Teoria dei Giochi - B

Vito Fragnelli

A.A. 2005-2006

Capitolo 1

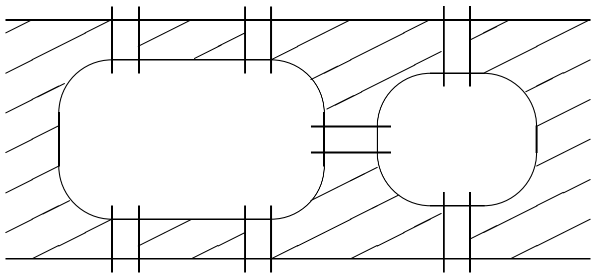
Teoria delle reti

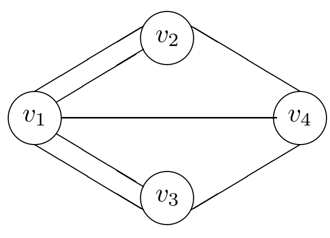
1.1 Grafi

Intuitivamente un grafo può essere definito come un insieme finito di punti ed un insieme di frecce che uniscono coppie di punti.

I punti si chiamano *nodi* o *vertici* del grafo e le frecce si chiamano *archi* del grafo; il verso della freccia assegna un *orientamento* all'arco corrispondente; se non si tiene conto dell'orientamento degli archi il grafo è detto *multigrafo* o *non orientato* e gli archi sono detti *spigoli*. Tra due nodi possono esistere più archi orientati nello stesso verso; il numero massimo di archi orientati nello stesso verso presenti tra due nodi si indica con p e il grafo è detto *p-grafo*. Il numero di nodi è detto *ordine* del grafo e si indica con n; il numero di archi si indica con m.

Storicamente la Teoria dei Grafi nasce nel sec. XVIII, applicata soprattutto a giochi e passatempi; uno dei più noti è certamente il problema dei ponti di Königsberg. La città si estendeva sulle rive del fiume Pregel e su due piccole isolette; le varie parti della città erano collegate tra loro da sette ponti. Il problema consiste nel determinare un percorso che passando per ogni ponte una e una sola volta, ritorni al punto di partenza (Circuito euleriano). Il problema può essere rappresentato tramite il grafo a destra:





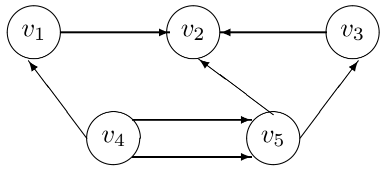
Definizione 1.1.1 *Un grafo è una coppia $G(N, A)$, dove $N = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è un insieme di elementi detti nodi o vertici e $A = \{a_{ij} = (v_i, v_j) | v_i, v_j \in N\}$ è una famiglia di elementi del prodotto cartesiano $N \times N$ detti archi.*

Esempio 1.1.1 (Elementi di un grafo) *Si consideri il grafo $G(N, A)$ dove:*

$N = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$A = \{a_{12}, a_{32}, a_{41}, a_{45}, a_{45}, a_{52}, a_{53}\}$

$p = 2; n = 5; m = 7$



♢

Definizione 1.1.2

- *Dato un arco $a_{ij} = (v_i, v_j)$ il nodo v_i è detto* nodo iniziale, primo nodo *o* predecessore del nodo v_j*; il nodo v_j è detto* nodo finale, secondo nodo o successore del nodo v_i*. I nodi v_i e v_j sono detti* adiacenti*. L'arco a_{ij} è detto* uscente da v_i *ed* entrante in v_j*.*
- *Un arco $a_{ii} = (v_i, v_i)$, cioè in cui il nodo iniziale e finale coincidono è detto* cappio*.*
- *Due archi che hanno un nodo in comune sono detti* adiacenti*.*
- *L'insieme dei secondi nodi degli archi uscenti da un nodo v_i è detto* insieme dei successori di v_i *e si indica con $\omega^+(i)$ o semplicemente $\omega(i)$.*
- *L'insieme dei primi nodi degli archi entranti in un nodo v_i è detto* insieme dei predecessori di v_i *e si indica con $\omega^-(i)$.*
- *Una sequenza di archi aventi ciascuno un nodo in comune con l'arco precedente e l'altro nodo in comune con l'arco seguente è detto* cammino*; il numero di archi è detto* lunghezza del cammino*.*
- *Un cammino in cui nessun arco viene percorso più di una volta è detto* semplice*; se nessun nodo viene incontrato più di una volta è detto* elementare*.*
- *Un cammino semplice in cui il primo e l'ultimo nodo coincidono è detto* ciclo*; se il cammino è elementare il ciclo è detto* elementare*.*
- *Un cammino o un ciclo in cui tutti gli archi sono percorsi secondo il proprio orientamento è detto* orientato*, altrimenti è detto* non orientato*.*
- *Se esiste un cammino tra i nodi v_i e v_j, v_j è detto* accessibile da v_i *e viceversa; se esiste un cammino orientato dal nodo v_i al nodo v_j, v_j è detto* fortemente accessibile da v_i *ma non viceversa.*
- *Un grafo $G(N, A)$ privo di cappi e in cui esiste al più un arco tra ogni coppia di nodi è detto* semplice*.*
- *Un grafo $G(N, A)$ è detto* connesso *se ogni nodo è accessibile dagli altri; è detto* fortemente connesso *se ogni nodo è fortemente accessibile dagli altri.*

