SI PUÒ ESSERE D'ACCORDO DI NON ESSERE D'ACCORDO?

Anna TORRE [1]

1 Motivazioni

Conoscenza e conoscenza comune sono elementi centrali nella teoria economica e nella teoria dei giochi.

Facciamo alcuni esempi.

1) Consideriamo il metodo della eliminazione iterata di strategie strettamente dominate per trovare "soluzioni" di un gioco.

Guardiamo il seguente gioco in forma strategica, dove I sceglie le righe e II le colonne della matrice:

I/II	sinistra	destra
alto	2,2	5,1
medio	3,4	4,2
basso	2,1	3,4

Per il giocatore I la strategia "basso" è strettamente dominata da "medio", dunque "basso" può essere eliminata. Ma per proseguire nella eliminazione (il giocatore II a questo punto potrà eliminare "destra" perché strettamente dominata da "sinistra"), occorre che II sia convinto che I abbia eliminato "basso", perché se II prende in considerazione il fatto che I potrebbe giocare "basso" non ha più alcun motivo di eliminare "destra". Quindi il metodo della eliminazione iterata di strategie strettamente dominate dà per scontato che i giocatori siano intelligenti e razionali, che ciascuno sappia che gli altri lo sono, che ciascuno sappia che gli altri sanno che loro sono intelligenti e razionali, ecc..

Un altro esempio di assunzione implicita della conoscenza comune della intelligenza e razionalità di tutti i gicatori è dato dalla cosidetta "induzione a ritroso".

[1] Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, Via Ferrata 1, 27100, Pavia, Italy. *E-mail: anna.torre@unipv.it*

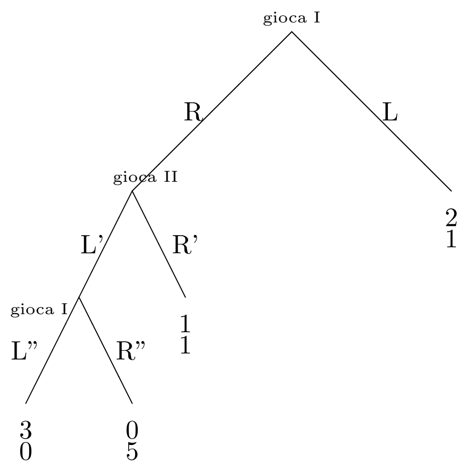

Figure 1:

Consideriamo il gioco di fig.1:

Cominciamo dal terzo stadio, cioè dalla seconda mossa del giocatore I. In questo punto il giocatore I ha di fronte la scelta tra un payoff pari a 3, giocando L", e un payoff pari a 0, giocando R", cosi che giocare L" risulta la scelta ottima. Nel secondo stadio del gioco il giocatore II anticipa che se il gioco raggiunge il terzo stadio, allora I giocherà L" e ciò comporta un payoff pari a 0 per il giocatore II. Perciò la scelta del giocatore II in corrispondenza del secondo stadio del gioco è tra un payoff pari a 1, giocando R' e un payoff pari a 0 giocando L', così che la scelta ottima risulta essere R'. Infine, nel primo stadio del gioco, il giocatore I anticipa che se il gioco raggiunge il secondo stadio allora II giocherà R', che significa un payoff pari a 1 per il giocatore I. Perciò nel primo stadio la scelta per il giocatore I è tra un payoff pari a 2 giocando L e un payoff pari a 1 giocando R, così che la scelta di L risulta essere quella ottima. È ovvio che tutti questi ragionamenti si possono fare solo se si assume che tutti i giocatori siano intelligenti e razionali e che l'intelligenza e la razionalità di ciascuno di essi sia conoscenza comune. Supponiamo infatti che l'intelligenza del giocatore II non sia conoscenza comune. In questo caso I può scegliere R nel primo stadio del gioco sperando che II giochi L' nel secondo stadio dando così a I la possibilità di giocare L" nel terzo stadio.

Ma cosa vuol dire esattamente conoscenza comune?

O meglio, che differenza c'è tra conoscenza e conoscenza comune e come si formalizzano questi concetti?

2 Enigmi

- 1) TRE SIGNORINE CON LA FACCIA SPORCA.

  Supponiamo che tre ragazze, tutte con la faccia sporca, siano sedute in cerchio e ciascuna di esse veda la faccia delle altre due. Supponiamo inoltre che le tre ragazze siano intelligenti e razionali e abbiano assoluta fiducia nella intelligenza e razionalità delle altre, e abbiano assoluta fiducia nel fatto che ciascuna delle altre ha assoluta fiducia nel fatto che ciascuna ha assoluta fiducia nella intelligenza e razionalità delle altre e così via. Supponiamo inoltre che l'intelligenza provochi l'effetto che ciascuna di esse arrossisce se e soltanto se ha la certezza di avere la faccia sporca.

