

# Nash, Berge e Kakutani: versione junior

Note di

Federico ASCHIERI

e

Fioravante PATRONE

Decisori (razionali) interagenti

versione dell'11 gennaio 2008

## Indice

1	Multiapplicazioni reali di variabile reale	2
2	Dimostrazione del teorema di esistenza per equilibri di Nash	7
3	Bibliografia	14

Federico Aschieri  
Università degli studi di Torino  
Dipartimento di Informatica <http://www.di.unito.it>  
Corso Svizzera, 185  
10149 Torino - ITALY  
aschieri@di.unito.it

Link vari:

Fioravante PATRONE

ASD Scuderia La Bellaria

Decisori (razionali) interagenti

Equazioni differenziali e urang-utang©

E-mail: [patrone@diptem.unige.it](mailto:patrone@diptem.unige.it)

# 1 Multiapplicazioni reali di variabile reale

**Definizione 1** *Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , diciamo multiapplicazione da  $A$  in  $B$  una legge che ad ogni elemento di  $A$  associa un sottoinsieme di  $B$ .*

Una multiapplicazione sarà indicata così:  $F : A \rightrightarrows B$

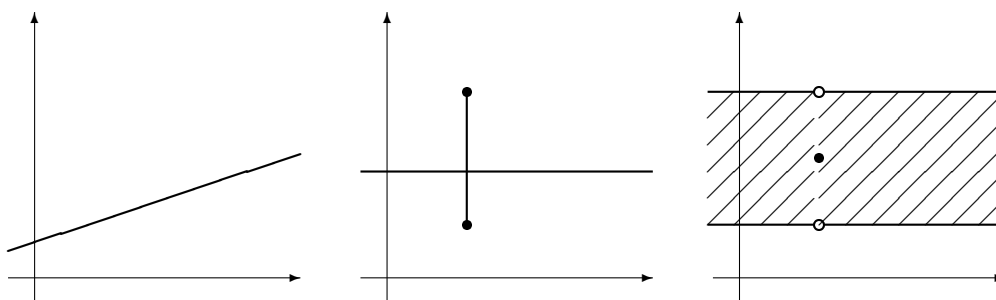
Si noti che una multiapplicazione da  $A$  in  $B$  non è altro che una funzione da  $A$  a  $\mathcal{P}(B)$  ( $\mathcal{P}(B)$  è l'insieme delle parti di  $B$ , ovvero l'insieme di tutti i sottoinsiemi di  $B$ ). Potremmo indicare con  $\hat{F} : A \rightarrow \mathcal{P}(B)$  questa funzione associata alla multiapplicazione  $F$ ; tuttavia, ci farà comodo (per descriverne più agevolmente, ad esempio, le sue proprietà topologiche) “vedere” una multiapplicazione come una funzione “a più valori” che assume valori in  $B$ . Si può osservare comunque che  $F$  individua univocamente  $\hat{F}$  e viceversa. Quindi, se necessario, non c'è alcun problema a passare da una formulazione ad un'altra.

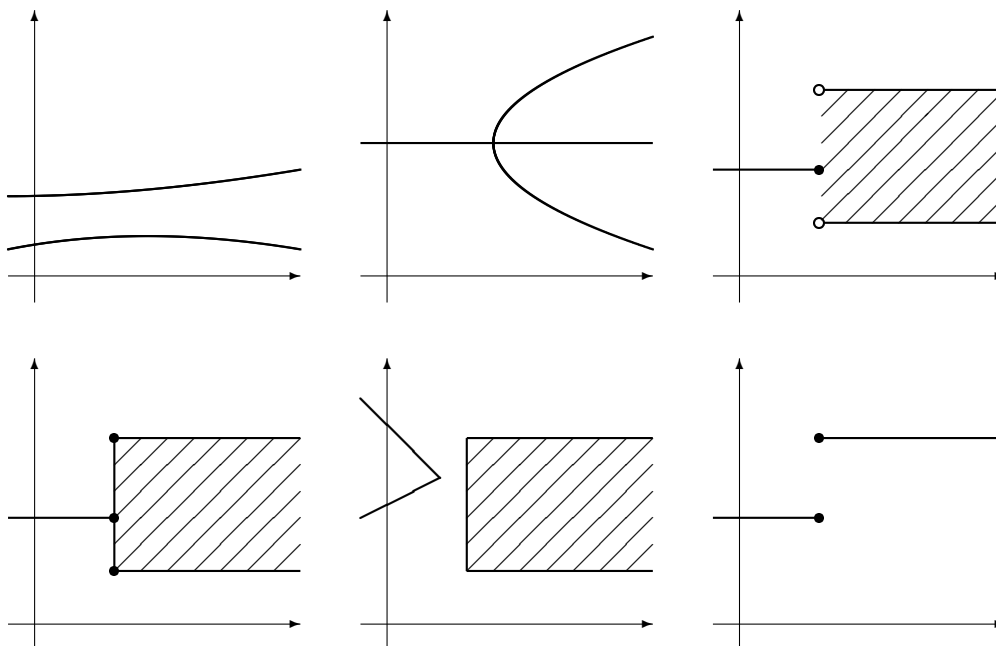
Si noti che, per come è stata definita una multiapplicazione, essa potrebbe anche assumere valori vuoti. Cioè, potrebbe essere  $F(a) = \emptyset$ , per taluni  $a \in A$ . Se vogliamo escludere questa situazione, diremo che  $F$  è una multiapplicazione a valori non vuoti, o che è una *corrispondenza* da  $A$  a  $B$  (adeguandoci ad una terminologia prevalente, pur se non completamente unificata).