- *Un grafo $G(N, A)$ è detto* completo *se tra ogni coppia di nodi esiste almeno un arco.*
- *Un multigrafo $G(N, A)$ connesso e privo di cicli elementari è detto* albero*.*
- *Un multigrafo è detto* foresta *se è formato dall'unione di alberi disgiunti.*
- *Dato un grafo $G(N, A)$ e un sottoinsieme $A' \subset A$, il grafo $G(N, A')$ ottenuto eliminando dal grafo G gli archi dell'insieme $A \setminus A'$ è detto* grafo parziale generato da A'*.*
- *Dato un grafo connesso $G(N, A)$ un grafo parziale $G(N, A')$ connesso e privo di cicli elementari è detto* spanning tree *o* albero ricoprente *o* albero parziale*.*
- *Dato un grafo $G(N, A)$ e una bipartizione N' e N'' dell'insieme N, l'insieme degli archi aventi un estremo in N' e l'altro in N'' è detto* taglio*.*

1.1.1 Rappresentazione di un grafo

Liste di adiacenza

Ad ogni nodo si associa la lista dei nodi successori; in un p-grafo con $p \geq 2$ qualche nodo viene ripetuto nella lista di adiacenza.

Nell'Esempio 1.1.1 si ha:

$$v_1(v_2); v_2(); v_3(v_2); v_4(v_1, v_5, v_5); v_5(v_2, v_3)$$

Matrice di adiacenza

Si utilizza una matrice M $n \times n$; ad ogni nodo si associano una riga ed una colonna della matrice e si pone M_{ij} uguale al numero di archi da v_i a v_j. Non è possibile distiguere gli archi aventi gli stessi nodi iniziali e finali.

Nell'Esempio 1.1.1 si ha:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	0	0	0
v_2	0	0	0	0	0
v_3	0	1	0	0	0
v_4	1	0	0	0	2
v_5	0	1	1	0	0

Forward star

Si utilizzano un vettore u contenente ordinatamente per ciascun nodo l'indice dei successori e un vettore p contenente la posizione dell'elemento del vettore u da cui inizia la lista dei successori di ciascun nodo; per omogeneità si pone $p(n+1) = m+1$; pertanto $p(1) = 1$, gli indici degli elementi di $\omega(i)$ sono nelle posizioni da $u(p(i))$ a $u(p(i+1)-1)$ e se $\omega(i) = \emptyset$ si ha $p(i) = p(i+1)$.

Nell'Esempio 1.1.1 si ha:

$$u = (2, 2, 1, 5, 5, 2, 3)$$
$$p = (1, 2, 2, 3, 6, 8)$$

1.2 Reti

Definizione 1.2.1 *Una rete è un grafo $G(N, A)$ nel quale ad ogni arco $a_{ij} \in A$ si associano tre valori interi l_{ij}, u_{ij}, c_{ij} detti rispettivamente* capacità minima*,* capacità massima *e* costo unitario *dell'arco e ad ogni nodo v_i si associa un valore intero b_i; se $b_i > 0$ il nodo v_i è detto* sorgente *e b_i è detta* disponibilità*, se $b_i < 0$ il nodo v_i è detto* pozzo *e b_i è detta* domanda*, se $b_i = 0$ il nodo v_i è detto* di attraversamento*.*

