Giochi semplici, indici di potere e scelte sociali.

Parte 2: indici di potere

S. Moretti[1]
Istituto per la Matematica Applicata, Consiglio Nazionale delle Ricerche
Via De Marini 6 (Torre di Francia), 16149 Genova

F. Patrone[2]
DIMA, Università di Genova
Via Dodecaneso 35, 16146 Genova

Testo per conferenza IRRSAE del 29 Novembre 2000.
versione del 2 settembre 2006

Indice

Altro materiale e informazioni sulla Teoria dei Giochi sono disponibili in rete alla pagina:
Decisori (razionali) interagenti

[1]ora: Dipartimento di Epidemiologia e Biostatistica, Istituto Nazionale per la Ricerca sul Cancro, Genova.
[2]ora: DIPTEM, Facoltà di Ingegneria, Università di Genova.

Come osservato nel capitolo relativo ai giochi semplici, un punto fondamentale dell'analisi condotta con gli strumenti della teoria dei giochi cooperativi è quello di indicare dei criteri su come spartire il potere all'interno delle coalizioni vincenti. Avevamo sottolineato come il nucleo indicasse delle allocazioni di "potere" che rispettassero ragionevoli principi di efficienza (individuale, intermedia e collettiva).
Vogliamo andare avanti in questa direzione e cercare allocazioni che rispettino altri e/o ulteriori principi. Tali principi saranno formulati sottoforma di assiomi e di volta in volta andremo a cercare quelle spartizioni che li rispettino.
Ma prima di illustrare alcuni esempi di questo genere, rendiamoci consapevoli di quello che stiamo facendo.
Sin dalle discussioni sul nucleo abbiamo cercato di far passare l'idea di quote di potere decisionale assegnate agli individui delle coalizioni proporzionalmente al ruolo sostenuto dagli stessi individui nel raggiungimento del risultato ottenuto dalla coalizione.
Ed è proprio a questo che servono *gli indici di potere*: un indice di potere è una funzione Ψ che associa ad ogni gioco semplice $< N, v >$ un vettore $\Psi(v) = (\Psi_1(v), \ldots, \Psi_n(v))$ la cui i -esima componente è interpretata come una misura della influenza che il giocatore i può esercitare sull'esito.
Il significato degli indici di potere, quindi, non è l'indicazione di una spartizione del guadagno ottenuto dalla coalizione, ma una misura del potere dei singoli giocatori.
Questa differenza è sostanziale e determina tutta una serie di considerazioni sugli assiomi che caratterizzano di volta in volta i diversi indici di potere. Tali considerazioni sono utili, a nostro avviso, ad evidenziare quali siano i ragionamenti che stanno alla base della scelta degli assiomi.
Per esempio, parlando di imputazioni, si era introdotta la condizione

$$\sum_{i=1}^{n} \Psi_i(v) = v(N) \tag{1}$$

come espressione di efficienza collettiva e fattibilità al tempo stesso (per brevità chiameremo d'ora in poi la condizione (1) di *efficienza*). Ebbene, questa stessa condizione la ritroveremo anche tra gli assiomi che caratterizzeranno alcuni degli indici di potere che analizzeremo.
La proprietà di efficienza può essere sensata in relazione a indici di potere di giochi in cui è verosimile che si formi la grande coalizione. Sarebbe infatti difficile sostenere una misura di potere dei giocatori vincolata al valore ottenuto dalla grande coalizione qualora ci si sapetti che, data la struttura del gioco, questa non si formerà. Abbiamo osservato nel capitolo sui giochi semplici come per i giochi superadditivi sia plausibile che tutti i giocatori si coalizzino insieme. Potrebbe quindi sembrare ragionevole restringere il campo di analisi a quei giochi che sono superadditivi, almeno quando si

richieda che sia soddisfatta la condizione di efficienza. Tuttavia, come vedremo nel seguito, l'efficienza non è una proprietà di cui non si possa fare a meno. Inoltre, in alcuni casi, anche in giochi non superadditivi potrebbe essere ragionevole ritenere che i giocatori formino la grande coalizione (si provi ad immaginarne alcuni). Date queste premesse, in aggiunta alla generalità dei risultati che mostreremo e per coerenza con quanto scritto nel capitolo sui giochi semplici in cui non facevamo alcuna ipotesi a priori di superadditività, lasciamo al lettore la considerazione di ritenere ragionevole o meno che in un gioco la grande coalizione si formi oppure no.
Richiederemo cioè che, per ogni gioco cooperativo ad utilità trasferibile, sia verificata la condizione (1). Se $v(n)$ può essere interpretata come una torta da distribuire tra i giocatori, questa condizione è davvero naturale (si vedano le considerazioni sulla fattibilità e sull'efficienza).
Ma se il contesto in cui ci si muove è quello dei giochi semplici interpretati come processi di scelta decisionale (come quelli considerati nel capitolo sui giochi semplici) non c'è nessuna torta di taglia pari a 1 da dividere. Il fatto che $v(N) = 1$ significa soltanto che N, la coalizione formata da tutti i giocatori, può far sì che passi una certa decisione, come qualsiasi altra coalizione vincente può fare.
Quindi una giustificazione della efficienza sulla base dei criteri illustrati a proposito del nucleo, in questo contesto non ha senso: il punto è misurare il potere, non distribuirlo.
Richiedere che la somma delle componenti di un indice di potere sia uguale a 1 non può nemmeno essere considerato come una semplice normalizzazione. Naturalmente è una normalizzazione per un dato gioco. In questo caso richiedere che questa somma sia uguale ad uno (o a cento se uno preferisce parlare in termini di percentuale) è innocuo nei limiti di comparazioni coinvolgenti giocatori all'interno del dato gioco.
Solitamente, però, gli indici di potere sono utilizzati per comparare giochi differenti e sono assiomaticamente fondati su assunzioni che coinvolgono il potere in giochi differenti. Da questo discende immediatamente la necessità che la somma delle componenti dell'indice di potere sia identico in tutti i giochi appartenenti a classi di giochi su differenti insiemi di giocatori $\mathcal{C}^N \subseteq \mathcal{G}^N$ e $\mathcal{C}^M \subseteq \mathcal{G}^M$, dove $\mathcal{G}^N$ e $\mathcal{G}^M$ sono gli insiemi dei giochi cooperativi ad utilità trasferibile aventi rispettivamente come insieme dei giocatori N ed M. In formula (posto $n = |N|$ e $m = |M|$)

$$\sum_{i=1}^{n} \Psi_i(v) = \sum_{i=1}^{m} \Psi_i(w) \quad \forall < N, v > \in \mathcal{C}^N, \forall < M, w > \in \mathcal{C}^M. \tag{2}$$

