1 Calcolo del valore Shapley per un infrastructure game

Vediamo qui, come indicato nel libro (pag. 220), alcuni calcoli relativi al valore Shapley i quali mostrano come tale allocazione dipenda da eventuali "duplicazioni" del numero dei giocatori.

Costi:
A: airport: 200; proporzionale: 5
B: airport: 300; proporzionale: 6

****
Caso con solo due giocatori: $N = \{A, B\}$

Costi per le coalizioni:
$c(A) = 205$, $c(B) = 306$
$c(AB) = 312$

permutazione	A	B
AB	205	107
BA	6	306
totale	211	413
valore Shapley	105.5	206.5

Otteniamo, come valore Shapley:

Per il treno di tipo A: 105.5
Per il treno di tipo B: 206.5

****
Caso con quattro giocatori: $N = \{A_1, A_2, B_1, B_2\}$

Costi per le coalizioni:
$c(A_1) = c(A_2) = 405$, $c(B_1) = c(B_2) = 606$
$c(A_1A_2) = 410$ $c(A_1B_1) = c(A_1B_2) = c(A_2B_1) = c(A_2B_2) = c(B_1B_2) = 612$
$c(A_1A_2B_1) = c(A_1A_2B_2) = c(A_1B_1B_2) = c(A_2B_1B_2) = 618$
$c(A_1A_2B_1B_2) = 624$

permutazione	A_1	A_2	B_1	B_2
$A_1A_2B_1B_2$	405	5	208	6
$A_1A_2B_2B_1$	405	5	6	208
$A_1B_1A_2B_2$	405	6	207	6
$A_1B_1B_2A_2$	405	6	207	6
$A_1B_2A_2B_1$	405	6	6	207
$A_1B_2B_1A_2$	405	6	6	207
$A_2A_1B_1B_2$	5	405	208	6
$A_2A_1B_2B_1$	5	405	6	208
$A_2B_1A_1B_2$	6	405	207	6
$A_2B_1B_2A_1$	6	405	207	6
$A_2B_2A_1B_1$	6	405	6	207
$A_2B_2B_1A_1$	6	405	6	207
$B_1A_2A_1B_2$	6	6	606	6
$B_1A_2B_2A_1$	6	6	606	6
$B_1A_1A_2B_2$	6	6	606	6
$B_1A_1B_2A_2$	6	6	606	6
$B_1B_2A_2A_1$	6	6	606	6
$B_1B_2A_1A_2$	6	6	606	6
$B_2A_2A_1B_1$	6	6	6	606
$B_2A_2B_1A_1$	6	6	6	606
$B_2A_1A_2B_1$	6	6	6	606
$B_2A_1B_1A_2$	6	6	6	606
$B_2B_1A_2A_1$	6	6	6	606
$B_2B_1A_1A_2$	6	6	6	606
totale	2536	2536	4952	4952
valore Shapley	105.667	105.667	206.333	206.333

Otteniamo, come valore Shapley:

Per ciascuno dei due treni di tipo A: 105.667
Per ciascuno dei due treni di tipo B: 206.333

Quindi, abbiamo le seguenti variazioni, passando da 2 a 4 treni:

Treni di tipo A: da 105.5 a 105.667
Treni di tipo B: da 206.5 a 206.333

E' interessante notare come NON si ottengano gli stessi valori. Come detto nel testo.
Chi si aspettava vatiazioni più significative, sarà rimasto deluso. Ma ribadisco

come la cosa sorprendente sia che non si ottiene lo stesso identico risultato. Che la variazione sia piccola, dipende solo dai numeri particolari che ho usato.

Possiamo modificare l'esempio per vedere un cambiamento un poco più cospicuo.

Costi:
A: airport: 200; proporzionale: 50
B: airport: 300; proporzionale: 60

****

Caso con solo due giocatori: $N = \{A, B\}$

Costi per le coalizioni:
$c(A) = 250$, $c(B) = 360$
$c(AB) = 420$

permutazione	A	B
AB	250	170
BA	60	360
totale	310	530
valore Shapley	155	265

Otteniamo, come valore Shapley:

Per il treno di tipo A: 155
Per il treno di tipo B: 265

****

Caso con quattro giocatori: $N = \{A_1, A_2, B_1, B_2\}$

Costi per le coalizioni:
$c(A_1) = c(A_2) = 450$, $c(B_1) = c(B_2) = 660$
$c(A_1A_2) = 500$ $c(A_1B_1) = c(A_1B_2) = c(A_2B_1) = c(A_2B_2) = c(B_1B_2) = 720$
$c(A_1A_2B_1) = c(A_1A_2B_2) = c(A_1B_1B_2) = c(A_2B_1B_2) = 780$
$c(A_1A_2B_1B_2) = 840$