Osservazione 1.2.1

- *c_{ij} può indicare un costo, un peso, una lunghezza o qualsiasi altra cosa.*
- *La condizione di integrità ha soprattutto motivazioni storiche.*

1.2.1 Flusso su una rete

Data una rete $G(N, A)$ si definisce *flusso sulla rete* una funzione $x : A \rightarrow \mathbb{Z}$ che ad ogni arco a_{ij} associa un valore intero x_{ij} detto *flusso sull'arco*, in modo che siano soddisfatti i *vincoli di capacità degli archi*, cioè il flusso su ogni arco sia compreso tra la capacità minima e la capacità massima dell'arco e i *vincoli di bilanciamento nei nodi*, cioè la differenza tra il flusso uscente e il flusso entrante in ciascun nodo sia uguale alla disponibilità o alla domanda. Al flusso sull'arco a_{ij} si associa un costo dato dal prodotto tra il costo unitario c_{ij} e il flusso x_{ij}; la somma dei costi di tutti gli archi è detta *costo associato al flusso x*. I vincoli e il costo possono essere espressi nella forma seguente:

$$\begin{array}{lll} vincoli\ di\ capacit\grave{a}\ degli\ archi: & l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} & \forall\ a_{ij} \in A \\ vincoli\ di\ bilanciamento\ nei\ nodi: & \sum\limits_{j \in \omega^+(i)} x_{ij} - \sum\limits_{j \in \omega^-(i)} x_{ji} = b_i & \forall\ v_i \in N \\ costo\ associato\ al\ flusso: & \sum\limits_{v_i \in N} \sum\limits_{j \in \omega^+(i)} c_{ij} x_{ij} & \end{array}$$

Osservazione 1.2.2

- *Il vincolo di bilanciamento nei nodi è noto anche come legge di Kirchoff.*

1.2.2 Problema del flusso di costo minimo

Il problema consiste nel determinare un flusso x su una rete $G(N, A)$, minimizzando il costo associato; formalmente può essere espresso come segue:

$$\begin{array}{lll} min & \sum\limits_{v_i \in N} \sum\limits_{j \in \omega^+(i)} c_{ij} x_{ij} & \\ s.t. & \sum\limits_{j \in \omega^+(i)} x_{ij} - \sum\limits_{j \in \omega^-(i)} x_{ji} = b_i & \forall\ v_i \in N \\ & l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} & \forall\ a_{ij} \in A \end{array}$$

In questa forma possono essere rappresentati tutti i problemi di reti.

1.2.3 Esempi di reti

- Reti fisiche
  * Strade urbane
  * Reti elettriche
  * Circuiti VLSI (*planarità*)
- Reti di trasporto
  * Problema del trasporto
- Reti spazio-temporali
  * Problema di produzione e magazzino
  * Problema dell'orario degli equipaggi aerei
- Reti di pianificazione
  * PERT
  * Problema della miniera a cielo aperto

Capitolo 2

Problemi su reti

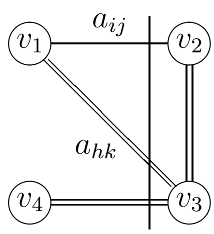
2.1 Minimo Spanning Tree

Data una rete $G(N, A)$ si deve trovare uno spanning tree di costo minimo, cioè i cui archi hanno globalmente costo minimo. Se gli archi hanno tutti lo stesso costo la soluzione è un qualsiasi spanning tree.

Come premessa si consideri il seguente teorema.

Teorema 2.1.1 *Dato un grafo $G(N, A)$ sia $N' \subseteq N$ un sottinsieme di vertici e sia $a_{ij} = (v_i, v_j)$ un arco di peso minimo appartenente al taglio generato da N', cioè tale che $v_i \in N'$ e $v_j \in N \setminus N'$ oppure $v_i \in N \setminus N'$ e $v_j \in N'$; allora esiste un albero di peso minimo contenente a_{ij}*

<u>Dimostrazione</u>
Per assurdo sia T' un albero non contenente a_{ij} e di peso strettamente minore di ogni albero contenente a_{ij} e sia a_{hk} l'arco di T' appartenente al taglio generato da N' e facente parte con a_{ij} di un ciclo. Sostituendo a_{ij} ad a_{hk} si ottiene un albero di peso non superiore a T'.
Assurdo.