  Osserviamo i due seguenti fatti:

  1 Ciascuna delle ragazze vede le altre, quindi sa che almeno una di esse ha la faccia sporca;

  2 Nessuna ragazza ha la possibilità di sapere se la sua faccia è sporca, perché nella stanza non esistono specchi.

  Se questa è la situazione, nessuna ragazza ha motivo di arrossire.

  Supponiamo ora che entri una persona e faccia il seguente annuncio:

  "Almeno una delle ragazze qui presenti ha la faccia sporca".

  Ovviamente viene annunciato un fatto già noto a tutti, ma la situazione cambia.

  Cosa è cambiato?

  È cambiato il fatto che l'annuncio mette a conoscenza le ragazze del fatto che tutte e tre sono a conoscenza del fatto che almeno una di loro ha la faccia sporca.

  Quali conseguenze ha questo ?

  Indichiamo per comodità con A, B, C le tre ragazze. Mettiamoci per un attimo dal punto di vista di A, osservando però che la situazione è simmetrica.

  A pensa: se io ho la faccia pulita, B e C osservano ciascuna una sola faccia sporca. Quindi per esempio B, se C non arrossisce, sa di avere la faccia sporca. C non arrossisce, quindi presto B avrà la certezza che le facce sporche sono almeno due e, sempre nel caso che la mia faccia sia pulita, arrossirà. Poichè B non arrossisce, io ho la certezza che le facce sporche sono tre e poichè sono "intelligente" mi tocca di arrossire.

  Simmetricamente anche ciascuna delle altre ragazze fa lo stesso ragionamento e quindi ha la certezza di avere la faccia sporca, dunque arrossisce.

Analizzando l'accaduto, si può osservare che l'ipotesi di conoscenza comune ha permesso un passaggio di informazione "silenzioso" dovuto semplicemente alla osservazione, da parte di ciascuna ragazza, dei comportamenti delle altre e alla certezza che tali comportamenti dovevano essere intelligenti. Ciascuna ragazza insomma "fidandosi dei comportamenti dell'altra" alla fine assume informazione.

- 2) IL PADRE BURLONE

  Un padre offre ai suoi due figli due buste in cui ci sono: nelle prima 10^n euro e nella seconda 10^{n+1} euro dove n è un numero intero scelto con ugual probabilità tre 1 e 5. I figli sono al corrente di tutti questi dati e si fidano ciecamente del padre. Inoltre essi sono indifferenti al rischio[2].

  Le buste vengono date ai due figli a caso.

  Il primo figlio apre la busta e scopre che essa contiene 10^4 euro, mentre il secondo scopre di avere 10^5 euro. A questo punto il padre chiede separatamente a ciascuno dei due figli se vuole scambiare la busta con il fratello. Questa volta la razionalità consiste nel massimizzare il "payoff atteso". Il primo figlio sa che nella busta del fratello ci sono con uguale probabilità 10^3 euro o 10^5 euro e dunque il suo payoff atteso scambiando le buste è $\frac{10^3+10^5}{2}$ euro cioè 50500 euro, un numero certamente maggiore di quello degli euro che ha nella sua busta, e quindi, poichè è intelligente, accetta. Il secondo figlio fa un conto analogo e scopre che anche a lui conviene accettare. A questo punto il padre comunica a entrambi i figli il fatto che entrambi hanno accettato lo scambio. Poi , senza che avvenga alcuno scambio, ripete come prima separatamente a entrambi la stessa domanda. Questa volta il primo figlio accetta e il secondo no. Perchè a questo punto il secondo figlio è venuto a sapere che certamente nella busta del primo ci sono 10^4 euro. E questa informazione gli è data dal fatto che il fratello ha accettato lo scambio la prima volta. Infatti l'intelligenza impone di accettare lo scambio se e solo se nella propria busta non c'è il massimo numero di euro possibile, che è 10^6

  Anche questa volta c'è stato un passaggio di informazione silenzioso, nel senso che l'informazione del numero di euro contenuti nella busta del primo fratello è stata assunta semplicemente osservando il suo comportamento. Questo fatto è generale e cioè le valutazioni di probabilità asimmetriche sono possibili solo se c'è incertezza sulle azioni compiute dagli altri.

[2] Un decisore si dice indifferente al rischio se la sua funzione di utilità ha lo stesso valore per un capitale x certo e per una lotteria che ha come valore atteso x.