Ed è proprio questo ciò che la condizione di efficienza fa. Si noti che la condizione di efficienza soddisfa l'uguaglianza nella (2) per tutti i giochi $< N, v >, < M, w >$ qualunque sia il numero dei giocatori in N e in M. Quindi indicare la condizione di efficienza come "normalizzazione" non sa-

rebbe corretto: l'idea di normalizzazione non si adatta alla interpretazione che è stata fatta, e ancora di meno alla sua giustificazione.
Questa non è l'unica giustificazione della condizione di efficienza. Ne esiste almeno un'altra che è legata ad una differente interpretazione degli indici di potere.
Gli indici di potere possono essere interpretati come misure o valutazioni a priori della probabilità di giocare un "ruolo rilevante" in un processo collettivo di scelta decisionale che segue un dato insieme di regole.
In questo contesto, si consideri una data coalizione S vincente in un gioco semplice $< N, v >$: il giocatore i in S è considerato giocare un ruolo rilevante se il suo voto è necessario per far passare il suo esito preferito il che significa che i è in grado con il proprio ritiro da S, di far diventare perdente la coalizione $S \setminus \{i\}$.
Data quindi una distribuzione di probabilità $p_i(S)$ che denota la probabilità della coalizione $S \subseteq N$ di formarsi riconoscendo al giocatore i il ruolo rilevante, un indice di potere potrebbe essere dato così :

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} p_i(S)(v(S) - v(S \setminus \{i\})) \tag{3}$$

Da questa base comune, lo vedremo dopo, differenti indici di potere emergono da differenti modelli probabilistici sulla formazione delle coalizioni.
È quindi ovvia la risposta al quesito su quale sia il significato della condizione di efficienza quando gli indici di potere sono interpretati come probabilità di giocare un ruolo rilevante: il fatto stesso di essere una distribuzione di probabilità e, pertanto, di rispettare la condizione che la somma delle probabilità deve dare 1.

Tutte queste osservazioni erano volte ad evidenziare che tipo di considerazioni vengono fatte per giustificare la ragionevolezza degli assiomi che caratterizzano gli indici di potere.Vediamo ora qualcuno di questi indici con la relativa caratterizzazione assiomatica.

1 L'indice di Shapley

Il nucleo di un gioco dà conto della forza dei vari giocatori (espressa attraverso $v(S)$). Tuttavia il nucleo può avere alcuni problemi. Per esempio, lo abbiamo visto nel capitolo sui giochi semplici, il nucleo può essere vuoto. A questi problema se ne può aggiunge almeno un altro: il nucleo di un gioco (se non vuoto) contiene in genere più di una allocazione. Quindi, il nucleo non ci offre "la" soluzione, bensì solo un modo per scartare, per così dire, allocazioni che sarebbero instabili (se $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$, la coalizione S ha interesse a "defezionare" dalla grande coalizione N, se si insiste sulla ripartizione $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$).

Vi è un altro concetto di soluzione che viene incontro a questo tipo di obiezioni (ma "ovviamente" gliene potremo fare altre, di altro genere...): si tratta del cosiddetto "valore Shapley" o, indifferentemente, "indice di Shapley". Come già anticipato, procederemo in questo paragrafo ad illustrare gli assiomi che questo indice soddisfa e ne indicheremo un metodo per calcolarlo. Data una classe di giochi $\mathcal{C}^N \subseteq \mathcal{G}^N$, dove $\mathcal{G}^N$ è l'insieme di tutti i giochi cooperativi ad utilità trasferibile aventi come insieme dei giocatori N, si definiscono i seguenti

Assioma 1.1 (efficienza) .
Un indice di potere $\psi(v)$ è efficiente *se $\sum_{i \in N} \psi_i(v) = v(N)$ per ogni gioco $< N, v > \in \mathcal{C}^N$.*

La discussione di questo assioma è rimandata alla parte introduttiva di questo capitolo.

Assioma 1.2 (anonimità) .
Un indice di potere $\psi(v)$ è anonimo *se per ogni gioco $< N, v > \in \mathcal{C}^N$ e per ogni permutazione σ di N tale che $< N, \sigma v > \in \mathcal{C}^N$,*

$$\psi_{\sigma(i)}(v) = \psi_i(\sigma v) \qquad \forall i \in N, \tag{4}$$

dove il gioco $< N, \sigma v >$ è definito da

$$\sigma v(S) = v(\sigma(S)) \qquad \forall S \subseteq N. \tag{5}$$

Il significato dell'assioma di anonimità è il seguente: quanto viene dato ad un giocatore non deve dipendere da "chi è" questo giocatore (cioè, se si tratta di Marco o Enrico), ma solo da quanto il giocatore è in grado di ottenere da solo o con altri.
Vediamo un esempio.

Esempio 1.1 Abbiamo tre giocatori che per semplicità chiameremo 1, 2, 3. Si ha [3]: $v(1) = v(2) = v(3) = v(1,2) = v(1,3) = 0$; $v(2,3) = v(1,2,3) = 1$
Consideriamo ora un altro gioco, w, che assegna agli stessi giocatori (e alle loro coalizioni) i seguenti valori: $w(1) = w(2) = w(3) = w(2,3) = w(1,3) = 0$; $w(1,2) = w(1,2,3) = 1$. Che differenza c'è tra il gioco $< N, v >$ e quello $< N, w >$? Che in $< N, w >$ il giocatore 3 si trova nella identica situazione in cui il giocatore 1 si trovava nel gioco $< N, v >$. L'idea di anonimità richiede che noi diamo al giocatore 3, nel gioco $< N, w >$, esattamente quello che diamo al giocatore 1 nel gioco $< N, v >$.

[3]Si noti che in questo esempio abbiamo usato notazioni SCORRETTE. Dovremmo scrivere $v(\{1\})$ invece di $v(1)$, $v(\{1,2\})$ invece di $v(1,2)$, ecc. Ma tutti fanno così , perchè è così noioso scrivere tutte quelle parentesi graffe...