Ovviamente  $\hat{F}$  ha un grafico come tutte le funzioni, solo che è difficile da visualizzare. Meglio occuparsi del grafico “ridotto” di  $F$ . Usiamo il termine *grafico ridotto* per rimarcare che *non* è un grafico di una funzione nel senso usuale del termine (e, più specificamente, che non è il grafico di  $\hat{F}$ ).

$$\text{gph}(F) = \{ (a, b) \in A \times B : b \in F(a) \}$$

I disegni seguenti mostrano vari esempi di multiapplicazioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ . Si noti che sono disegnati i loro grafici “ridotti”.





Si noti che tutti gli esempi precedenti, escluso il penultimo, sono esempi di *corrispondenze*.

Passiamo ora ad occuparci del caso particolare cui sono dedicate queste note.

Considereremo  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  compatti<sup>1</sup>, convessi<sup>2</sup> e non vuoti<sup>3</sup>. Considereremo una multiapplicazione  $h : A \rightrightarrows B$  con grafico ridotto chiuso ed a valori non vuoti e convessi.

Dicendo che il grafico ridotto è chiuso non intendiamo null'altro che esso è un sottoinsieme chiuso di  $A \times B$  (o, equivalentemente, di  $\mathbb{R}^2$ , visto che  $A$  e  $B$  sono chiusi di  $\mathbb{R}$ ).

**Osservazione 1** Per ogni  $a \in A$ ,  $h(a)$  è un sottoinsieme compatto di  $\mathbb{R}$ .

<sup>1</sup>Un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}^k$  si dice compatto se ogni successione  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  t.c.  $x_n \in E$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , ha una sottosuccessione convergente ad un elemento di  $E$ .

<sup>2</sup>Un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}^k$  è convesso se:

$$\text{per ogni } a, b \in E \text{ e per ogni } \lambda \in [0, 1] : \lambda a + (1 - \lambda)b \in E.$$

Detto altrimenti, se  $a, b \in E$ , allora tutto il segmento che li congiunge è contenuto in  $E$ .

<sup>3</sup>I convessi di  $\mathbb{R}$  sono gli intervalli di  $\mathbb{R}$ . La condizione di compattezza ci garantisce che si tratta di intervalli chiusi e limitati. Quindi i sottoinsiemi  $E$  di  $\mathbb{R}$  compatti, convessi e non vuoti sono intervalli del tipo  $[a, b]$ , con  $a \leq b$ .

Per chi “sa di topologia”, è sufficiente osservare che  $h(a)$  è (omeomorfo a):  $(\{a\} \times B) \cap \text{gph}(h)$ , che è chiuso in quanto intersezione di chiusi. Essendo un sottoinsieme chiuso<sup>4</sup> di un insieme compatto, è esso stesso compatto. Comunque, è facile dimostrare questa affermazione senza far riferimento a “sostituzionalità” topologiche. Basta osservare che, presa una successione  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tale che  $x_n \in h(a)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , essa avrà una sottosuccessione estratta convergente ad un elemento di  $B$ , visto che  $h(a) \subseteq B$  e  $B$  è compatto. Il limite di questa successione apparterrà ad  $h(a)$ , visto che  $h(a)$  è chiuso per ipotesi: da qui la compattezza di  $h(a)$ .

**Osservazione 2** Poiché  $h(a)$  è un sottoinsieme compatto di  $\mathbb{R}$ , ha massimo. Cioè esiste un elemento  $b \in h(a)$  t.c.  $b \geq b'$  per ogni  $b' \in h(a)$ .

Il risultato chiave di queste note è il seguente:

**Teorema 1 (Teorema dei valori intermedi)** Siano  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  compatti, convessi e non vuoti. E sia  $h : A \rightrightarrows B$  con grafico ridotto chiuso ed a valori non vuoti e convessi. Dati  $a', a'' \in A$ , con  $a' < a''$ , siano  $b' \in h(a')$  e  $b'' \in h(a'')$ , con  $b' < b''$ . Allora, per ogni  $b \in B$  t.c.  $b' < b < b''$ , esiste  $a \in [a', a'']$  t.c.  $b \in h(a)$ .

**Dimostrazione.** Sia  $I = \{t \in [a', a''] : \max h(t) < b\}$  e sia  $x = \sup I$ . Ovviamente ( $I$  è non vuoto!)  $\sup I \leq a''$ .

Distinguiamo due casi:

1.  $x \in I$  (ovverossia, il sup è un max).

