Valore Shapley: dimostrazione

Appunti di
Fioravante PATRONE
http://www.diptem.unige.it/patrone/default.htm

versione del 21 maggio 2006

Ci riferiamo a quanto detto (anche come notazioni) nel capitolo 8 del libro, nelle pagine precedenti la pagina 201.

Ricordiamo che $\Phi : \mathcal{SG}(N) \to \mathbb{R}$ è dato dalla formula:

$$\Phi_i(v) = (\frac{1}{n!}) \sum_{\sigma} m_i^{\sigma}(v) \text{ per ogni } i \in N.$$

Che esso soddisfi i quattro assiomi 8.1 - 8.4 è agevole da verificare. L'anonimità è conseguenza del fatto che la formula tratta in modo simmetrico i giocatori. L'efficienza deriva dal fatto che, per ogni permutazione σ, $\sum_{\sigma} m_i^{\sigma}(v) = v(N)$. Per l'assioma 8.3, basta notare che, se i è un dummy player, allora $m_i^{\sigma}(v) = v(\{i\})$, per definizione di dummy player. Infine, per come sono definiti, è ovvio che $m_i^{\sigma}(v+w) = m_i^{\sigma}(v) + m_i^{\sigma}(w)$ e da qui segue l'additività.

Per provare il viceversa, cominciamo con l'osservare che gli assiomi 8.1 - 8.3 determinano univocamente il valore Shapley sulla classe dei giochi di unanimità. Un gioco di unanimità è così definito (per $\emptyset \neq T \subseteq N$):

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad T \subseteq S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La condizione di simmetria (conseguenza dell'assioma di anonimità 8.1) implica che $\Phi_i(u_T)$ può assumere solo due valori: uno (diciamo α) per $i \in T$ e uno (β) per $i \notin T$.

La condizione 8.3 (dummy player property) implica che $\beta = 0$. Infine, la 8.2 (efficienza) ci dice che, per $i \in T$, $\Phi_i(u_T) = 1/t$, dove t è il numero di elementi di T.

Quanto detto si generalizza immediatamente ai giochi del tipo u_T^{λ}, definiti così:

$$u_T^{\lambda}(S) = \begin{cases} \lambda & \text{se} \quad T \subseteq S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per questi giochi si ha, per $i \in T$, $\Phi_i(u_T^\lambda) = \lambda/t$, dove t è il numero di elementi di T (e $\Phi_i(u_T^\lambda) = 0$ per $i \notin T$).

Ora, si può dimostrare che l'insieme dei giochi di unanimità (unanimity games), al variare di T, fornisce una *base* per lo spazio vettoriale $\mathcal{G}(N)$.

Allora, dato un gioco $v \in \mathcal{G}(N)$, esso può essere scritto, in modo univoco, come combinazione lineare degli u_T. Cioè:

$$v = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T u_T \tag{1}$$

Da qui è immediato ricavare che Φ è univocamente determinata su $\mathcal{G}(N)$. Visto che a noi interessa Φ su $\mathcal{SG}(N)$, dobbiamo effettuare una piccola manipolazione.

Riscriviamo la precedente relazione così:

$$v - \sum_{T \in \mathrm{Neg}} \lambda_T u_T = \sum_{T \in \mathrm{Pos}} \lambda_T u_T \tag{2}$$

Dove "Pos" indica le coalizioni per le quali il coefficiente λ_T in (1) è maggiore o uguale a zero (e quindi "Neg" indica quelle coi coefficienti minori di zero).

Il gioco a destra in (2) sta in $\mathcal{SG}(N)$, in quanto somma di giochi $\lambda_T u_T$ che sono superadditivi (perché i coefficienti λ_T sono positivi), e quindi anche quello a sinistra. Allora possiamo applicare Φ ad entrambi i membri:

$$\Phi(v - \sum_{T \in \mathrm{Neg}} \lambda_T u_T) = \Phi(\sum_{T \in \mathrm{Pos}} \lambda_T u_T) \tag{3}$$

L'additività ci dà:

$$\Phi(v - \sum_{T \in \mathrm{Neg}} \lambda_T u_T) = \Phi(v + \sum_{T \in \mathrm{Neg}} (-\lambda_T u_T)) = \Phi(v) + \sum_{T \in \mathrm{Neg}} \Phi(-\lambda_T u_T) \tag{4}$$

e:

$$\Phi(\sum_{T \in \mathrm{Pos}} \lambda_T u_T) = \sum_{T \in \mathrm{Pos}} \Phi(\lambda_T u_T) \tag{5}$$

Quindi:

$$\Phi(v) + \sum_{T \in \mathrm{Neg}} \Phi(-\lambda_T u_T) = \sum_{T \in \mathrm{Pos}} \Phi(\lambda_T u_T) \tag{6}$$

e pertanto:

$$\Phi(v) = \sum_{T \in \mathrm{Pos}} \Phi(\lambda_T u_T) - \sum_{T \in \mathrm{Neg}} \Phi(-\lambda_T u_T) \tag{7}$$

Quindi Φ è univocamente determinato su ogni $v \in \mathcal{SG}(N)$.