Esempio 1.2 Sia $N = \{1, 2, 3\}$. Prendiamo $\sigma : N \to N$ così definita: $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 1$. Se $S = \{1, 2\}$, abbiamo che $\sigma(S) = \{\sigma(1), \sigma(2)\} = \{3, 2\} = \{2, 3\}$. Quindi, $\sigma v(1, 2) = v(2, 3)$. Se prendiamo $T = \{2, 3\}$, abbiamo che $\sigma(T) = \{\sigma(2), \sigma(3)\} = \{2, 1\} = \{1, 2\}$. Quindi, $\sigma v(2, 3) = v(1, 2)$. Dovrebbe essere evidente che il gioco $< N, w >$ nell'esempio precedente non è altro che il gioco $< N, \sigma v >$, essendo σ la permutazione che stiamo considerando (quella che scambia 1 con 3).

Segue dall'esempio: sia $i = 1$. Allora $\sigma(i) = \sigma(1) = 3$. Con la definizione 1.2, vogliamo quindi che $\Psi_3(\sigma v) = \Psi_3(w) = \Psi_1(v)$. Cioè quel che viene assegnato al giocatore 1 nel gioco $< N, v >$, deve essere assegnato al giocatore 3 nel gioco $< N, w >$.

Per introdurre l'assioma successivo abbiamo bisogno di dire cos'è il contributo marginale di un giocatore. Lo avevamo già introdotto nella discussione iniziale sull'efficienza. Se S è una coalizione, ed $i \in S$, il numero reale $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ viene detto contributo marginale di i alla coalizione S. Se si ha che $v(S) - v(S \setminus \{i\}) = 0$ per ogni coalizione S che non contiene i, il giocatore i viene detto *"dummy player"*. In altri termini, se ad una coalizione S si aggiunge il giocatore i, ciò non contribuisce a migliorare o a peggiorare la situazione della coalizione S.

Assioma 1.3 ("Dummy player") *Se in un gioco $< N, v > \in \mathcal{C}^N$ il giocatore i è un "dummy player", allora $\Psi_i(v) = 0$.*

L'ultima condizione è molto facile da enunciare:

Assioma 1.4 (Additività) *Per tutti i giochi $< N, v >, < N, w > \in \mathcal{C}^N$ tali che $< N, v + w > \in \mathcal{C}^N$, deve essere*
$\Psi_i(v + w) = \Psi_i(v) + \Psi_i(w)$, per ogni $i \in N$.

Dei quattro assiomi quest'ultimo è il più discutibile, in quanto sommare due giochi può produrre un terzo gioco in cui la posizione "strategica" del giocatore i potrebbe essere difficilmente correlata a quella che lui ha nei due giochi "addendi".

Teorema 1.1 (Shapley, 1953) *Dato N esiste ed è unica $\Phi : \mathcal{G}^N \to \mathbb{R}^n$ che soddisfa gli assiomi 1.1, 1.2, 1.3, 1.4. Inoltre, si ha:*

$$\Phi_i(v) = (\frac{1}{n!}) \sum_\sigma m_i^\sigma(v) \text{ per ogni } i \in N \tag{6}$$

Per capire la formula, dobbiamo sapere cosa vuol dire $m_i^\sigma(v)$. L'idea è semplice $\sigma : N \to N$ è una permutazione. Consideriamo $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$. Essendo $i \in N$, ci sarà un certo indice $j \in N$ t.c. $i = \sigma(j)$. Consideriamo allora la coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\}$. E la coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j)\}$. Essendo $i = \sigma(j)$, abbiamo che i non appartiene alla coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\}$, mentre $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j)\}$ è ottenuta aggiungendo i. Allora $v(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j)\}) - v(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\})$ è il contributo marginale di i alla coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\}$. E $m_i^\sigma(v)$ indica esattamente ciò: $m_i^\sigma(v) = v(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j)\}) - v(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\})$ dove $i = \sigma(j)$.

La formula ha una interpretazione probabilistica. Supponiamo che i giocatori entrino uno dopo l'altro in una stanza, seguendo l'ordine dato dalla permutazione σ. Ad ogni giocatore, entrando nella stanza, viene dato il suo contributo marginale alla coalizione che già si trovava nella stanza. Non c'è ragione di privilegiare una permutazione rispetto ad un'altra. E quindi calcoliamo il valor medio di questi contributi marginali. Da qui la formula (ricordo che $n!$ è il numero di permutazioni su un insieme di n elementi).

La formula data può naturalmente essere usata per calcolare il valore Shapley, però ha il difetto di richiedere una quantità di calcoli enorme, se il numero totale dei giocatori è grande. Si noti che ad esempio è $10! = 3.628.800$ e quindi se abbiamo un gioco con 10 giocatori questo e' il numero di addendi della somma che dobbiamo calcolare applicando la formula.

In realtà, quando entra nella stanza, al giocatore i non interessa sapere in che ordine sono entrati gli $s-1$ giocatori già presenti ($s = |S|$) nè in che ordine entreranno gli $n-s$ giocatori assenti. Quindi il valore $(v(S) - v(S \setminus \{i\})$ si presenta nella sommatoria $(s-1)!(n-s)!$ volte

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} (v(S) - v(S \setminus \{i\})) \tag{7}$$

Poichè le coalizioni che non contengono i sono 2^{n-1}, questa sommatoria contiene soltanto 2^{n-1} (512 se $n = 10$), il che semplifica notevolmente il calcolo.
Questo significa anche porre nella (3) $p_i(S) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$.

La relazione esistente tra l'indice di Shapley e gli assiomi mostrati, come detto nell'enunciato del teorema, è un risultato che vale per qualsiasi gioco $< N, v >$ appartenente alla classe dei giochi cooperativi $\mathcal{G}^N$. Questo significa che gli assiomi 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 sono soddisfatti contemporaneamente unicamente dal valore Shapley in $\mathcal{C}^N \equiv \mathcal{G}^N$ (si veda la definizione degli assiomi 1.1, 1.2, 1.3, 1.4). Ma il risultato si limita a questo: tutt'altra cosa sarebbe riproporre lo stesso identico enunciato del teorema di Shapley sulla classe dei giochi semplici $\mathcal{SG}^N \subset \mathcal{G}^N$. A questo proposito si pensi all'assioma di additività che risulta: totalmente inutile se definito sulla classe dei giochi semplici: tutti i giochi semplici, così come li abbiamo definiti, hanno la grande coalizione vincente, quindi la somma di due giochi semplici non è un gioco semplice.