In questo caso,  $x < a''$ . Non solo, per  $s > x$ , è  $\max h(s) \geq b$ . Quindi possiamo prendere una successione  $s_n$ , convergente a  $x$ , con  $s_n > x$  per ogni  $n$ , per la quale si avrà quindi  $\max h(s_n) \geq b$ .

Ma la successione di numeri reali  $\max h(s_n)$  sta in un compatto (l'insieme  $B$ ) e pertanto ammette una sottosuccessione estratta  $\max h(s_{k_n})$  che converge a un elemento di  $B$ , che chiameremo  $b^+$ .

Poiché  $h$  ha grafico ridotto chiuso, possiamo concludere che  $b^+ \in h(x)$  (è  $s_{k_n} \rightarrow x$ ,  $\max h(s_{k_n}) \in h(s_{k_n})$  per ogni  $n$ , e  $\max h(s_{k_n}) \rightarrow b^+$ ).

Essendo inoltre  $\max h(s_n) \geq b$ , ne segue  $b^+ \geq b$ . Visto che  $b^+ \in h(x)$ , ne segue che  $\max h(x) \geq b^+$ . Pertanto  $\max h(x) \geq b$ , il che è in contraddizione con l'ipotesi che stiamo considerando in questo caso.

<sup>4</sup>Un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}^k$  si dice chiuso se per ogni successione  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $E$  che converge in  $\mathbb{R}^k$  il suo limite appartiene ad  $E$ . In “formule”:

$$x_n \in E \text{ per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ e } x_n \rightarrow \bar{x} \in \mathbb{R}^k \text{ implica } \bar{x} \in E.$$

2.  $x \notin I$  (ovverossia, il sup non è un max).

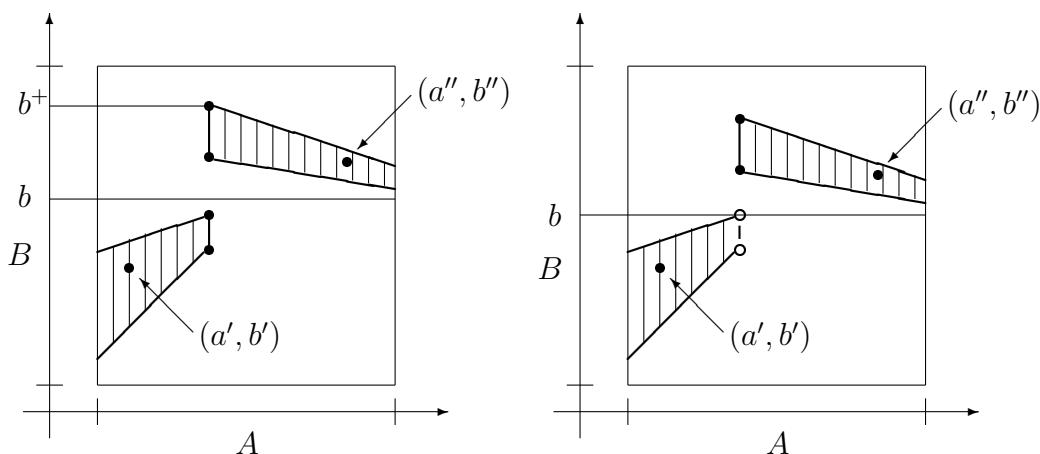
In questo caso<sup>5</sup>, esiste  $s_n \rightarrow x$ , strettamente crescente, t.c.  $\max h(s_n) < b$ .

Con un discorso analogo a quello visto nell'alto caso, possiamo estrarre una sottosuccessione convergente da  $\max h(s_n)$ , il cui limite, indicato con  $b^-$ , per il teorema sulla permanenza del segno, soddisferà la condizione  $b^- \leq b$ , essendo  $\max h(s_n) < b$ .

D'altronde, visto che stiamo assumendo che  $x \notin I$ , sarà  $\max h(x) \geq b$ .

Ma allora ad  $h(x)$  appartengono sia  $b^-$ , che è minore o uguale di  $b$ , che  $\max h(x)$ , che è maggiore o uguale a  $b$ . Ma  $h(x)$  è un insieme convesso e quindi, se contiene due elementi, contiene tutti quelli fra loro compresi. Essendo:  $b^- \leq b \leq \max h(x)$ , ne segue che  $b \in h(x)$ . ■

Queste due figure dovrebbero servire a "illustrare" la dimostrazione. Quella a sinistra riguarda il caso 1, quella a destra il caso 2. Si noti che nella figura a sinistra la corrispondenza non è a valori convessi, mentre in quella a destra non ha il grafico ridotto chiuso, così da illustrare l'importanza di queste ipotesi.



**Osservazione 3** Che  $h$  sia a valori convessi è essenziale per la validità di questa proposizione. Basta considerare  $h : [0, 1] \rightrightarrows [0, 1]$ , definita così:  $h(a) = \{0, 1\}$  per ogni  $a \in [0, 1]$ .

**Osservazione 4** Notiamo che il teorema precedente è una generalizzazione del teorema dei valori intermedi alle corrispondenze. Non a caso: la versione

<sup>5</sup>Si noti che un insieme il cui "sup" non è "max" è un insieme necessariamente infinito.