Vediamo ora di formalizzare le considerazioni che abbiamo fatto nell'aneddoto delle tre signorine. In questo caso uno stato del mondo corrisponde a sapere come sono (pulite o sporche) le facce di A, B, C:

STATI DEL MONDO

	a	b	c	d	e	f	g	h
A	S	S	S	S	P	P	P	P
B	S	S	P	P	S	S	P	P
C	S	P	S	P	S	P	S	P

dove P sta per "faccia pulita" e S sta per "faccia sporca". L'insieme degli stati del mondo si può allora indicare con

$$\Omega = \{a, b.c, d, e, f, g, h\}.$$

Noi abbiamo supposto che le facce siano sporche e quindi di trovarci nello stato $\omega = a$.

Le partizioni di A, B, C sullo stato del mondo sono :

$$H_A = \{\{a, e\}, \{b, f\}, \{c, g\}, \{d, h\}\},$$

$$H_B = \{\{a, c\}, \{b, d\}, \{e, g\}, \{f, h\}\},$$

$$H_C = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}, \{g, h\}\}.$$

Queste partizioni corrispondono alla situazione di informazione precedente l'annuncio che dà la conoscenza comune del fatto che almeno una ragazza ha la faccia sporca. Osserviamo che l'unica partizione "meno fine" [3] di tutte le H_A, H_B, H_C è la partizione banale Ω, e ciò corrisponde al fatto che l'unico evento conoscenza comune è Ω.

L'annuncio dice che lo stato h è falso ed è equivalente a fare in modo che ciascuna ragazza distingua lo stato h da tutti gli altri. Le nuove partizioni di A, B, C dopo l'annuncio diventano dunque:

$$H'_A = \{\{a, e\}, \{b, f\}, \{c, g\}, \{d\}, \{h\}\},$$

$$H'_B = \{\{a, c\}, \{b, d\}, \{e, g\}, \{f\}, \{h\}\},$$

$$H'_C = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}, \{g\}, \{h\}\}.$$

[3]Date due partizioni H e K di Ω, si dice che H è meno fine di K se per ogni $\omega \in \Omega$ si ha $k(\omega) \subseteq h(\omega)$. In questo caso si dice anche che K è più fine di H.

Questa volta c'è un'altra partizione meno fine di H'_A, H'_B, H'_C ed è

$$M' = \{\Omega - h\ ,\ \{h\}\}.$$

Vediamo ora la situazione dal punto di vista di A, schematizzandola nel modo seguente: supponiamo che in un primo istante C abbia la possibilità di arrossire se è certa di avere la faccia sporca, in un secondo istante sia B ad avere questa possibilità, sempre se è certa di avere la faccia sporca e che in un terzo istante questa possibilità la abbia A.

Istante 1) Poichè siamo in a, C non arrossisce e in questo modo rende conoscenza comune il fatto, peraltro già noto a tutti, che C non è l'unica ragazza con la faccia sporca e pertanto che lo stato g è falso e quindi distinguibile dagli altri. A questo punto le nuove partizioni diventano:

$$H''_A = \{\{a, e\}, \{b, f\}, \{c\}\{, g\}, \{d\}, \{h\}\},$$
$$H''_B = \{\{a, c\}, \{b, d\}, \{e\}, \{g\}, \{f\}, \{h\}\},$$
$$H''_C = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}, \{g\}, \{h\}\}.$$

Istante 2) B non arrossisce. In questo modo rende conoscenza comune il fatto che e ed f sono falsi e quindi distinguibili da tutti gli altri eventi di cui non c'è certezza che siano falsi. La nuova partizione diventa dunque:

$$H'''_A = \{\{a\}, \{e\}, \{b\}, \{f\}, \{c\}\{, g\}, \{d\}, \{h\}\},$$
$$H'''_B = \{\{a, c\}, \{b, d\}, \{e\}, \{g\}, \{f\}, \{h\}\},$$
$$H'''_C = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{e, f\}, \{g\}, \{h\}\}.$$

Istante 3) A ha la percezione esatta dello stato del mondo (il suo insieme di informazione è un solo punto) e quindi arrossisce.

3 Conoscenza comune e informazione asimmetrica

Il più noto risultato ottenuto con la definizione formale di conoscenza comune è il teorema di Aumann, che assicura che, sotto opportune ipotesi, giocatori razionali non possono essere d'accordo di non essere d'accordo sulla probabilità che ciascuno di essi assegna a un dato evento, se queste probabilità sono conoscenza comune.

L'idea intuitiva del teorema è la seguente: se un giocatore sa che gli altri giocatori hanno aspettative diverse dalle sue, egli rivede le sue aspettative per tener conto di quelle degli altri. Questo non è vero se i giocatori pensano che i loro rivali siano pazzi: perché il risultato sia valido è necessario che ciascuno pensi che il modo di ragionare degli altri è corretto e che la differenza nelle aspettative riflette solo qualche informazione obiettiva. È inoltre necessario che tutti i giocatori abbiano quella che si dice una "common prior", e cioè che abbiano una distribuzione di probabilità a priori uguale tra di loro, e che questa distribuzione di probabilità a priori sia conoscenza comune In seguito i giocatori hanno esperienze diverse che li portano ad avere distribuzioni di probabilità diverse da quelle da cui sono partiti. Nel momento però in cui queste nuove probabilità diventano conoscenza comune, ciascuno le rivede per l'assoluta fiducia che ha nella intelligenza e razionalità degli altri.