Esercizio 1.1 *Si provi a definire un indice di potere diverso dall'indice di Shapley in grado di soddisfare gli assiomi 1.1, 1.2, 1.3 sulla classe dei giochi semplici.*

Per trovare una caratterizzazione assiomatica dell'indice di Shapley sui giochi semplici non bastano gli assiomi 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 (o meglio gli assiomi 1.1, 1.2, 1.3, visto che 1.4 è inutile). Bisogna aggiungere qualcosa che l'assioma di additività, in questo caso, non riesce a catturare. Introduciamo quindi l'assioma seguente, detto del *trasferimento*:

Assioma 1.5 (Trasferimento) *Per tutti i giochi* $< N, v >, < N, w > \in \mathcal{C}^N$,

$$\Psi_i(v \vee w) + \Psi_i(v \wedge w) = \Psi_i(v) + \Psi_i(w), \forall i \in N. \tag{8}$$

dove
$(v \vee w)(S) = v(S) \vee w(S) \forall S \subseteq N,$ *in cui* $a \vee b = \max\{a, b\} \forall a, b \in \mathbb{R}$
$(v \wedge w)(S) = v(S) \wedge w(S) \forall S \subseteq N,$ *in cui* $a \wedge b = \min\{a, b\} \forall a, b \in \mathbb{R}$

Lo abbiamo ovviamente definito su qualsiasi classe $\mathcal{C}^N \subseteq \mathcal{G}^N$. Infatti questo assioma non è affatto slegato da quello di additività, anzi quello di additività, sulla classe di tutti i giochi cooperativi $\mathcal{G}^N$, implica quello di trasferimento sulla stessa classe, come si vede facilmente dai seguenti passaggi:

$$\Psi(v \vee w) + \Psi(v \wedge w) = \Psi(v \vee w + v \wedge w) = \Psi(v + w) = \Psi(v) + \Psi(w) \tag{9}$$

L'assioma di trasferimento, però, definito sulla classe dei giochi semplici $\mathcal{SG}^N$, non è inutile come risultava essere quello di additività sulla stessa classe $\mathcal{SG}^N$. Infatti non esiste più il problema che il gioco $< N, v + w >$ debba appartenere alla classe $\mathcal{SG}^N$. Non solo: tale assioma è in grado, in aggiunta agli altri tre (1.1, 1.2, 1.3), di caratterizzare l'indice di Shapley sulla classe dei giochi semplici. È quindi possibile dimostrare il seguente teorema:

Teorema 1.2 *Dato un gioco* $< N, v > \in \mathcal{SG}^N$ *esiste ed è unica* $\Phi : \mathcal{SG}(N) \to \mathbb{R}^n$ *che soddisfa gli assiomi 1.1, 1.2, 1.3, 1.5. Tale* Φ *coincide con il valore Shapley del gioco* $< N, v >$.

Tornando a parlare dei metodi computazionali per calcolare il valore Shapley, se il gioco è "piccolo", la formula (6) ci permette di calcolarlo abbastanza facilmente. Vediamo un esempio nel caso dei giochi semplici.

Esempio 1.3 *Si consideri una Società con tre azionisti,* $N = \{1, 2, 3\}$*, che si dividono l'intero stock azionario nelle percentuali del* 20, 30 *e* 50 *per cento rispettivamente.*
Si assuma che ogni decisione possa essere approvata dal consiglio degli azionisti solo se in possesso della maggioranza semplice (quorum del 50% *più uno) delle quote azionarie.*
Questo gioco può essere trattato come un gioco semplice di maggioranza pesata a tre giocatori nel quale le coalizioni vincenti sono:
$\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.
Possiamo calcolare il valore Shapley di questo gioco costruendo la tabella seguente, dove nella prima colonna mettiamo le varie permutazioni possibili dei tre giocatori, mentre nella colonna "intestata" con $i = 1, 2, 3$ *mettiamo i guadagni marginali attribuiti al giocatore* i *nele varie permutazioni possibili. Le due ultime righe contengono le somme dei guadagni marginali e poi tali valori divisi per* 6 *(ovverossia* 3!*), vale a dire il valore Shapley.*

permutazione	1	2	3
123	0	0	1
132	0	0	1
213	0	0	1
231	0	0	1
312	1	0	0
321	0	1	0
totale	1	1	4
valore Shapley	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

Se il gioco è semplice, come nell'esempio precedente, $v(S) - V(S \setminus \{i\}) = 1$ quando la coalizione S è vincente e la coalizione $S \setminus \{i\}$ è perdente, altrimenti il contributo marginale è uguale a zero. Perciò la formula (7) diventa:

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \in A_i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \tag{10}$$

dove A_i denota l'insieme di tutte le coalizioni vincenti S che contengono il giocatore i e tali che $S \setminus \{i\}$ siano perdenti. Questa formulazone per la classe dei giochi semplici viene generalmente indicata con il nome di indice di Shapley - Shubik, dal nome dei due autori che la introdussero nel 1954.

Esercizio 1.2 *Calcolare il valore Shapley per l'esempio precedente utilizzando la formulazione di Shapley - Shubik.*

Si dimostra che il vettore Shapley è un imputazione del gioco. Non sempre invece sta nel nucleo.

2 L'indice di Banzhaf

L'indice di Banzhaf è un altro indice di potere basato sui contributi marginali come quello di Shapley.
Questa volta però, tutte le coalizioni alle quali appartiene il giocatore i sono considerate equiprobabili. Quindi nella (3), essendo il numero di coalizioni possibili a cui i appartiene pari a 2^{n-1} (cioè tutte quelle coalizioni ottenute dalle coalizioni prive di i, che sono 2^{n-1} appunto, con l'aggiunta di i), basta sostituire $p_i(S) = \frac{1}{2^{n-1}}$. L'indice di Banzhaf corrisponde infatti a:

$$\beta_i(v) = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} \frac{1}{2^{n-1}} (v(S) - v(S \setminus \{i\})) \tag{11}$$

