Nash e minmax per giochi a somma zero

Appunti di
Fioravante PATRONE
http://www.diptem.unige.it/patrone/default.htm

versione del 21 maggio 2006

Ci riferiamo a quanto detto (anche come notazioni) nel capitolo 3 del libro, nelle pagine precedenti la pagina 67.

Sia $G = (X, Y, f)$ un gioco a somma zero.

Abbiamo visto che $\underline{v} \leq \bar{v}$.

Ci proponiamo di dimostrare che (per un gioco a somma zero) le seguenti due affermazioni sono equivalenti:

- (x_0, y_0) è un equilibrio di Nash
- $\underline{v} = \min_{y \in Y} f(x_0, y)$, $\bar{v} = \max_{x \in X} f(x, y_0)$ e $\underline{v} = \bar{v}$

Sia allora (x_0, y_0) un equilibrio di Nash per il gioco G. Come osservato nel libro, ciò è equivalente a dire che (x_0, y_0) è un punto di sella per f, ovvero:

$$f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y) \quad \text{per ogni } x \in X, y \in Y$$

Allora:

$$\max\{f(x, y_0) : x \in X\} \leq f(x_0, y_0) \leq \min\{f(x_0, y) : y \in Y\}$$

Ovviamente:

$$\bar{v} = \min\{\max\{f(x, y) : x \in X\} : y \in Y\} \leq \max\{f(x, y_0) : x \in X\}$$

Similmente:

$$\underline{v} = \max\{\min\{f(x, y) : y \in Y\} : x \in X\} \geq \min\{f(x_0, y) : y \in Y\}$$

Quindi:

$$\bar{v} = \min\{\max\{f(x, y) : x \in X\} : y \in Y\} \leq \max\{f(x, y_0) : x \in X\} \leq f(x_0, y_0) \leq$$

$$\leq \min\{f(x_0, y) : y \in Y\} \leq \max\{\min\{f(x, y) : y \in Y\} : x \in X\} = \underline{v}$$

Quindi, $\bar{v} \leq \underline{v}$. Essendo valida, in generale, la disuguaglianza opposta, ne segue che $\bar{v} = \underline{v}$.

Allora, nella catena di disuguaglianze che abbiamo scritto sopra abbiamo in realtà tutte uguaglianze. Ne segue che: $\bar{v} = \max\{f(x, y_0) : x \in X\}$ e che $\min\{f(x_0, y) : y \in Y\} = \underline{v}$

Proviamo ora il viceversa. Per ipotesi, abbiamo che: $\underline{v} = \min\{f(x_0, y) : y \in Y\}$ e $\bar{v} = \max\{f(x, y_0) : x \in X\}$.

Per definizione di massimo e di minimo si ha: $\min\{f(x_0, y) : y \in Y\} \leq f(x_0, y_0) \leq \max\{f(x, y_0) : x \in X\}$.

Allora:

$$\underline{v} = \min\{f(x_0, y) : y \in Y\} \leq f(x_0, y_0) \leq \max\{f(x, y_0) : x \in X\} = \bar{v}$$

Ma $\bar{v} = \underline{v}$. Quindi:

$$f(x_0, y_0) = \min\{f(x_0, y) : y \in Y\}$$

e quindi:

$$f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y) \quad \text{per ogni } y \in Y$$

Analogamente:

$$f(x_0, y_0) = \max\{f(x, y_0) : x \in X\}$$

e quindi:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y_0) \quad \text{per ogni } x \in X$$

Pertanto:

$$f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y) \quad \text{per ogni } x \in X, y \in Y$$

Quindi (x_0, y_0) è un punto di sella per f e quindi è un equilibrio di Nash per G.