Teorema 1 [4] *Sia $\omega \in \Omega$. Supponiamo che sia conoscenza comune in ω che la probabilità a posteriori di un evento E è q_i per il giocatore i e q_j per il giocatore j. Allora $q_i = q_j$.*

Riportiamo la dimostrazione del teorema in appendice

Osservazione 1 . *Osserviamo che il teorema di Aumann assicura soltanto che le probabilità a posteriori sono uguali, ma non dice affatto che a posteriori i giocatori sappiano per quali motivi la probabilità dell'altro è quella annunciata, come illustrato dal seguente:*

Esempio 1

$$\Omega = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\},$$

e supponiamo che su Ω ci sia una distribuzione di probabilità a priori uniforme. Il giocatore 1 vede solo la prima componente dell'elemento di Ω, mentre il giocatore 2 vede solo la seconda componente. Dunque

$$H_1 = \{\{(0,0),(0,1)\},\{(1,0),(1,1)\}\}$$

e

$$H_2 = \{\{(0,0),(1,0)\},\{(0,1),(1,1)\}\}.$$

In $\omega = (0,0)$, calcoliamo le probabilità a posteriori dell'insieme $E = \{(0,0),(1,1)\}$. Si ha $q_1(E) = q_2(E) = 1/2$. Ma quando entrambi i giocatori annunciano queste probabilità nessuno dei due dà all'altro alcuna nuova informazione. Infatti, per esempio, vediamo la situazione del giocatore 1. In ω egli vede $\{(0,0),(0,1)\}$ e il fatto che il giocatore 2 annuncia 1/2 per 1 è perfettamente compatibile con il fatto che 2 veda invece $\{(0,1),(1,1)\}$. Nessuna informazione sul procedimento logico che ha portato 2 a dichiarare 1/2 è passata.

---

[4] Aumann, Robert J. [1976]: Agreeing to Disagree, Annals of Statistics, 4, 1236-1239.

4 Il gioco della posta elettronica

Questo esempio[5] è interessante per mettere in evidenza come, nel caso in cui l'insieme degli stati del mondo è infinito, la conoscenza iterata fino al grado N non implica la conoscenza comune, per quanto sia grande N.

Due giocatori I e II devono scegliere una azione tra A e B.

Con probabilità $p < \frac{1}{2}$ il gioco in cui sono coinvolti è G_b e con probabilità $1 - p$ è G_a.

Le utilità di I e II nei due casi sono le seguenti:

G_a:

I/II	A	$B3$
A	M,M	1,-L
B	-L,1	0,0

G_b:

I/II	A	$B3$
A	0,0	1,-L
B	-L,1	M,M

dove si suppone che $L > M > 1$.

(A, A) è l'equilibrio di Nash del primo gioco e (B, B) è l'equilibrio di Nash del secondo.

Osserviamo che, anche se un giocatore è sicuro che il gioco sia G_b, è per lui rischioso scegliere la strategia B se non è certo che l'altro lo sappia.

Consideriamo il gioco in vari casi di informazione per i due giocatori.

Se supponiamo che sia conoscenza comune quale dei due giochi viene giocato, allora l'equilibrio si ottiene giocando da parte di ciascun giocatore la strategia : "Gioco A se il gioco è G_a, gioco B se il gioco è G_b" e l'utilità ottenuta è M per ciascun giocatore.

Supponiamo ora che sia noto solo al primo giocatore quale è il gioco. In questo caso si può vedere che l'unico equilibrio di Nash "bayesiano"[6] consiste nel giocare A da parte di entrambi i giocatori e l'utilità attesa è $(1 - p)M$.

[5] Rubinstein Ariel (1989) "The electronic mail game: Strategic behavior under "almost common knowledge", American Economic Review, 79, 385-391

[6] Per la definizione di equilibrio bayesiano vedi per esempio Myerson "Game theory, Analysis of Conflict", Harvard 1991

Si supponga infine che i due giocatori possano comunicare tra loro ma che il gioco non diventi mai conoscenza comune.

La comunicazione è la seguente:

> Se il gioco è G_b il computer di I invia automaticamente un messaggio a quello di II;
>
> Se il gioco è G_a nessun messaggio è inviato da I a II;
>
> Se un computer riceve un messaggio, invia automaticamente la conferma, questo non solo per il messaggio iniziale, ma anche per le successive conferme.