“junior” del teorema di punto fisso di Brouwer, ovvero la sua dimostrazione nel caso unidimensionale, come è noto si ottiene come semplice corollario del teorema dei valori intermedi. Volendo ottenere una versione “junior” del teorema di punto fisso di Kakutani, non c’è quindi da stupirsi se abbiamo fatto in modo di procurarci il teorema dei valori intermedi appropriato.

**Osservazione 5** Nel “tradizionale” teorema dei valori intermedi, cioè quello che vale per funzioni, le condizioni essenziali sono la continuità della funzione ed il fatto che sia definita su un intervallo. Non c’è nessuna condizione di compattezza. Va però osservato che l’ipotesi fatta sulla corrispondenza  $h$ , di avere il grafico ridotto chiuso, in generale non garantisce la continuità di  $h$ , qualora  $h$  sia una funzione. Basta prendere la funzione:

$$h(x) = \begin{cases} 1/x & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il grafico di  $h$  è un sottoinsieme chiuso di  $\mathbb{R}^2$ , ma  $h$  non è una funzione continua. Si noti che l’immagine di  $h$  è tutto  $\mathbb{R}$  e quindi non è un insieme compatto.

**Osservazione 6** Nella dimostrazione abbiamo fatto uso della funzione  $a \mapsto \max h(a)$ . Uno potrebbe chiedersi se non fosse possibile applicare il solito teorema dei valori intermedi a questa funzione. La risposta è negativa, ed è dovuta al fatto che questa funzione potrebbe non essere continua. Per convincersene, basta vedere il secondo, settimo e nono dei disegni forniti come esempi di multiapplicazioni. Si tratta di disegni che descrivono corrispondenze a grafico chiuso (nel secondo e settimo sono anche a valori convessi, mentre nel nono no).

Il fatto di aver ristretto le nostre considerazioni al caso in cui  $B$  sia un compatto, ci permette di lavorare con il concetto semplice di corrispondenza a grafico chiuso, senza doverci preoccupare di fare una analisi dettagliata di come si possa estendere l’idea di continuità dalle funzioni alle multiapplicazioni. Chi sia interessato, è caldamente consigliato di consultare Klein e Thompson (1984), in particolare il capitolo 7. Il teorema 7.1.16 è la chiave per comprendere l’utilità di restringersi al caso in cui il codominio della corrispondenza sia compatto. Il teorema 7.4.4 è la versione “da adulti” del nostro teorema dei valori intermedi, così come il teorema 7.3.11 corrisponde (esclusi gli aspetti di convessità) alla nostra proposizione 3, che vedremo nella prossima sezione.

Come già anticipato nella Osservazione 4, vediamo ora di provare una versione “junior” del teorema di punto fisso di Kakutani per le multiapplicazioni reali di una variabile reale, deducendolo dal teorema dei valori intermedi.

**Corollario 1 (Teorema di punto fisso)** *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$  compatto, convesso e non vuoto. E sia  $h : A \rightrightarrows A$  con grafico ridotto chiuso ed a valori non vuoti e convessi. Allora  $h$  ha punto fisso, cioè esiste  $\bar{x} \in A$  t.c.  $\bar{x} \in h(\bar{x})$ .*

**Dimostrazione** Come si fa nella tradizionale versione “junior” del teorema di punto fisso, basta applicare il teorema dei valori intermedi a  $g(x) = h(x) - x$ .

Notare che  $h$  è una corrispondenza, mentre  $x \mapsto x$  è una funzione. Quindi, se avessimo voluto scrivere le cose in modo corretto, avremmo dovuto scrivere:  $g(x) = \{z \in \mathbb{R} : \text{esiste } y \in h(x) \text{ per cui } z = y - x\}$ .

E’ lasciato al lettore verificare che la funzione  $g$  soddisfa le ipotesi del teorema dei valori intermedi.

Come già notato,  $A = [a, b]$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a \leq b$ . Se fosse  $a \in h(a)$ , o  $b \in h(b)$ , avremmo già la tesi.

Supponiamo allora che  $a \notin h(a)$ . Visto che  $h(a) \subseteq [a, b]$  e che  $h(a)$  è non vuoto, deve esserci  $a' \in h(a)$  con  $a' > a$ . Ma allora questo vuol dire che in  $g(a)$  c’è un elemento  $(a' - a)$  il quale è maggiore strettamente di 0.

In modo speculare deduciamo che in  $g(b)$  c’è un elemento che è minore strettamente di zero.

Ma allora, per il teorema dei valori intermedi, c’è un elemento  $\bar{x} \in [a, b]$  t.c.  $0 \in g(\bar{x})$ . “Tradotto” in termini della corrispondenza  $h$ , ciò significa che  $\bar{x} \in h(\bar{x})$ . ■

## 2 Dimostrazione del teorema di esistenza per equilibri di Nash

Ci proponiamo qui di dimostrare il teorema di Nash in versione ridotta, usando gli strumenti approntati nella sezione precedente. Daremo qui per scontato che uno sappia qualcosa di giochi non cooperativi e di equilibrio di Nash (ivi compresa l’idea di “multiapplicazione di miglior risposta”, che denoteremo con  $R_I$  e con  $R_{II}$  a seconda che la “miglior risposta” di cui si parla sia del giocatore  $I$  oppure  $II$ ). Una documentazione di immediata reperibilità sono gli appunti, disponibili in rete: **Nash, Berge e Kakutani e Beve introduzione alla teoria dei giochi** (URL e dettagli alla fine di queste note). Meglio ancora un libro introduttivo alla TdG: chissà perché il primo che ci passa per la mente è Patrone (2006).