Esempio 2.1 *Proviamo a calcolare l'indice di Banzhaf del gioco nell'esempio 1.3 utilizzando la formula (11). Per questo motivo costruiamo la tabella seguente, dove nella prima colonna mettiamo le varie coalizioni possibili dei tre giocatori, mentre nella colonna "intestata" con $i = 1, 2, 3$ mettiamo i guadagni marginali attribuiti al giocatore i nele varie coalizioni possibili. Ovviamente quando un giocatore non appartiene alla coalizione, nella casella di incrocio metteremo *, che sta a significare che il termine non va considerato, come da definizione della sommatoria in (11). Le due ultime righe contengono le somme dei guadagni marginali e poi tali valori divisi per 4 (ovverossia 2^{3-1})), vale a dire l'indice di Banzhaf.*

coalizione	1	2	3
$\{\emptyset\}$	$*$	$*$	$*$
$\{1\}$	0	$*$	$*$
$\{2\}$	$*$	0	$*$
$\{3\}$	$*$	$*$	0
$\{1,2\}$	0	0	$*$
$\{1,3\}$	1	$*$	1
$\{2,3\}$	$*$	1	1
$\{1,2,3\}$	0	0	1
totale	1	1	4
Indice Banzhaf	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Tale vettore è evidentemente diverso dal vettore di Shapley.
Non solo: la somma delle componenti del vettore di Banzhaf è diversa da 1.

Esercizio 2.1 *Si consideri il gioco a quattro giocatori $< \{1, 2, 3, 4\}, v >$ tale che $v(N) = 1$ e $v(S) = 0 \quad \forall S \subset N$. Calcolarne l'indice di Shapley e quello*

di Banzhaf.
*(*Sol. *Shapley:* $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$*; Banzhaf:* $(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ *)*

Il fatto che la somma delle componenti del vettore di Banzhaf sia diversa da 1 è una proprietà di tale vettore, o meglio una mancanza del requisito di soddisfare l'assioma di efficienza.
Chi volesse tentare di normalizzare il vettore, magari per cercare di confrontarlo meglio con il vettore Shapley, è libero di farlo: anzi, l'indice di Banzhaf *normalizzato* (detto anche indice di Banzhaf-Coleman) è un ulteriore indice di potere (vedremo più avanti con quali proprietà e quali "distorsioni").
Nel caso dell'esempio 2.1 appena illustrato otterrebbe il vettore $\theta(v) = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ che continua ad essere diverso dal vettore Shapley.
Non a caso il vettore di Banzhaf può essere nel contempo diverso dal vettore Shapley e non essere efficiente. Il vettore Banzhaf, infatti, soddisfa gli assiomi 1.2, 1.3 e 1.4 ma non l'assioma 1.1.
Ed è soltanto questa mancanza che lo differenzia dal vettore Shapley.
Con questo siamo ben lungi dall'affermare che il vettore Banzhaf sia l'unico vettore in grado di soddisfare gli assiomi 1.2, 1.3 e 1.4.

Esercizio 2.2 *Trovare almeno due esempi di indici che soddisfino gli assiomi 1.2, 1.3 e 1.4.*

Ad esempio l' *indice nullo*, che è dato da

$$\rho_i(v) = 0 \qquad \forall < N, v >\in \mathcal{G}^N \qquad i \in N \tag{12}$$

soddisfa anch'esso gli stessi assiomi.
Stesso discorso si può fare per l' *indice dittatoriale*, così definito

$$\rho_i(v) = v(\{i\}) \qquad \forall < N, v >\in \mathcal{G}^N \qquad i \in N \tag{13}$$

e l' *indice marginale* che è invece il seguente

$$\mu_i(v) = v(N) - v(N \setminus \{i\}) \qquad \forall < N, v >\in \mathcal{G}^N \qquad i \in N \tag{14}$$

Si potrebbe contestare che questi sono comunque degli indici "banali", ma ciò non toglierebbe il fatto che l'unicità dell'indice nel soddisfare i suddetti assiomi, in questo caso, non esiste. Non solo: anche se si volesse dimostrare che i quattro indici sono gli unici che soddisfano i suddetti assiomi, ci troveremmo impossibilitati a farlo.

Per caratterizzare assiomaticamente l'indice di Banzhaf almeno nella classe $\mathcal{SC}^N$ dei giochi semplici abbiamo bisogno di un ulteriore assioma. Quale? Esattamente quello che asserisce che la somma delle componenti dell'indice di potere sia uguale a quello fornito dalla somma delle componenti della (11).

Assioma 2.1 (Banzhaf total power) *Per tutti i giochi* $< N, v > \in \mathcal{C}^N$

$$\sum_{i \in N} \psi_i(v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i \in N} \left(\sum_{S \subseteq N, S \ni i} \Big(v(S) - v(S \setminus \{i\}) \Big) \right) \tag{15}$$

per ogni $i \in N$.

Inoltre, ancora una volta, dovremo abbandonare l'assioma 1.4, che sulla classe $\mathcal{SG}^N$ continua ad essere inutile, a favore di quello 1.5.

Teorema 2.1 *Il solo indice capace di soddisfare gli assiomi 1.2, 1.3, 1.5 e 2.1 per ogni gioco appartenente alla classe dei giochi semplici* $\mathcal{SG}^N$ *è l'indice di Banzhaf.*

Come annunciato in precedenza, anche l'indice di Banzhaf normalizzato possiede una propria caratterizzazione assiomatica.
Non faremo accenno agli assiomi della caratterizzazione dall'indice normalizzato (che, almeno in parte, non sono gli stessi che caratterizzano l'indice di Banzhaf classico). La scelta di non presentarli è legata anche al fatto che tale indice possiede degli aspetti paradossali.
Per esempio una proprietà "carina" che desidereremmo aspettarci da un indice di potere è che in un gioco di maggioranza pesata in cui due elettori si uniscono, il nuovo elettore nato dall'unione, nel nuovo gioco di maggioranza non stia peggio di prima. Ebbene l'indice di Banzhaf normalizzato non possiede questa proprietà. Illustriamo questa asserzione con il seguente esempio:

Esempio 2.2 (5.8 in Felsenthal e Machover (1995)) *Si consideri il gioco di maggioiranza pesata* $[25; 9, 9, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$. *Se i giocatori* 1 *e* 4 *si fondono, otteniamo il nuovo gioco di maggioranza pesata* $[25; 10, 9, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$. *Sebbene infatti la componente dell'indice di Banzhaf relativa al giocatore* 1 *(rispettivamente, al giocatore* 4*) passi da* $\frac{129}{512}$ *(rispettivamente,* $\frac{1}{512}$*) prima dell'unione, ad un valore per il giocatore "unione" del secondo gioco pari a* $\frac{65}{256}$ *(pari cioè alla somma dei due indici del primo gioco) la somma di tutte le componenti dei due indici nel primo e nel secondo gioco rispettivamente passa da* $\frac{196}{256}$ *a* $\frac{199}{256}$. *Quindi l'indice di Banzhaf normalizzato diminuisce dopo l'unione.*