La regola prevede che ogni computer invii conferme, perché esiste una piccola probabilità $\varepsilon > 0$ che un messaggio non giunga a destinazione. Se un messaggio non viene ricevuto, allora la comunicazione si interrompe. Alla fine della fase di invio ogni giocatore legge sullo schermo il numero di messaggi che il suo computer ha inviato.

Se vogliamo discutere la conoscenza dei giocatori in questa situazione, è necessario specificare quali sono gli stati.

Sia:

$\Omega = \{(Q_I, Q_{II}) \ : \ Q_I = Q_{II} \ \ o \ \ Q_I = Q_{II} + 1 \ \ Q_I, Q_{II} \geq 0\}$

Allo stato (q, q) il computer di I ha inviato q messaggi, tutti sono arrivati al computer di II, il computer di II ha inviato q messaggi ma il suo q-esimo è stato smarrito. Allo stato $(q + 1, q)$, il computer di I ha inviato $q + 1$ messaggi. Tutti sono arrivati al computer di II, tranne il $q + 1$-esimo che è stato smarrito.

La partizione sullo stato del mondo

$H_I = \{\{(0,0)\} \ , \ \{(q,q) \ , (q, q-1)\} \text{ per ogni } q > 0\}$

$H_{II} = \{\{(q,q), (q+1,q)\} \text{ per ogni } q \geq 0\}$

Indichiamo con $G(Q_I, Q_{II})$ il gioco che si gioca nello stato (Q_I, Q_{II}), cioè

$G(0,0) = G_a$ e $G(Q_I, Q_{II}) = G_b$ altrimenti.

I conosce il gioco in ogni caso mentre II lo conosce sempre tranne che in $(0,0)$ e in $(1,0)$.

In $h_I(1,1) = \{(1,1),(1,0)\}$ I sa che il gioco è G_b, ma non sa se II lo sa perché $h_{II}(1,0) = \{(1,0),(0,0)\}$.

Allo stesso modo, in $h_{II}(1,1) = \{(1,1),(2,1)\}$, II sa che il gioco è G_b ma non sa se I sa che II sa che il gioco è G_b perché $h_I(1,1) = \{(1,1),(1,0)\}$ e così via . Ad ogni stato

(q, q) oppure $(q, q+1)$ corrisponde conoscenza iterata fino al livello q che il gioco è G_b, ma questo non è conoscenza comune.

Se ε è piccolo, con probabilità elevata ogni giocatore vede un numero elevato sul suo schermo. Quando I vede 1 sullo schermo non può sapere se II sa che il gioco è G_b e quindi esita a giocare B. Ma se il numero sullo schermo è alto, può sembrare quasi conoscenza comune che il gioco sia G_b. La decisione è legata all'opinione di I su cosa farà II quando legge un numero alto sullo schermo. Si può osservare che la distribuzione di probabilità iniziale su Ω è comune ai due giocatori e deriva dal fatto che il gioco è G_a con probabilità $1-p$ e G_b con probabilità p.

Se vogliamo trovare gli equilibri di Nash bayesiani di questo gioco in questa situazione informativa, occorre fare un po' di conti. Il risultato (non particolarmente difficile, ma un po' noioso) è che non è cambiato nulla rispetto alla situazione in cui solo I è informato. L'equilibrio è ancora (A, A) e il valore atteso è $(1-p)M$.

Questo esempio sottolinea ancora una volta un aspetto paradossale, cioè sottolinea un contrasto tra l'intuizione e l'analisi della teoria dei giochi. Come può comportarsi un giocatore quando vede un numero alto (per esempio 20) sul suo schermo? È difficile pensare che quando $L > M$ di poco e ε è piccolo un giocatore non scelga B.

APPENDICE

5 Conoscenza: formalizzazione

Prima di dare una formulazione del concetto di conoscenza comune, occorre precisare in termini formali cosa si intende per conoscenza.

Indichiamo anzitutto con Ω l'insieme degli stati del mondo, che supporremo finito e con $I = \{1, 2, ..., n\}$ l'insieme dei giocatori, che supporremo avere una distribuzione di probabilità a priori p su Ω.

Ogni sottoinsieme E di Ω si dice evento. Se il vero stato del mondo è ω e $\omega \in E$, si dice che E è vero. Inoltre, a ogni giocatore i supporremo associata una partizione H_i di Ω che rappresenta l'insieme di informazione di i: in altre parole se $\omega \in \Omega$, il giocatore i è in grado di osservare $h_i(\omega)$ e non ω, dove $h_i(\omega)$ è l'elemento di H_i che contiene ω. Per esempio se Ω è l'insieme degli individui osservabili e l'individuo i non è in grado di riconoscere la persona osservata ma solo il suo sesso, allora la partizione H_i è formata da due classi: quella degli uomini e quella delle donne.