La versione che qui dimostriamo è la seguente:

**Teorema 2 (Nash junior)** *Siano  $X, Y \subseteq \mathbb{R}$  compatti, convessi e non vuoti. Siano  $f, g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ , continue e tali che:*

- per ogni  $\hat{y} \in Y$ ,  $x \mapsto f(x, \hat{y})$  è concava,
- per ogni  $\hat{x} \in X$ ,  $y \mapsto g(\hat{x}, y)$  è concava<sup>6</sup>.

Allora, il gioco  $(X, Y, f, g)$  ha (almeno) un equilibrio di Nash.

Nella dimostrazione del teorema di Nash per un gioco in forma strategica  $(X, Y, f, g)$  si prova che la multiapplicazione di miglior risposta  $R : X \times Y \rightrightarrows X \times Y$  soddisfa le ipotesi del teorema di Kakutani come conseguenza pressoché immediata del fatto che  $R_I$  ed  $R_{II}$  soddisfano lo stesso tipo di ipotesi. In particolare, che sono corrispondenze a grafico ridotto chiuso e che sono a valori non vuoti, chiusi e convessi. Cosa che possiamo dimostrare nel nostro contesto senza alcuna difficoltà.

**Proposizione 1** *Nelle ipotesi del teorema 2, le corrispondenze  $R_I$  ed  $R_{II}$  sono a grafico ridotto chiuso e che sono a valori non vuoti, chiusi e convessi.*

**Dimostrazione.** La vediamo per  $R_I : Y \rightrightarrows X$ . Intanto precisiamo la definizione:  $R_I(\hat{y}) = \{\hat{x} \in X \text{ t.c. } f(\hat{x}, \hat{y}) \geq f(x, \hat{y}) \text{ per ogni } x \in X\}$ . Ovvero,  $R_I(\hat{y})$  è l'insieme dei punti di massimo della funzione  $x \mapsto f(x, \hat{y})$ . Allora, che  $R_I$  sia a valori non vuoti è garantito dal teorema di Weierstrass.

Che sia a valori convessi è conseguenza immediata della ipotesi di concavità fatta sulla funzione  $x \mapsto f(x, \hat{y})$ , per ogni  $\hat{y} \in Y$ . In poche parole, siano  $x_1, x_2 \in R_I(y)$ . Si ha:

$$\begin{aligned} f(x_1, y) &\geq f(x, y) \text{ per ogni } x \in X, \\ f(x_2, y) &\geq f(x, y) \text{ per ogni } x \in X. \end{aligned}$$

La concavità di  $x \mapsto f(x, y)$  ci garantisce che:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, y) \geq \lambda f(x_1, y) + (1 - \lambda)f(x_2, y) \text{ per ogni } \lambda \in [0, 1],$$

per cui:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, y) \geq f(x, y) \text{ per ogni } x \in X.$$

Pertanto, anche  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in R_I(y)$ .

Per provare che  $R_I$  ha grafico ridotto chiuso, sia:  $y_n \rightarrow \bar{y}$ ,  $x_n \rightarrow \bar{x}$ ,  $x_n \in R_I(y_n)$ . Dobbiamo provare che  $\bar{x} \in R_I(\bar{y})$ . Cioè che:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \text{ per ogni } x \in X.$$

Ma  $x_n \in R_I(y_n)$  ci dice che:

$$f(x_n, y_n) \geq f(x, y_n) \text{ per ogni } x \in X.$$

Passando al limite per  $n \rightarrow \infty$ , tenendo conto della continuità di  $f$ , essendo  $x_n \rightarrow \bar{x}$  e  $y_n \rightarrow \bar{y}$ , otteniamo appunto:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \text{ per ogni } x \in X. \quad \blacksquare$$

---

<sup>6</sup>La ipotesi di concavità può essere sostituita con quella di quasi-concavità. Per i dettagli, vedasi le già citate note disponibili *online*: Nash, Berge e Kakutani.



Nel contesto in cui ci siamo posti non è opportuno seguire la strada che utilizza la corrispondenza  $R$ , in quanto ci porterebbe a lavorare su una corrispondenza da un sottoinsieme (di  $X \times Y$  e quindi) di  $\mathbb{R}^2$  in se stesso, e quindi non potremmo utilizzare i risultati precedenti, validi per multiapplicazioni definite da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ .

Possiamo, però, utilizzare un altro itinerario. Ovvero, considerare la *composizione* di  $R_{II}$  con  $R_I$ . Premettiamo la definizione di composizione per multiapplicazioni.