In maniera analoga, l'indice di Banzhaf normalizzato, viola anche la ragionevole proprietà per la quale se un giocatore regala parte del suo peso a qualche altro giocatore, allora non dovrebbe guadagnare potere. Si consideri il seguente esempio:

Esempio 2.3 (5.8 in Felsenthal e Machover (1995)) *Si consideri il gioco di maggioiranza pesata* $[8; 5, 3, 1, 1, 1]$. *Se il giocatore* 1 *dona un voto al* *giocatore* 2*, otteniamo il nuovo gioco di maggioranza pesata* $[8; 4, 4, 1, 1, 1]$*. Sebbene infatti la componente dell'indice di Banzhaf relativa al giocatore* 1 *passi da* $\frac{9}{16}$ *prima dell'unione, ad un valore nel secondo gioco pari a* $\frac{1}{2}$*, la somma di tutte le componenti dei due indici nel primo e nel secondo gioco rispettivamente passa da* $\frac{19}{16}$ *a* 1*. Quindi l'indice di Banzhaf normalizzato del giocatore* 1 *aumenta dopo aver fatto il regalo al giocatore* 2*.*

La morale potrebbe essere la seguente: forse è meglio rinunciare all'assioma di efficienza che cercare di soddisfarlo a tutti i costi, magari procedendo ad una "distorsiva" normalizzazione.

3 Considerazioni sull'equità

3.1 Paradosso dell'Alabama

Fino a questo momento abbiamo parlato di indici di potere dei giocatori. Il potere dei giocatori è misurato in relazione al ruolo rivestito delle varie coalizioni nel gioco, che può essere di vittoria o sconfitta. D'altro canto, nei contesti reali che si possono rappresentare tramite giochi semplici, per esempio i meccanismi elettorali, il concetto di vittoria o sconfitta sono collegati, sempre nell'ottica dell'esempio, al passaggio o meno di una certa decisione o anche alla nomina dei propri rappresentanti politici (come nel gioco del Parlamento o del Consiglio).
Questi giochi, quindi, esprimono situazioni più complesse dell'esclusivo concetto di vittoria o sconfitta. Queste situazioni associano alla vittoria un ritorno, verso la coalizione vincente, di una serie di benefici che possono essere quelli ottenuti dalla decisione presa oppure la rappresentatività politica negli organi legislativi o di governo. Esiste cioè in queste situazioni la necessità di un'equa redistribuzione dei benefici ottenuti, o dei beni che li producono, tra gli individui partecipanti al gioco. Si potrebbe pensare di suddividere questi beni in misura proporzionale agli indici di potere dei giocatori nel gioco, e in taluni casi il metodo potrebbe essere del tutto giustificato (probabilmente si presenterebbe sempre il problema di decidere quale indice di potere utilizzare). Ma cosa fare quando tali beni sono indivisibili? Un classico esempio è quello dell'attribuzione della rappresentatività tra i collegi elettorali (Young 1995). Nel caso degli Stati Uniti i seggi nella Casa dei Deputati, sono attribuiti tra gli Stati in accordo ad una formula matematica che dipende dalla popolazione degli Stati stessi. Nei paesi che utilizzano sistemi di rappresentazione di tipo proporzionale, l'obiettivo è quello di allocare i seggi tra i vari partiti politici in proporzione ai loro voti totali. In entrambi i casi appena descritti, l'ideale di equità sarebbe riuscire ad attribuire ad ogni persona uno ed un solo voto (*one person one vote*):

ogni persona dovrebbe avere un'identica percentuale di rappresentatività, e ad ogni rappresentante dovrebbe corrispondere lo stesso numero di persone. Ad ogni modo, l'ideale non può quasi mai essere messo in pratica, a causa della natura indivisibile dei rappresentanti. Per effetto dei meccanismi di approssimazione, alcuni Stati otterranno di più della loro effettiva percentuale di rappresentatività, mentre altri ne otterranno di meno. La questione, quindi, diventa la seguente: cosa si intende per "più vicini all'equità quanto è possibile" quando l'equità perfetta non può mai, o quasi, essere raggiunta? Questo sorprendentemente difficile problema ha interessato vari uomini di stato, studiosi di politica e matematici per più di due secoli. La ragione è la grande importanza che l'attribuzione dei seggi gioca nella rappresentatività nel governo. La differenza di soltanto un seggio può essere decisiva per determinare l'inclinazione della bilancia del potere nel corso di una legislatura. Quindi il meccanismo dell'attribuzione dei seggi è di indiscutibile interesse per i politici. Ad ogni modo, problemi analoghi sorgono anche in molti altri settori della vita sociale. Si pensi ad esempio agli insegnanti, i quali vengono assegnati ai corsi in proporzione al numero di studenti che vengono registrati per loro. Oppure si pensi al personale medico che viene assegnato alle unità militari in proporzione al numero di soldati in ogni unità; o ancora all'allocazione dei computers e del personale tecnico alle divisioni di una azienda in accordo alla necessità ed alla domanda.

Negli Stati Uniti, la distribuzione dei rappresentanti è stato argomento di attivo dibattito sin dalla Convenzione Costituzionale nel 1787. Il risultato principale per la Convenzione, comunque, non fu la scelta della formula con la quale attuare la distribuzione, ma le basi della rappresentatività. Cosa costituisce per uno Stato la pretesa di essere rappresentato: il numero di abitanti? Il numero degli aventi diritto al voto? La dimensione del suo prodotto economico interno? Il fatto stesso di essere un Stato?
La storia americana presenta vari cambiamenti sulla definizione delle basi di rappresentatività. Oggi, le basi per la distribuzione dei deputati negli Stati Uniti è praticamente la conta dei residenti, a parte alcune "piccole" differenze, come il più di un milione di soldati che prestano servizio all'estero che, nell'attribuzione dei seggi, sono contati nel loro Stato di provenienza. Inoltre ogni Stato deve avere almeno un proprio deputato nella Casa.
Il problema di trovare un meccanismo di attribuzione dei seggi il più equo possibile, invece, fu materia molto più dibattuta e probabilmente ancora irrisolta. Come indicazione generale di tutti i problemi che ci possono essere in questo tipo di ricerca, di seguito presenteremo il metodo suggerito per primo da Alexander Hamilton, Segretario del Tesoro, dopo i risultati del primo censimento americano del 1791. Ma prima, alcune precisazioni:

Definizione 3.1 Definiamo *quota di rappresentatività* di uno Stato come la frazione che la popolazione dello Stato rappresenta del totale della popolazione, moltiplicato per il numero totale di seggi. Quindi se le popolazioni di n Stati sono $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e ci sono a_0 seggi che devono essere distribuiti, la *quota di rappresentatività* di uno Stato $i = 1, \ldots, n$ è $q_i = \frac{a_0 p_i}{\sum_{j=1}^{n} p_j}$.

