli di amministrazioni ecc.).
Può quindi essere utile andare a presentare alcune proprietà che possono essere richieste in aggiunta al gioco semplice allo scopo di catturare meccanismi particolari come quelli a cui si è appena accennato. Per ogni coppia di numeri reali a e b denotiamo $a \wedge b = min\{a,b\}$ e $a \vee b = max\{a,b\}$.

Definizione 3.1 Un gioco semplice $< N, v > \in \mathcal{SG}^N$:

1. è *monotono* se $S \subseteq T \Rightarrow v(S) \leq v(T)$, con $S, T \subseteq N$;
2. è *N-proprio* se $v(S) \wedge v(N \setminus S) = 0$ per tutte le coalizioni $S \subseteq N$;
3. è *proprio* se $v(S) \wedge v(T) = 0$ per tutte le coalizioni disgiunte $S, T \subseteq N$;
4. è *fortemente proprio* se $v(S) \wedge v(T) \leq v(S \cap T)$ per tutte le coalizioni disgiunte $S, T \subseteq N$;
5. è *decisivo* se $v(S) \vee v(N \setminus S) = 1$ per tutte le coalizioni $S \subseteq N$.

■

L'interpretazione è la seguente: la monotonia significa che il gioco semplice è tale per cui una coalizione che contiene al suo interno una coalizione vincente sia anch'essa vincente. Un gioco semplice *N-proprio*, invece è tale per cui, data una coalizione S vincente, la sua complementare $N \setminus S$ è sempre

perdente. Questa proprietà non impedisce invece che esista una partizione di N su due coalizioni entrambe perdenti. Nemmeno per un gioco *proprio* si può escludere che due coalizioni complementari siano entrambe perdenti. Per tale gioco però non esistono più coalizioni disgiunte entrambe vincenti, anche se la loro unione non è N. Quindi, dal momento che S e $N \setminus S$ sono sempre coalizioni disgiunte, un gioco *proprio* è anche *N-proprio*.
Non è valido invece il contrario: affinchè un gioco semplice *N-proprio* sia anche *proprio*, il gioco deve essere anche monotono. Infatti se un gioco semplice è *N-proprio*, allora per ogni coalizione vincente $S \subset N$, $S \setminus N$ è perdente. Se il gioco è monotono, ogni coalizione contenuta in $N \setminus S$ è perdente. Poichè tali coalizioni sono ancora disgiunte da S (tranne che per l'insieme vuoto, ma non è questo il caso che ci interessa), questo significa che la condizione di gioco semplice *proprio* è verificata per ogni coppia di coalizioni disgiunte.
Un gioco semplice *fortemente proprio* è invece tale per cui se due coalizioni sono entrambe vincenti allora la loro intersezione deve essere vincente. Se invece due coalizioni sono disgiunte tra loro, e quindi la loro intersezione è vuota, allora almeno una delle due coalizioni deve essere perdente. Se ne deduce che un gioco *fortemente proprio* è anche *proprio*.
Un'altra proprietà che può essere richiesta a un gioco semplice è che sia anche *decisivo*. Tale proprietà sta a significare che date due coalizioni complementari S e $N \setminus S$, almeno una delle due è vincente. In altri termini, se S è perdente, $N \setminus S$ è vincente.

Esercizio 3.1 *Un gioco di maggioranza pesata è* monotono*,* N-proprio*,* proprio*,* fortemente proprio*,* decisivo*? Se non gode di una o più tra queste proprietà, si provi ad indicare condizioni aggiuntive che le garantiscano. Se possibile, trovare condizioni necessarie e sufficienti.*

Abbiamo mostrato alcune delle relazioni più semplici che legano le proprietà definite in 3.1. Ci sono altri legami tra le proprietà in essa elencate. Ricordiamo che un gioco $< N, v > \in \mathcal{G}^N$ è superadditivo se $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ per tutti gli insiemi disgiunti $S, T \subseteq N$.

Proposizione 3.1 *Sia* $< N, v > \in \mathcal{SG}^N$ *un gioco semplice. Allora* $< N, v >$ *è superadditivo* $\Leftrightarrow < N, v >$ *è* N-proprio *e* monotono

Dim.
$(\Rightarrow .)$
Sia $< N, v >$ un gioco semplice superadditivo. Dal momento che v è non negativo (cioè $v(S) \geq 0$ per tutti gli $S \subseteq N$), abbiamo $v(S) \geq v(T) + v(T \setminus S) \geq v(T)$ per ogni $T \subseteq S \subseteq N$. Quindi $< N, v >$ è monotono.
Inoltre $1 \geq v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ per ogni S e $T \subseteq N$, così che al più uno tra $v(S)$ e $v(T)$ può essere uguale ad 1. Questo significa che $v(S) \wedge v(T) = 0$. Quindi $< N, v >$ è *proprio* e di conseguenza anche *N-proprio*.