♣

Algoritmo di Prim (1957)

L'algoritmo costruisce uno spanning tree $T(N, A')$ del grafo $G(N, A)$ tramite uno spanning tree parziale $T'(N', A')$ al quale ad ogni iterazione viene aggiunto un arco all'insieme A' e i relativi estremi all'insieme N', fino a che $N' = N$.

<u>Algoritmo</u>

a) $A' = \emptyset; N' = \{v_1\}$;

b) determinare l'arco $a_{ij} = (v_i, v_j)$ di peso minimo tale che $v_i \in N'$ e $v_j \in N/N'$ o $v_i \in N/N'$ e $v_j \in N'$;

c) $A' = A' \cup \{a_{ij}\}; N' = N' \cup \{v_i\} \cup \{v_j\}$;

d) se $N' \neq N$ tornare a b);
altrimenti STOP;

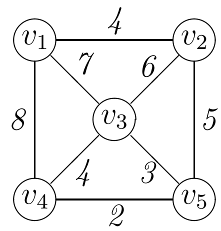
L'algoritmo è corretto in quanto ad ogni iterazione aggiunge l'arco di peso minimo appartenente al taglio generato da N', in accordo col Teorema 2.1.1.

Osservazione 2.1.1

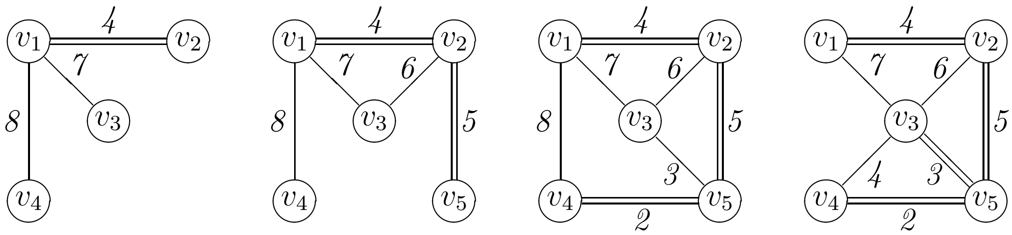
- *Un altro algoritmo molto noto è quello di Kruskal (1956) che costruisce uno spanning tree* $T(N, A')$ *del grafo* $G(N, A)$ *aggiungendo ad ogni iterazione all'insieme* A' *l'arco di peso minimo che non genera cicli, fino a che* $card(A') = card(N) - 1$.

- *Esiste una variante dell'algoritmo di Kruskal che elimina l'arco di peso massimo che non fa perdere la connessione.*

Esempio 2.1.1 (Minimo Spanning Tree)
Determinare uno spanning tree di peso minimo per il grafo a lato, esaminando gli archi e i vertici in ordine di indice crescente.



<u>*Algoritmo di Prim*</u>



I *II* *III* *IV*

0 $A' = \emptyset; N' = \{v_1\}$

I $A' = \{a_{12}\}; N' = \{v_1, v_2\}$

II $A' = \{a_{12}, a_{25}\}; N' = \{v_1, v_2, v_5\}$

III $A' = \{a_{12}, a_{25}, a_{45}\}; N' = \{v_1, v_2, v_5, v_4\}$

IV $A' = \{a_{12}, a_{25}, a_{45}, a_{35}\}; N' = \{v_1, v_2, v_5, v_4, v_3\}$*; STOP (*$N' = N$*)* $\diamondsuit$

2.2 Cammino minimo

Data una rete $G(N, A)$ si deve trovare il cammino orientato di costo minimo tra due nodi assegnati. Se gli archi hanno tutti lo stesso costo la soluzione è il cammino con il minimo numero di archi, altrimenti è possibile che un cammino con più archi risulti migliore.

Pur essendo un problema semplice, servono algoritmi efficienti perchè è un sottoproblema di molti altri problemi, ad esempio reti di trasporto, reti di comunicazione, percorsi veicolari, progettazione di reti.

Per memorizzare i cammini di costo minimo si utilizza un puntatore che per ogni nodo indica il predecessore; infatti il predecessore è unico mentre il successore può non esserlo.