**Definizione 2** *Date due multiapplicazioni,  $h : A \rightrightarrows B$  e  $k : B \rightrightarrows C$ , la multiapplicazione  $k \circ h : A \rightrightarrows C$  è così definita:*

$$(k \circ h)(a) = \bigcup_{b \in h(a)} k(b)$$

*Altra notazione usata per esprimere  $(k \circ h)(a)$  è  $k(h(a))$ .*

Si può notare che, se  $h$  e  $k$  sono a valori *singleton* e quindi sono, di fatto, delle funzioni,  $k \circ h$  può essere identificata con la solita funzione composta di  $h$  e  $k$ .

Tornando al discorso principale, notiamo che è conseguenza immediata della definizione di equilibrio di Nash provare che, se  $(\bar{x}, \bar{y})$  è un equilibrio di Nash, allora:

$$\bar{x} \in (R_I \circ R_{II})(\bar{x}) \quad \text{e} \quad \bar{y} \in (R_{II} \circ R_I)(\bar{y}) \quad (1)$$

Non vale, però, il viceversa. Se abbiamo una coppia  $(\bar{x}, \bar{y})$  che soddisfa le condizioni (1), non è detto che sia un equilibrio di Nash. La ragione è che, in (1),  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  sono slegate fra loro. Pertanto, (1) rappresenta solo una *condizione necessaria*.

Per nostra fortuna (?), tuttavia le condizioni in (1) contengono dentro di sé la condizione di equilibrio. Infatti, dire che  $\bar{x} \in (R_I \circ R_{II})(\bar{x})$ , vuol dire che esiste  $\bar{y} \in R_{II}(\bar{x})$  t.c.  $\bar{x} \in R_I(\bar{y})$ . Ma è noto, e comunque di immediata verifica, che:

$$(\bar{x}, \bar{y}) \text{ è un equilibrio di Nash se e solo se } \bar{x} \in R_I(\bar{y}) \quad \text{e} \quad \bar{y} \in R_{II}(\bar{x}) \quad (2)$$

Grazie a questa osservazione, possiamo utilizzare quanto stabilito nel paragrafo precedente. Ovvero, sarà sufficiente provare che  $R_I \circ R_{II}$  soddisfa le ipotesi del Corollario provato nella sezione precedente.

A tal fine, ci serviremo di un paio di risultati tecnici, *chiave*.

**Proposizione 2** *Siano  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  compatti, convessi e non vuoti. E sia  $h : A \rightrightarrows B$ , con grafico ridotto chiuso ed a valori non vuoti e convessi. Allora  $h(A) := \cup_{a \in A} h(a)$  è compatto e convesso.*

**Dimostrazione** Consideriamo una successione  $b_n$  in  $h(A)$ . Ovviamente  $b_n = h(a_n)$ , con  $a_n \in A$ .

Per la compattezza di  $A$ , ci sarà una sottosuccessione  $a_{k_n}$  di  $a_n$ , convergente ad  $a \in A$ .

Per la compattezza di  $B$ , possiamo estrarre una ulteriore sottosuccessione  $b_{j_{k_n}}$  di  $b_{k_n}$ , convergente a un qualche  $b \in B$ .

Ma allora abbiamo:  $a_{j_{k_n}} \rightarrow a$ ,  $b_{j_{k_n}} \rightarrow b$ ,  $(a_{j_{k_n}}, b_{j_{k_n}}) \in \text{gph}(h)$ . Poiché per ipotesi  $\text{gph}(h)$  è chiuso, abbiamo che  $(a, b) \in \text{gph}(h)$ , e quindi  $b \in h(a)$ , da cui  $b \in h(A)$ . Questo prova la compattezza di  $B$ .

Quanto alla convessità di  $h(A)$ , è un'ovvia conseguenza del teorema dei valori intermedi. Vediamo. Siano  $b', b'' \in h(A)$ . Dobbiamo provare che  $\lambda b' + (1 - \lambda)b'' \in h(A)$  per ogni  $\lambda \in [0, 1]$ .

Naturalmente ci saranno  $a'$  e  $a''$  in  $A$  t.c.  $b' \in h(a')$  e  $b'' \in h(a'')$ . Se  $a' = a''$ , che  $\lambda b' + (1 - \lambda)b'' \in h(a)$  è garantito dal fatto che  $h$  è a valori convessi, e quindi, a maggior ragione, sarà  $\lambda b' + (1 - \lambda)b'' \in h(A)$ .

Se  $a' \neq a''$ , possiamo supporre (senza ledere la generalità) che sia  $a' < a''$ . Allora, basta applicare a  $b = \lambda b' + (1 - \lambda)b''$  il teorema dei valori intermedi per poter dedurre che c'è  $a \in A$  t.c.  $b \in h(a)$ , da cui  $b \in h(A)$ . ■

**Osservazione 7** *La convessità di  $h(A)$  non è scontata! La composizione di multiapplicazioni l'abbiamo definita mediante una operazione (insiemistica) di unione. Ma la unione di convessi non è detto che sia un convesso.*

Passiamo ora finalmente alla dimostrazione del secondo importante fatto che ci permetterà poi di concludere agevolmente.