($\Leftarrow$.)
Si supponga $< N, v >$ monotono ed *N-proprio*. Allora tale gioco è pure *proprio*, e quindi, per ogni coppia di coalizioni disgiunte $S, T \subseteq N$, abbiamo $0 = v(S) \wedge v(T)$. Quindi almeno uno tra $v(S)$ e $v(T)$ è uguale a zero, per cui, $v(S \cup T) \geq v(S) \vee v(T)$; ma d'altra parte risulta anche $v(S) \vee v(T) = v(S) + v(T)$ e quindi $< N, v >$ è superadditivo. ■

Di seguito forniamo un altro risultato analogo al precedente. Ma prima definiamo una classe particolare di giochi semplici, detti *giochi di unanimità* (si osservi che la seguente definizione risolve l'esercizio 2.1):

Definizione 3.2 Un gioco semplice $< N, v_U >$ è detto di *unanimità* se esiste $U \subseteq N$ tale che per ogni $S \subseteq N$

$$v_U(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } U \subseteq S, \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{24}$$

■

Inoltre definiamo un gioco convesso come segue:

Definizione 3.3 Un gioco $< N, v >\in \mathcal{G}^N$ è *convesso* se $v(S \cap T) + v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ per tutte le coalizioni $S, T \subset N$.

■

La condizione di convessità si può esprimere in maniera equivalente nella forma:

$$v(S \cup T) - v(S) \geq v(T) - v(S \cap T) \qquad \forall S, T \subset N. \tag{25}$$

Posto $C = (S \cup T) \setminus S$, il primo membro della disuguaglianza rappresenta il "contributo marginale" di C ad S, cioè $v(S \cup C) - v(S)$ (si vedano le dispense sugli indici di potere per un maggior approfondimento sul significato di contributo marginale), e il secondo membro rappresenta il contributo marginale di C a $S \cap T$. Quindi la convessità del gioco si può anche enunciare come segue: il contributo marginale di una coalizione C ad un'altra coalizione S disgiunta da C non diminuisce ingrandendo S.
Si noti che un gioco convesso è anche superadditivo. Esempi di giochi convessi sono i giochi di unanimità (si provi per esercizio). In effetti i giochi di unanimià sono gli unici giochi semplici convessi, come mostra il seguente teorema, il quale mostra alcuni ulteriori legami tra le proprietà viste sin qui.

Proposizione 3.2 *Le seguenti tre asserzioni sono equivalenti per un gioco semplice* $< N, v >\in \mathcal{SG}^N$*:*

1. *$< N, v >$ è convesso.*
2. *$< N, v >$ è monotono e fortemente proprio.*
3. *$< N, v >$ è un gioco di unanimità.*

Dim.
$(1 \Rightarrow 2)$
Un gioco convesso è anche superadditivo, e un gioco semplice superadditivo non negativo è monotono, come dimostrato nella proposizione 3.1.
Per mostrare che $< N, v >$ è *fortemente proprio*, si consideri $S, T \subseteq N$: la disuguaglianza $v(S) \wedge v(T) \leq v(S \cap T)$ può non essere soddisfatta soltanto se $v(S) = v(T) = 1$. Ma allora, dalla convessità, si otterrebbe, $v(S \cap T) + v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) = 2$ e, dal momento che tutti i termini possono essere soltanto uguali a 0 o 1, entrambi i termini sulla sinistra devono essere uguali ad 1, in particolare $v(S \cap T) = 1 \geq v(S) \wedge v(T)$, e quindi $< N, v >$ è *fortemente proprio.*
$(2 \Rightarrow 3)$
Sia$< N, v >$ un gioco semplice *fortemente proprio.*Denotiamo l'insieme $W(v) = \{S \subseteq N : v(S) = 1\}$ e l'insieme $veto(v) = \bigcap_{S \in W(v)}$. Siano $S, T \in W(v)$. Allora $v(S \cap T) \geq v(S) \wedge v(T) = 1$, quindi $S \cap T \in W(v)$. Poichè questa proprietà è valida per qualsiasi coppia di coalizioni vincenti, se l'intersezione di un numero p di insiemi in $W(v)$ è vincente, l'intersezione di questa con una coalizione F appartenente a $W(v)$ tra quelle non già nelle precedenti p coalizioni sarà ancora vincente e, per la proprietà associativa dell'intersezione, sarà uguale all'intersezione dei p insiemi precedenti con la coalizione F. Poichè $W(v)$ è un insieme finito, la coalizioni $veto(v)$ sarà una coalizione vincente e poichè la coalizione vuota è perdente, $veto(v) \neq \emptyset$.
Dalla monotonicità si deduce che ogni coalizione S contenente $veto(v)$ è vincente. Per definizione, ogni coalizione vincente contiene $veto(v)$ e quindi $< N, v >$ è un gioco di unanimità tale per cui $v = u_{veto(v)}$.
$(3 \Rightarrow 1)$
Ogni gioco di unanimità è convesso (si provi come esercizio). ■

Bibliografia essenziale:

- Feltkamp V. (1995) *Cooperation in Controlled Network* - KUB Tilburg University. - PhD Thesis.
- Ferrari G., Margiocco M. (1997) *Dispense sui Giochi Cooperativi* - Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova - Dispense Ciclo di Seminari di Teoria dei Giochi 1997/98.
- Owen G. (1995) *Game Theory* - Academic Press - Third edition, book: **pp.447**.

- Patrone F. (1998) *Dispense sui Giochi Cooperativi* - Dispense lezioni Master in Teoria delle Decisioni.

- Pederzoli G. (1994) *Giochi Cooperativi: teoria, metodi, applicazioni* - Istituto di Statistica e Ricerca Operativa dell'Università di Trento. - Dispense.