2.2.1 SPP da un nodo v_s a tutti gli altri nodi

Ad ogni nodo v_i si assegnano un valore o etichetta $d(i)$ che indica il costo del cammino corrente da v_s a v_i e un puntatore $pred(i)$ che indica il predecessore di v_i nel cammino corrente; si parte da un valore temporaneo per $d(i)$ che può essere modificato ad ogni iterazione fino ad ottenere il valore esatto.

Esistono due classi di algoritmi:

- algoritmi label setting o di assegnazione
  modificano le etichette in modo tale che ad ogni iterazione almeno una di esse diventi esatta; il più noto è l'algoritmo di Dijkstra.

- algoritmi label correcting o di correzione
  modificano le etichette in modo tale che solo all'ultima iterazione si è certi dell'esattezza di tutte le etichette; i più noti algoritmi sono quello di Ford e la variante di Bellman.

Gli algoritmi di assegnazione sono più efficienti nei casi peggiori, invece gli algoritmi di correzione non necessitano di archi a costo non negativo.

Algoritmo di Dijkstra (1959)

Richiede che nessun arco abbia costo negativo per evitare il caso dei cicli di costo negativo.

Algoritmo

a) $d(s) = 0$;

b) per $i = 1, ..., n$ $d(i) = c_{si}$ e $pred(i) = s$;

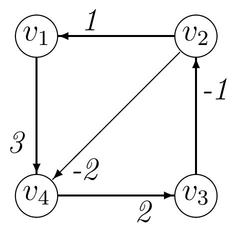
c) sia $d(h) = min\{d(i)|d(i) \text{ non è esatta}\}$ ($d(h)$ diventa esatta);

d) se $v_i \in \omega(h)$ e $d(i)$ non è esatta $d(i) = min\{d(i), d(h) + c_{hi}\}$ eventualmente, se $d(i)$ è stata modificata, $pred(i) = h$;

e) se tutti i valori $d(i)$ sono esatti STOP ($n - 1$ iterazioni);
altrimenti tornare a c);

L'algoritmo è corretto in quanto ad ogni iterazione le etichette temporanee (che rappresentano il costo del cammino minimo che utilizza solo nodi con etichetta esatta) sono tutte non minori di quelle esatte; per il nodo v_h con etichetta temporanea minima ogni altro cammino deve comprendere almeno un nodo v_k con etichetta non esatta, per cui il costo è non minore di quello da v_s a v_k più il costo c_{kh}. Se qualche arco ha costo negativo la prova di correttezza non sussiste.

Esempio 2.2.1 (Grafo con ciclo negativo) *Determinare lo SPP dal nodo v_1 a tutti gli altri nodi per il seguente grafo:*



Algoritmo di assegnazione

d	0	99	99	99	**pred**	1	1	1	1	**h** = 1
d	0	99	99	3	**pred**	1	1	1	1	**h** = 4
d	0	99	5	3	**pred**	1	1	4	1	**h** = 3
d	0	4	5	3	**pred**	1	3	4	1	**h** = 2
d	0	4	5	3	**pred**	1	3	4	1	

STOP (non identificato ciclo negativo) ◇

2.2.2 SPP tra qualsiasi coppia di nodi

Si può applicare uno degli algoritmi precedenti assumendo ogni volta un nodo iniziale diverso, oppure si possono usare algoritmi specifici, ad esempio l'algoritmo di Floyd (1962).

2.3 Flusso massimo

Sia data una rete di trasporto $G(N, A)$, cioè:

- senza cappi;
- con una unica sorgente v_s priva di archi entranti e con un unico pozzo v_t privo di archi uscenti, per i quali non sono definite la disponibilità e la domanda;
- con gli altri nodi di attraversamento (cioè con domanda nulla).

Si deve determinare un flusso x che soddisfa i vincoli e per cui sia massimo il *valore del flusso da v_s a v_t*, indicato con $F(v_s, v_t)$ e definito come segue:

$$\sum_{i\neq s,t}\left(\sum_{j\in\omega^+(i)} x_{ij} - \sum_{j\in\omega^-(i)} x_{ji}\right) + \sum_{j\in\omega^+(s)} x_{sj} - \sum_{j\in\omega^-(t)} x_{jt} = 0$$

per la legge di Kirchoff la prima sommatoria è nulla, per cui si ha:

$$\sum_{j\in\omega^+(s)} x_{sj} = \sum_{j\in\omega^-(t)} x_{jt} = F(v_s, v_t)$$

Questo problema è utile anche per valutare l'affidabilità di una rete in quanto si può prevedere il suo comportamento in caso di indisponibilità di qualche arco.