■

Esempio 3.1 *Tre Stati a, b e c con la popolazione illustrata nella tabella seguente devono dividersi* 21 *seggi:*

Stato	*Popolazione*	*Quota di rappresentatività*
a	7270000	14.24
b	1230000	2.41
c	2220000	4.35
totale	10720000	21

Appare evidente che a riceverà almeno 14 *seggi, b almeno* 2 *e c almeno* 4. *La questione è: quale Stato riceverà il* 21*-esimo seggio? L'esito è di rilevante importanza. Per esempio, la decisione di attribuire allo Stato b due o tre seggi determina una differenza del* 50 *per cento del numero di seggi disponibili per lo Stato b.*

Il modo più semplice e forse più ovvio per dare una risposta al problema dell'esempio 3.1 è proprio quello suggerito da Hamilton, ovvero attribuire il seggio "extra" allo Stato avente la parte frazionaria più alta. Più precisamente il metodo suggerito da Hamilton è il seguente:

Definizione 3.2 [Metodo di Hamilton]
Dato un insieme di n Stati ognuno con la propria quota di seggi:

- si dia ad ogni Stato tanti seggi quanti indicati dalla parte intera della propria quota;
- se $t \leq n$ seggi non sono stati assegnati al punto precedente, questi vengano distribuiti (un seggio per ogni Stato) tra i t Stati con le parti frazionarie più alte.

■

Nell'esempio 3.1, il metodo di Hamilton produce la seguente attribuzione di seggi: 14 per a, 3 per b e 4 per c.
Il metodo di Hamilton, insieme ad alcuni altri, è uno dei metodi più ampiamente utilizzati per l'attribuzione dei seggi nelle legislature di vari paesi.
Negli Stati Uniti è stato utilizzato nel passato ma fu abbandonato per colpa di un difetto non da poco. Durante il diciannovesimo secolo, il numero di

membri della Casa dei Deputati aumentava ogni decade per tenere in considerazione i nuovi Stati annessi all'Unione. Fu in seguito al censimento del 1880, che il capo cancelliere dell'Ufficio Censimento, C.W.Seaton, calcolò la distribuzione dei seggi usando il metodo di Hamilton per tutto l'intervallo dimensionale raggiunto dalla Casa in quegli anni, da 275 deputati a 350. In una lettera al Congresso, Seaton affermava:
"Elaborando i calcoli per l'attribuzione dei seggi, mi sono scontrato con il cosiddetto *Paradosso dell'Alabama*, cioè il fatto che allo Stato dell'Alabama spettassero 8 rappresentanti quando il totale era di 299, mentre allo stesso Stato, considerando la stessa distribuzione di popolazione nei vari Stati, ne spettavano 7 quando il totale fu portato a 300. Tale risultato è per me conclusivo nel ritenere che tale metodo è difettoso".
Questo fenomeno può essere illustrato attraverso l'esempio 3.1. Se i seggi totali fossero stati 22 invece che 21, allora le quote di rappresentatività sarebbero state: 14.92 per a, 2.52 per b e 4.56 per c. Quindi il metodo di Hamilton avrebbe attribuito 15 deputati per a, 2 per b e 5 per c. Comparando questi risultati con quelli ottenuti per 21 seggi in totale, si vede che b ha perso un seggio in presenza di una Casa dei Deputati più numerosa. La ragione sta nel fatto che la quota di rappresentatività di b aumenta meno rapidamente in termini assoluti che le quote di rappresentatività di a e di c. La parte intera di b è la più grande quando i seggi sono 21 e la più piccola quando i seggi totali sono portati a 22, impedendo a b di ricevere il seggio extra.
Nonostante ciò, gli Stati Uniti mantennero inalterato il metodo di attribuzione dei seggi sino al 1911, quando, dopo altre pesanti evidenze di difetto del tipo appena illustrato, il metodo fu definitivamente abbandonato in favore di un altro.

3.2 Elezione del Presidente degli Stati Uniti

Nel paragrafo precedente abbiamo esaminato il problema di garantire la corretta rappresentatività degli elettori, problema che traeva origine dalla naturale indivisibilità dei rappresentanti.
Ora presenteremo un problema sempre di rappresentatività degli elettori che però sta a monte del precedente ed è direttamente collegato ai meccanismi ed alle regole di votazione utilizzate.
Il metodo attualmente utilizzato per scegliere il presidente degli Stati Uniti d'America è costituito da due fasi: nella prima gli elettori di ogni singolo Stato eleggono a maggioranza i cosiddetti "Grandi Elettori" o membri del Collegio Elettorale che, nella fase successiva, voteranno a loro volta per il Presidente. Ogni Stato ha a disposizione un numero di Grandi Elettori definito dalla quota di rappresentatività (e dai meccanismi di arrotondamento utilizzati). Generalmente si assume (sebbene nella pratica possano esserci eccezioni occasionali a questa regola) che tutti i Grandi Elettori di un dato