permutazione	A_1	A_2	B_1	B_2
$A_1A_2B_1B_2$	450	50	280	60
$A_1A_2B_2B_1$	450	50	60	280
$A_1B_1A_2B_2$	450	60	270	60
$A_1B_1B_2A_2$	450	60	270	60
$A_1B_2A_2B_1$	450	60	60	270
$A_1B_2B_1A_2$	450	60	60	270
$A_2A_1B_1B_2$	50	450	280	60
$A_2A_1B_2B_1$	50	450	60	280
$A_2B_1A_1B_2$	60	450	270	60
$A_2B_1B_2A_1$	60	450	270	60
$A_2B_2A_1B_1$	60	450	60	270
$A_2B_2B_1A_1$	60	450	60	270
$B_1A_2A_1B_2$	60	60	660	60
$B_1A_2B_2A_1$	60	60	660	60
$B_1A_1A_2B_2$	60	60	660	60
$B_1A_1B_2A_2$	60	60	660	60
$B_1B_2A_2A_1$	60	60	660	60
$B_1B_2A_1A_2$	60	60	660	60
$B_2A_2A_1B_1$	60	60	60	660
$B_2A_2B_1A_1$	60	60	60	660
$B_2A_1A_2B_1$	60	60	60	660
$B_2A_1B_1A_2$	60	60	60	660
$B_2B_1A_2A_1$	60	60	60	660
$B_2B_1A_1A_2$	60	60	60	660
totale	3760	3760	6320	6320
valore Shapley	156.667	156.667	263.333	263.333

Otteniamo, come valore Shapley:

Per ciascuno dei due treni di tipo A: 156.667
Per ciascuno dei due treni di tipo B: 263.333

Quindi, si passa da:

Treni di tipo A: da 155 a 156.667
Treni di tipo B: da 265 a 263.333

Mentre prima il cambiamento era:
Treni di tipo A: da 105.5 a 105.667
Treni di tipo B: da 206.5 a 206.333

****
****
****

Se vogliamo vedere un effetto più significativo, azzeriamo la parte "airport game" e accentuiamo le differenza sulla parte "proporzionale"

Costi:
A: airport: 0; proporzionale: 50
B: airport: 0; proporzionale: 90

****

Caso con solo due giocatori: $N = \{A, B\}$

Costi per le coalizioni:
$c(A) = 50$, $c(B) = 90$
$c(AB) = 180$

permutazione	A	B
AB	50	130
BA	90	90
totale	140	220
valore Shapley	70	110

Otteniamo, come valore Shapley:

Per il treno di tipo A: 70
Per il treno di tipo B: 110

****

Costi:
A: airport: 0; proporzionale: 50
B: airport: 0; proporzionale: 90

Caso con quattro giocatori: $N = \{A_1, A_2, B_1, B_2\}$

Costi per le coalizioni:
$c(A_1) = c(A_2) = 50$, $c(B_1) = c(B_2) = 90$
$c(A_1A_2) = 100$ $c(A_1B_1) = c(A_1B_2) = c(A_2B_1) = c(A_2B_2) = c(B_1B_2) = 180$
$c(A_1A_2B_1) = c(A_1A_2B_2) = c(A_1B_1B_2) = c(A_2B_1B_2) = 270$
$c(A_1A_2B_1B_2) = 360$

permutazione	A_1	A_2	B_1	B_2
$A_1A_2B_1B_2$	50	50	170	90
$A_1A_2B_2B_1$	50	50	90	170
$A_1B_1A_2B_2$	50	90	130	90
$A_1B_1B_2A_2$	50	90	130	90
$A_1B_2A_2B_1$	50	90	90	130
$A_1B_2B_1A_2$	50	90	90	130
$A_2A_1B_1B_2$	50	50	170	90
$A_2A_1B_2B_1$	50	50	90	170
$A_2B_1A_1B_2$	90	50	130	90
$A_2B_1B_2A_1$	90	50	130	90
$A_2B_2A_1B_1$	90	50	90	130
$A_2B_2B_1A_1$	90	50	90	130
$B_1A_2A_1B_2$	90	90	90	90
$B_1A_2B_2A_1$	90	90	90	90
$B_1A_1A_2B_2$	90	90	90	90
$B_1A_1B_2A_2$	90	90	90	90
$B_1B_2A_2A_1$	90	90	90	90
$B_1B_2A_1A_2$	90	90	90	90
$B_2A_2A_1B_1$	90	90	90	90
$B_2A_2B_1A_1$	90	90	90	90
$B_2A_1A_2B_1$	90	90	90	90
$B_2A_1B_1A_2$	90	90	90	90
$B_2B_1A_2A_1$	90	90	90	90
$B_2B_1A_1A_2$	90	90	90	90
totale	1840	1840	2480	2480
valore Shapley	76.667	76.667	103.333	103.333

Otteniamo, come valore Shapley:

Per ciascuno dei due treni di tipo A: 76.667
Per ciascuno dei due treni di tipo B: 103.333

Quindi, si passa da:

Treni di tipo A: da 70 a 76.667
Treni di tipo B: da 110 a 103.333