Il problema può essere scritto in forma di problema di programmazione lineare a numeri interi:

$$\begin{array}{lll}
max & z = F & \\
s.t. & \sum_{j\in\omega^+(s)} x_{sj} - F = 0 & \\
 & \sum_{j\in\omega^+(i)} x_{ij} - \sum_{j\in\omega^-(i)} x_{ji} = 0 & \forall\ v_i \in N \setminus \{v_s, v_t\} \\
 & -\sum_{j\in\omega^-(t)} x_{jt} + F = 0 & \\
 & l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}; x_{ij}\ intero & \forall\ a_{ij} \in A
\end{array}$$

Questo problema può essere risolto con i metodi della programmazione lineare oppure con uno specifico algoritmo.

L'algoritmo più comune è dovuto a Ford e Fulkerson (1956) ed è detto del contrassegno perchè contrassegna i nodi in modo da costruire una sequenza di cammini dalla sorgente v_s al pozzo v_t sui quali incrementare il flusso fino a raggiungere il massimo.

L'algoritmo del contrassegno appartiene alla classe degli *algoritmi di cammino aumentante* di cui fanno parte anche l'algoritmo del minimo cammino aumentante (Edmonds e Karp, 1972) e l'algoritmo delle reti stratificate (Dinic, 1970 - Ahuja e Orlin, 1991).

Esiste un'altra classe di algoritmi più flessibili, gli *algoritmi di preflusso*, che consentono di aumentare il flusso non su un cammino da v_s a v_t, ma su un singolo arco con una operazione di invio (*push*), cui appartengono l'algoritmo di preflusso (Karzanov, 1974 - Goldberg e Tarjan, 1986) e la sua variazione (Goldberg e Tarjan, 1986) e l'algoritmo di scaling dell'eccesso (Ahuja e Orlin, 1991).

<u>Algoritmo del contrassegno</u>

a) inizializzare x con un flusso ammissibile (se le capacità minime sono tutte nulle il flusso nullo è ammissibile);

b) $V = \{v_s\}$ (V è l'insieme dei nodi contrassegnati);

c) se esistono due nodi adiacenti $v_i \in V$ e $v_j \notin V$ contrassegnare v_j con $+i$ se $j \in \omega^+(i)$ e $x_{ij} < u_{ij}$ oppure con $-i$ se $j \in \omega^-(i)$ e $x_{ji} > l_{ji}$ e andare a d);
altrimenti STOP (flusso massimo);

d) se $v_t \in V$ esiste un cammino non orientato C da v_s a v_t sul quale si può variare il flusso di Δ andare a e);
altrimenti tornare a c);

e) costruire un nuovo flusso x ponendo:

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{se } a_{ij} \notin C \\ x_{ij} + \Delta & \text{se } a_{ij} \in C \text{ secondo l'orientamento} \\ x_{ij} - \Delta & \text{se } a_{ij} \in C \text{ non secondo l'orientamento} \end{cases}$$

tornare a b);

L'algoritmo è corretto in quanto preso $U \subset N$ qualsiasi con $v_s \in U$, $v_t \notin U$ si ha:

$$F(v_s, v_t) = \sum_{j \in \omega^+(s)} x_{sj} + \sum_{v_i \in U, i \neq s} \left\{ \sum_{j \in \omega^+(i)} x_{ij} - \sum_{j \in \omega^-(i)} x_{ji} \right\}$$

Eliminando i termini di segno opposto, corrispondenti ai flussi sugli archi aventi entrambi gli estremi in U, si ha:

$$F(v_s, v_t) = \sum_{v_i \in U, v_j \notin U} x_{ij} - \sum_{v_i \in U, v_j \notin U} x_{ji} \leq \sum_{v_i \in U, v_j \notin U} u_{ij} - \sum_{v_i \in U, v_j \notin U} l_{ji}$$

D'altra parte preso $V = \{\text{nodi contrassegnati al termine dell'algoritmo}\}$ si ha:

$$F(v_s, v_t) = \sum_{v_i \in V, v_j \notin V} x_{ij} - \sum_{v_i \in V, v_j \notin V} x_{ji} = \sum_{v_i \in V, v_j \notin V} u_{ij} - \sum_{v_i \in V, v_j \notin V} l_{ji}$$

dove l'ultima eguaglianza deriva dalla situazione finale dell'algoritmo.