Supponiamo poi che tutti gli elementi di Ω abbiano probabilità a priori strettamente positiva. Questa probabilità a priori è uguale per tutti ed è conoscenza comune. Quando il giocatore i sa che lo stato del mondo è $h_i(\omega)$, la sua convinzione diventa

$$prob(\omega \mid h_i) = prob(\omega) / \sum_{\omega' \in h_i} prob(\omega')$$

Definizione 1 *Si dice che il giocatore i conosce un evento $E \subseteq \Omega$ in ω se $h_i(\omega) \subseteq E$. L'evento "il giocatore i conosce E" si indica con $K_i(E)$.*

$$K_i(E) = \{\omega \mid h_i(\omega) \subseteq E\}.$$

In ω, i ha un'informazione che garantisce che E è vero se $\omega \in K_i(E)$

Rispetto a questa definizione , l'operatore K_i soddisfa le seguenti proprietà:

0 $K_i(\Omega) = \Omega$;

1 $K_i(E \cap F) = K_i(E) \cap K_i(F)$;

2 $K_i(E) \subseteq E$ (assioma della conoscenza). Questo assioma sostanzialmente dice che, se il giocatore i conosce E in ω, allora ω è un elemento di E.

3 $K_i(E) = K_i(K_i(E))$ (assioma della trasparenza). Questo assioma dice che, se il giocatore i sa di conoscere E in ω, allora i conosce E in ω.

4 $K_i(C(K_i(E))) = C(K_i(E))$ (assioma della conoscenza negativa) Questo assioma dice che, se il giocatore i non sa di non sapere E in ω, allora i sa E in ω.

Osservazione 2 *Gli assiomi 0,1,2,3 assicurano che l'insieme dei punti fissi di K_i è una topologia su Ω tale che l'operazione K_i è l'operazione di interno. L'assioma 4 assicura invece che, in questo spazio topologico, ogni aperto è anche chiuso e viceversa. In particolare l'intersezione arbitraria di punti fissi di K_i è fissa, e quindi gli elementi minimali formano una partizione di Ω. Se $\omega \in \Omega$, definiamo $P_i(\omega)$ l'intersezione di tutti i punti fissi di K_i che contengono ω.*

Definizione 2 . *Si dice truismo un sottoinsieme T di Ω che non può accadere senza che i sappia che è accaduto: in simboli un truismo soddisfa la proprietà $T \subseteq K_i(T)$.*

Teorema 2 *Un evento E è conosciuto in ω ($\omega \in K_i(E)$) se e solo se esiste un trismo T che implica E ($\omega \in T \subseteq E$).*

Dim . Ogni insieme del tipo $K_i(E)$ è un truismo (cfr assioma 3)). Dunque se $\omega \in K_i(E)$, $K_i(E)$ è il truismo cercato. Viceversa se $\omega \in T \subseteq E$ si ha $\omega \in T \subseteq K_i(T) \subseteq K_i(E)$

Osservazione 3 *Un truismo è esattamente un evento della forma $K_i(E)$, dove E è un qualunque sottoinsieme di Ω.*

In altre parole i truismi sono i punti fissi di K_i , o ancora gli aperti definiti dall'operazione di interno K_i.

6 Conoscenza comune

Finora abbiamo considerato solo un giocatore, cioè il problema della conoscenza è stato relativo solo all'insieme di informazione di un individuo. Vediamo ora di analizzare le relazioni tra le conoscenze dei vari individui, cioè di formalizzare le conoscenze di un individuo relative alle conoscenze degli altri.

Innanzitutto indichiamo con

$$K_I(E) = \{\omega \ \ t.\ c. \bigcup_{i \in I} h_i(\omega) \subseteq E\}$$

l'evento "ognuno conosce E". Ovviamente si ha

$$K_I(E) = \bigcap_{i \in I} K_i(E).$$

L'operatore $K_I : \Omega \to \Omega$ soddisfa le proprietà 0),1),2) del paragrafo precedente, ma in generale non la 3). Per esempio con riferimento all'esempio della Osservazione di pag 11, se

$$E = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\},$$

si ha

$$K_I(E) \ = \ \{\omega_1, \omega_2\} \ \ , \ \ K_I^2(E) = \varphi.$$

Naturalmente l'evento "ognuno conosce che ognuno conosce E" è:

$$K_I^2(E) = \{\omega \ \ t.\ c. \bigcup_{i \in I} h_i(\omega) \subseteq K_I(E)\}.$$

Si ha ovviamente:

$$*) \ \ E \supseteq K_I(E) \supseteq K_I^2(E) \supseteq ... \supseteq K_I^n(E) \supseteq ...$$

Indichiamo con

$$K_I^\infty(E)$$

l'intersezione di tutti i $K_I^n(E)$.