**Proposizione 3** *Siano  $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$  compatti, convessi e non vuoti. E siano  $h : A \rightrightarrows B$ ,  $k : B \rightrightarrows C$  con grafico ridotto chiuso ed a valori non vuoti e convessi. Allora  $k \circ h : A \rightrightarrows C$  è a grafico ridotto chiuso e a valori convessi.*

**Dimostrazione** Osserviamo, preliminarmente, che  $f = k \circ h$  è a valori convessi. In effetti,  $f(a) = \cup_{b \in h(a)} k(b) = k(h(a))$ , quindi (grazie alla proposizione precedente) è convesso in quanto immagine, mediante  $k$ , del convesso  $h(a)$ .

Ci resta allora solo da dimostrare che è a grafico ridotto chiuso.

Sia allora  $a_n \rightarrow a$  e  $c_n \rightarrow c$ , con  $c_n \in (k \circ h)(a_n)$ .

Se  $c_n \in (k \circ h)(a_n)$ , allora esiste  $b_n \in h(a_n)$  t.c.  $c_n \in k(b_n)$ .

Essendo in un compatto, da  $b_n$  possiamo estrarre una sottosuccessione  $b_{k_n}$  convergente a un elemento  $b$  il quale appartiene a  $h(a)$  (perché  $h$  è a grafico ridotto chiuso).

Inoltre, essendo  $b_{k_n} \rightarrow b$ ,  $c_{k_n} \rightarrow c$  e  $c_{k_n} \in k(b_{k_n})$ , possiamo concludere che  $c \in k(b)$ , poiché  $k$  è a grafico chiuso.

Abbiamo quindi  $c \in k(b)$ , con  $b \in h(a)$ : pertanto,  $c \in (k \circ h)(a)$ . ■

Vediamo di rappresentare graficamente il risultato ottenuto in due casi: la “battaglia dei sessi” e il “dilemma del prigioniero”.

Per ciascuno dei giochi citati rappresentiamo in figura:

- i grafici ridotti delle due corrispondenze di miglior risposta (linea unita per  $I$ , tratteggiata per  $II$ );
- il grafico ridotto della corrispondenza  $R_{II} \circ R_I$ ;
- il grafico ridotto della corrispondenza  $R_I \circ R_{II}$ .

I giochi considerati sono, come detto:

la *battaglia dei sessi*:

$I \backslash II$	L	R
T	(2, 1)	(0, 0)
B	(0, 0)	(1, 2)

il *dilemma del prigioniero*:

$I \backslash II$	L	R
T	(3, 3)	(1, 4)
B	(4, 1)	(2, 2)

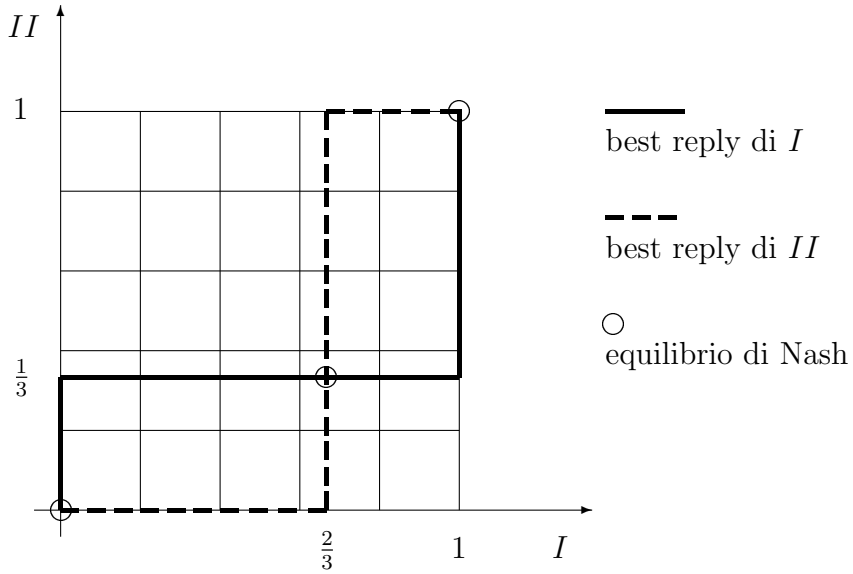


Figura 1: Battaglia dei sessi: i grafici di  $R_I$  ed  $R_{II}$  e gli equilibri di Nash