Stato voteranno per il candidato alla Presidenza preferito dalla maggioranza dello Stato nel quale sono stati eletti.
Dato questo meccanismo, per un candidato alla Presidenza una vittoria di misura in uno Stato grande (cioè con un elevato numero di Grandi Elettori) potrebbe essere migliore di tante vittorie schiaccianti in altrettanti piccoli Stati (per esempio, se supponiamo che ad ogni milione di consensi corrisponda un Grande Elettore, conviene avere due milioni più uno consensi in uno stato in cui il totale della popolazione votante è quattro milioni piuttosto che tre milioni di consensi su tre Stati diversi ciascuno con un milione di popolazione votante). In altre parole, con un tale meccanismo, possono risultare vincenti coalizioni con meno della metà dei consensi popolari.
Possiamo modellizzare questo meccanismo elettorale come la v-composizione (si veda in proposito il capitolo sui giochi semplici)

$$u = v[w_1, w_2, \ldots, w_51],$$

dove $< A, u >$ è il gioco dell'elezione del Presidente degli Stati Uniti (cioè il gioco tra tutti gli appartenenti all'insieme degli aventi diritto al voto negli Stati Uniti, che costituiscono l'insieme A), $< G, v >$ è il gioco nel Collegio Elettorale (cioè il gioco delle elezioni tra i Grandi Elettori, che costituiscono l'insieme G) e $< N_1, w_1 >, < N_2, w_2 >, \ldots, < N_51, w_51 >$ sono i giochi nei singoli Sati, cioè $< N_j, w_j >$, $j = 1, 2, \ldots, 51$, è il gioco giocato tra gli elettori nel j-esimo Stato (cioè dagli elettori che costituiscono l'insieme N_J).
Per un dato Stato j, $j = 1, 2, \ldots, 51$, $< N_j, w_j >$ è un gioco di maggioranza semplice tra $n_j = |N_j|$ giocatori. Questo significa che, come abbiamo visto nel capitolo sui giochi semplici, la funzione caratteristica di tale gioco sarà definita come segue:

$$w_j(S) = \begin{cases} 0 & |S| \leq \frac{n_j}{2} \\ \\ 1 & |S| > \frac{n_j}{2} \end{cases} \qquad (16)$$

Assumendo, come abbiamo fatto, che tutti i Grandi Elettori di un dato Stato votino nella stessa maniera, $< G, v >$ risulta invece essere un gioco di maggioranza pesata a 51 giocatori definito dalla struttura di pesi e quota $[270; p_1, p_2, \ldots, p_{51}]$, dove il peso p_j, $j = 1, 2, \ldots, 51$, è il numero di Grandi Elettori provenienti dal j-esimo Stato. Nel 1977, l'anno al quale Owen ha riferito nel suo libro l'esempio che stiamo trattando, tali pesi variavano tra i 45 della California ai 3 degli Stati più piccoli e del Distretto della Columbia. Oggi i pesi sono leggermente diversi da quelli del 1977, ma la struttura del gioco è indicativamente la stessa.
Ed è proprio questa struttura che Owen cercò di analizzare tramite il calcolo degli indici di potere (sia di Shapley che di Banzhaf) dei giocatori del gioco $< A, u >$. Ciò che infatti non è per niente ovvio è riuscire a capire se il gioco $< G, v >$ non favorisce alcuni elettori degli Stati Uniti nei confronti di altri o, in altri termini, se il potere di ciascun cittadino avente diritto al voto è lo

stesso a prescindere dallo Stato di appartenenza (ancora una volta vogliamo vedere se è rispettato il principio "*one man one vote*").
Calcolare gli indici di Sahpley e di Banzhaf per il gioco di maggioranza $< G, v >$, dato l'elevato numero di giocatori, non è banale e anche con il calcolatore, senza fare le debite semplificazioni, può risultare un problema irrisolvibile. Owen, nel suo libro, mostra un metodo per giungere ad una stima approssimata di tali indici e li confronta con i risultati veri, la cui computazione, però, non è mostrata. Nella seguente tabella riportiamo uno stralcio a nostro avviso significativo della tabella in cui Owen mostra i valori Shapley e Banzhaf da lui calcolati per gli aventi diritto al voto nei vari Stati dell'Unione:

Stato	Votanti	Numero di grandi elettori	Indice Shapley ($\Phi \times 10^{-9}$)	Indice Banzhaf ($\Psi \times 10^{-5}$)
California	19953134	45	7.8476	8.6624
Distretto della Columbia	765510	3	2.4783	2.7616
Florida	6789433	17	4.7326	5.2716
Montana	694409	4	3.4516	3.8407

Si noti già da questi pochi dati di che entità siano le discrepanze tra il potere degli aventi diritto al voto, indicate sia dall valore Shapley che dall'indice Banzhaf. Entrambi gli indici mostrano come il potere di un cittadino elettore in California sia approssimativamente il triplo del potere di un cittadino elettore nel Distretto della Columbia. Anche per gli elettori della Florida, Stato molto problematico per la proclamazione del Presidente nell'elezione del 2000, la situazione è nettamente favorevole rispetto agli Stati più piccoli. Altra situazione caratteristica è il rapporto tra gli indici di due Stati (o più precisamente dell'unico Distretto e di uno Stato), entrambi tra i più piccoli: il Distretto della Columbia e lo Stato del Montana. Pur avendo un solo Grande Elettore di differenza (a questo proposito si noti il numero di Grandi Elettori per il Montana, che ha meno elettori del Distretto della Columbia ma nonostante ciò possiede un Grande Elettore in più dal momento che la distribuzione dei Grandi Elettori è calcolata sulle quote di rappresentatività, cioè sulla popolazione residente), il potere dei cittadini aventi diritto al voto in Montana è quasi una volta e mezzo quello dei cittadini aventi diritto al voto nel Distretto della Columbia.

Bibliografia essenziale:

- Laruelle A., Valenciano F. (1999) *Why power indices should be efficient*

- Department of Applied Economics IV Basque Country University. - Discussion paper: **1**.

- Felsenthal D., Machover M. (1995) *"Postulates and Paradoxes of Voting Power - A Critical Re-appraisal"* - Theory and Decision - **38**, pp. 195-229.

- Feltkamp V. (1995) *Cooperation in Controlled Network* - KUB Tilburg University. - PhD Thesis.

- Ferrari G., Margiocco M. (1997) *Dispense sui Giochi Cooperativi* - Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova - Dispense Ciclo di Seminari di Teoria dei Giochi 1997/98.

- Owen G. (1995) *Game Theory* - Academic Press - Third edition, book: **pp.447**.

- Patrone F. (1998) *Dispense sui Giochi Cooperativi* - Dispense lezioni Master in Teoria delle Decisioni.

- Pederzoli G. (1994) *Giochi Cooperativi: teoria, metodi, applicazioni* - Istituto di Statistica e Ricerca Operativa dell'Università di Trento - Dispense.

- Young H.P. (1995) *Equity: In Theory and Practice* - PRINCETON University Press - book: **pp.253**.