Definizione 3 *Si dice che E è conoscenza comune in* ω *se* $\omega \in K_I^\infty(E)$.

Osservazione 4 . *Poichè abbiamo supposto l'insieme* Ω *finito e vale la successione di inclusioni *), ovviamente esiste un n tale che* $K_I^n(E) = K_I^\infty(E)$. *L'operatore* $K_I^\infty(E)$ *soddisfa le proprietà 0),1),2) del paragrafo precedente, e, a differenza di* K_I, *anche la 3).Quindi anche questo operatore definisce l'operazione di interno per una topologia.*

Definizione 4 *Si dice truismo comune o evento pubblico un sottoinsieme E di* Ω *tale che* $E = K_I(E)$.

In altre parole gli eventi pubblici sono i punti fissi dell'operatore K_I^∞ o ancora gli aperti della topologia indotta dall'operatore interno K_I^∞.

Esiste una caratterizzazione della conoscenza comune che fa uso degli eventi pubblici analoga a quella che abbiamo dato per i truismi :

Teorema 3 *Un evento E è conoscenza comune in* ω *se e solo se esiste un evento pubblico T che contiene* ω *e implica E :* $\omega \in T \subseteq E$.

Dim. La dimostrazione è del tutto analoga a quella dell'analoga proprietà per i truismi.

Teorema 4 *Un evento E è un evento pubblico se e solo se è un truismo per ogni individuo separatamente*

Dim. Se T è un truismo per ogni i, allora $T = K_i(T)$ per ogni $i \in I$ e dunque

$$T = \bigcap_{i \in I} K_i(T) = K_I(T).$$

Se viceversa T è un evento pubblico, allora

$$T = \bigcap_{i \in I} K_i(T) \subseteq K_i(T) \subseteq T$$

per ogni $i \in I$ e dunque $T = K_i(T)$ per ogni $i \in I$. Se $\mathbf{T}$ è l'insieme di tutti gli eventi pubblici, e $\mathbf{T}_i$ è l'insieme dei truismi del giocatore i, si ha

$$\mathbf{T} = \bigcap_{i \in I} \mathbf{T}_i$$

nel senso che $\mathbf{T}$ è la più fine tra tutte le topologie meno fini di tutte le $\mathbf{T}_i$.

Diamo ora una definizione equivalente alla precedente di conoscenza comune, in generale più semplice da verificare. Prima di tutto ricordiamo che date due partizioni H e K di Ω, si dice che H è più fine di K se per ogni $\omega \in \Omega$ si ha $h(\omega) \subseteq k(\omega)$

Definizione 5 *Data una collezione $\{H_i\}$ di partizioni su Ω si chiama "incontro" M di $\{H_i\}$ la più fine fra tutte le partizioni meno fini di ciascun H_i.*

La definizione si traduce nelle due seguenti proprietà:

a) Per ogni i e per ogni $\omega \in \Omega$ si ha $H_i(\omega) \subseteq M(\omega)$

b) Non esiste alcuna partizione *M'* con la proprietà a) e tale che per ogni $\omega \in \Omega$ $M'(\omega) \subseteq M(\omega)$ e per almeno un ω l'inclusione è stretta.

Si osserva facilmente che $\omega' \in M(\omega)$ se e solo se esiste una catena

$$\omega = \omega_0, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_m = \omega'$$

tale che per ogni $k \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$ esiste un giocatore $i(k)$ tale che $h_{i(k)}(\omega_k) = h_{i(k)}(\omega_{k+1})$. Cioè esiste una successione di stati da ω a ω' tali che due stati consecutivi sono nello stesso insieme di informazione di un giocatore.

Vale dunque la seguente caratterizzazione dovuta ad Aumann (1976, cfr):

Teorema 5 *Sia M l'incontro della collezione di partizioni $\{H_i\}$. Allora E è conoscenza comune in ω se e solo se $M(\omega) \subseteq E$.*

Dim. Dimostriamo che $M(\omega)$ è evento pubblico.