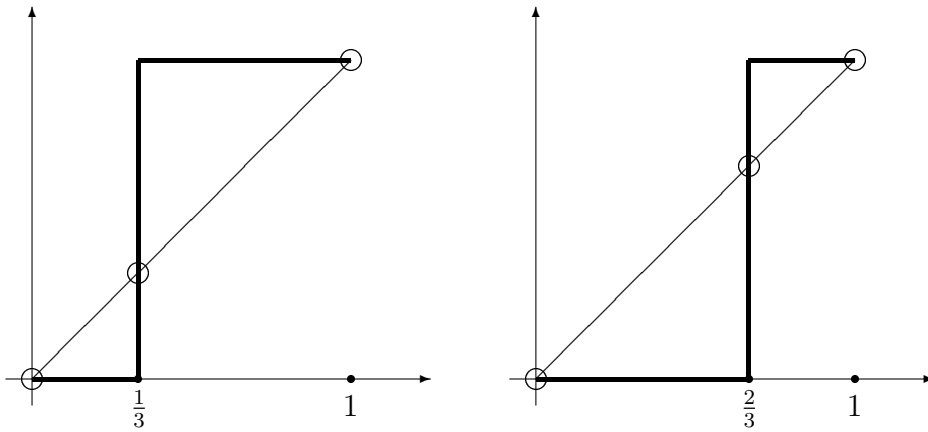


Figura 2: Battaglia dei sessi. A sinistra il grafico di  $R_I \circ R_{II}$  e a destra di  $R_{II} \circ R_I$ . Evidenziati i punti fissi.

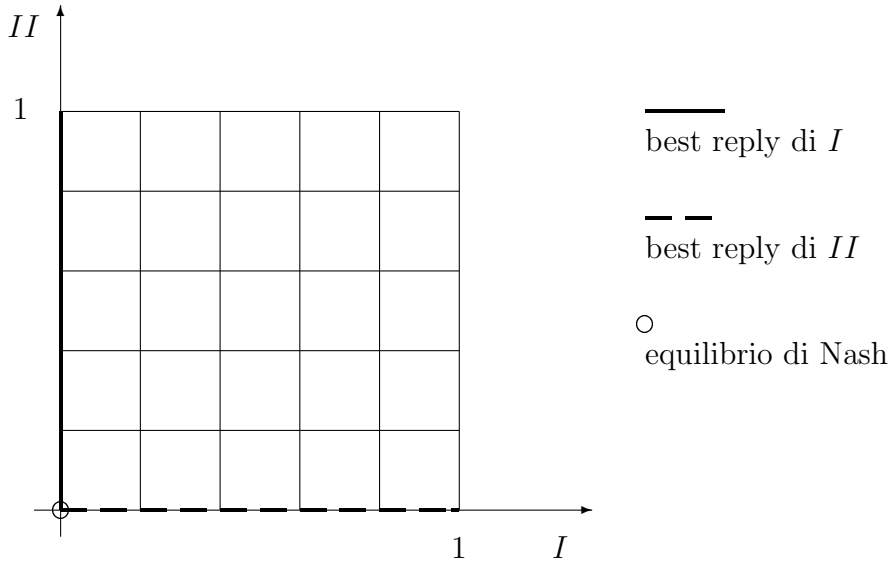


Figura 3: Dilemma del prigioniero: i grafici di  $R_I$  ed  $R_{II}$  e l'equilibrio di Nash

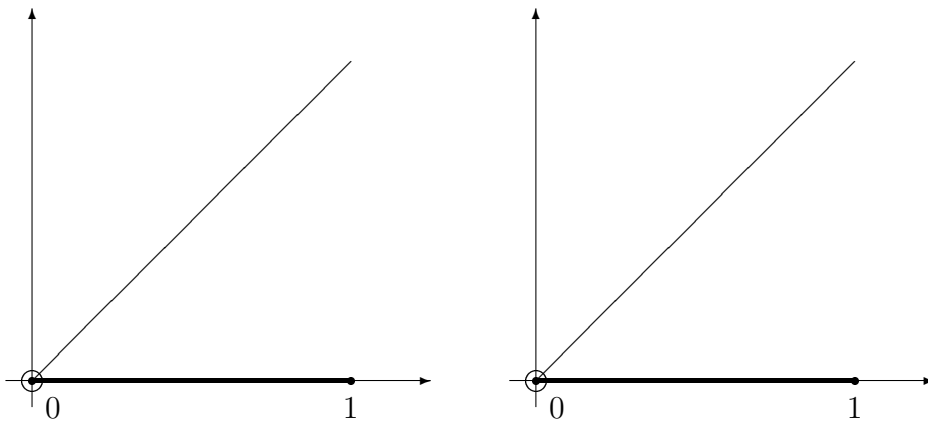


Figura 4: Dilemma del prigioniero. A sinistra il grafico di  $R_I \circ R_{II}$  e a destra di  $R_{II} \circ R_I$ . Evidenziati i punti fissi.

### 3 Bibliografia

Klein, E. e A. C. Thompson (1984): *Theory of correspondences*, Wiley, New York.

Patrone, F. (2006): *Decisori (razionali) interagenti. Una introduzione alla Teoria dei Giochi*, Edizioni PLUS, Pisa.

#### Siti:

Nash, Berge e Kakutani:

[http://www.diptem.unige.it/patrone/decisori\\_razionali\\_interagenti/  
Nash.Berge.Kakutani/Nash.Berge.Kakutani.pdf](http://www.diptem.unige.it/patrone/decisori_razionali_interagenti/Nash.Berge.Kakutani/Nash.Berge.Kakutani.pdf)

Breve introduzione alla teoria dei giochi:

[http://www.diptem.unige.it/patrone/intro\\_TdG.pdf](http://www.diptem.unige.it/patrone/intro_TdG.pdf)