Si ha

$$K_I(M(\omega)) = \{\omega \;\; t.\ c.\ \bigcup_{i \in I} h_i(\omega) \subseteq M(\omega)\} = M(\omega)$$

perchè M è meno fine di ogni H_i . La parte "se" del teorema è quindi una ovvia conseguenza del teorema. Supponiamo ora che E sia conoscenza comune in ω. Dobbiamo mostrare che $M(\omega) \subseteq E$. Supponiamo per assurdo che ci sia un elemento $\omega' \in M(\omega)$ tale che $\omega' \notin E$. Poiché $\omega' \in M(\omega)$, esiste una successione k=0,...,m con stati della natura associati $\omega_0, ..., \omega_m$ e insiemi di informazione $h_{i(k)}, k = 0, 1, ..., m-1$ tali che $\omega_0 = \omega, \omega_m = \omega'$ e $\omega_k \in h_{i(k)}(\omega_{k+1})$. Poiché $\omega' \notin E$, il giocatore $i(m)$ non conosce E in alcun elemento di $h_{i(m)}(\omega')$ e dunque non lo conosce in ω_{m-1}. Per lo stesso motivo il giocatore $i(m-2)$ non sa se $i(m-1)$ conosce E in ω_{m-2} e, procedendo per induzione a ritroso, il giocatore $i(O)$ in ω non sa se il giocatore $i(1)$ sa se il giocatore $i(2)$ sa se......se il giocatore $i(m-1)$ conosce E . E dunque E non può essere conoscenza comune in ω.

7 Dimostrazione del teorema di Aumann

Riportiamo qui la dimostrazione del teorema di Aumann:

Teorema 6 *Sia $\omega \in \Omega$. Supponiamo che sia conoscenza comune in ω che la probabilità a posteriori di un evento E è q_i per il giocatore i e q_j per il giocatore j. Allora $q_i = q_j$.*

Dim. Se ω accade, la probabilità a posteriori di E per il giocatore i è $q_i = prob(E \mid h_i(\omega))$. Allora $M(\omega)$ è unione disgiunta di insiemi di informazione $Q_1, Q_2, ...Q_k$ del giocatore i e uno di questi Q_t è $h_i(\omega)$. Si ha :

$$q_i = prob(E \mid Q_t) \quad \forall t = 1, 2, ..., k.$$

Infatti, dire che q_i è conoscenza comune, vuol dire che

$$M(\omega) \subseteq \{x \in \Omega \ \ t.c. \ \ prob(E \mid h_i(x)) = q_i\}$$

e quindi $\forall t \ \ prob(E \mid Q_t) = q_i$. Si ha:

$$prob(M(\omega) \cap E) = prob(Q_1 \cap E) + ... + prob(Q_k \cap E) =$$

$$= prob(E \mid Q_1) \cdot prob(Q_1) + ... + prob(E \mid Q_k) \cdot prob(Q_k) =$$

$$= q_i(prob(Q_1) + ... + prob(Q_k)) = q_i \cdot prob(M(\omega_0)).$$

Dunque

$$q_i = prob(E \mid M(\omega)).$$

Esempio 2 *.Vediamo ora un esempio che mostra come le probabilità a posteriori dei giocatori possono essere diverse, nel caso in cui esse siano sì conosciute da entrambi i giocatori, ma non conoscenza comune. Sia*

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}.$$

con una distribuzione di probabilità uniforme Siano poi

$$H_1 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}$$

e

$$H_2 = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_4\}\}.$$

Supponiamo che sia il giocatore 1 che il giocatore 2 conoscano sia H_1 che H_2. Sia poi $\omega = \omega_1$ e $E = \{\omega_1, \omega_4\}$. si ha

$$q_1(E) = prob(E \mid \{\omega_1, \omega_2\}) = 1/2$$

e

$$q_2(E) = prob(E \mid \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = 1/3.$$

I due numeri q_1 *e* q_2 *sono noti, infatti: il giocatore 2 sa che il giocatore 1 ha l'informazione* $\{\omega_1, \omega_2\}$ *o* $\{\omega_3, \omega_4\}$ *e quindi sa* q_1*; da parte sua il giocatore 1 sa che 2 ha l'informazione* $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ *, quindi sa* q_2*. Ma* q_1 *e* q_2 *non sono conoscenza comune. Infatti 2, pur sapendo* q_1*, non può sapere cosa pensa il giocatore 1 di* q_2*. Infatti, poiché accade* ω_1*, il giocatore 2 osserva l'informazione* $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ *, quindi può pensare che il giocatore 1 abbia osservato* ω_3*, cioè* $\{\omega_3, \omega_4\}$*. Ma 2 sa che se 1 avesse visto* $\{\omega_3, \omega_4\}$ *non saprebbe se* q_2 *vale 1/3 o 1. Nel momento in cui il giocatore 2 sa che il giocatore 1 conosce* q_2*, viene a sapere anche che il giocatore 1 esclude che 2 abbia visto* ω_4*, quindi 2 sa che 1 sa che 2 ha visto* $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ *, cioè 2 sa che 1 sa che 2 non ha visto* ω_4 *e che quindi il valore* q_1 *non può dipendere dal fatto che 1 ha visto* $\{\omega_3, \omega_4\}$ *, quindi 2 esclude automaticamente anche* q_3 *e la sua* q_2 *diventa 1/2.*