Definizione 2.3.1 *Data una rete di trasporto $G(N, A)$ e il taglio generato da un insieme $U \subset N$, con $v_s \in U$ e $v_t \notin U$ si chiama capacità del taglio la quantità* $\sum_{v_i \in U, v_j \notin U} u_{ij} - \sum_{v_i \in U, v_j \notin U} l_{ji}$.

Un importante risultato è costituito dal seguente teorema.

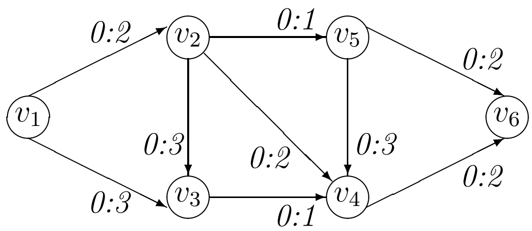
Teorema 2.3.1 (Teorema di Ford e Fulkerson (max flow - min cut, 1956)) *Data una rete di trasporto $G(N, A)$ si ha:*

$$max\ F(v_s, v_t) = min\ \left\{ \sum_{v_i \in U, v_j \notin U} u_{ij} - \sum_{v_i \in U, v_j \notin U} l_{ji} | U \subset N, v_s \in U, v_t \notin U \right\}$$

Osservazione 2.3.1 • *Il problema del flusso massimo e del taglio minimo per una data rete sono legati da una relazione di dualità, quindi il Teorema di Ford e Fulkerson non è altro che un caso particolare del I Teorema della dualità.*

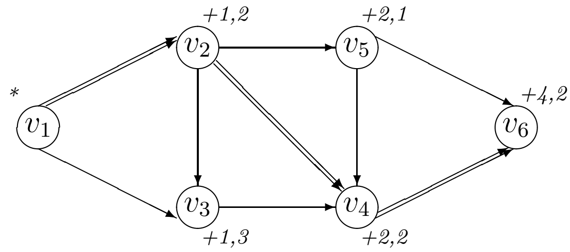
Un problema strettamente legato a quello del flusso massimo è quello del *flusso compatibile* necessario per inizializzare il flusso degli algoritmi di cammino aumentante. Anche in questo caso esistono numerosi algoritmi, tra i quali il più comune è quello di Herz (1967).

Esempio 2.3.1 (Flusso massimo) *Sia data la seguente rete in cui sono indicate le capacità minime e massime di ogni arco:*

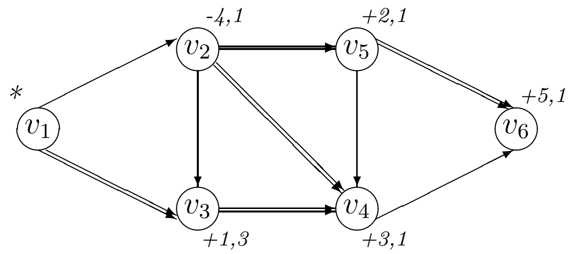


- *si esaminano nodi e archi secondo l'ordine crescente degli indici, sia nella scelta del nodo contrassegnato sia nella scelta dei nodi da contrassegnare;*
- *si contrassegnano tutti i nodi possibili per non dover riesaminare successivamente lo stesso nodo;*
- *al contrassegno si aggiunge un termine che indica la quantità massima di cui si può incrementare il flusso lungo il cammino fino a quel nodo.*

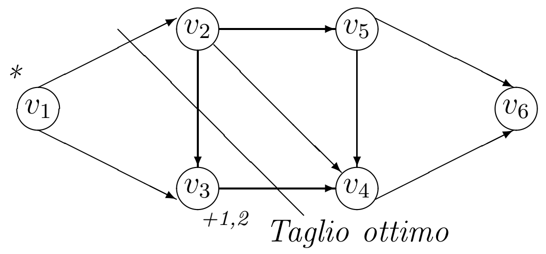
Il flusso nullo è ammissibile.



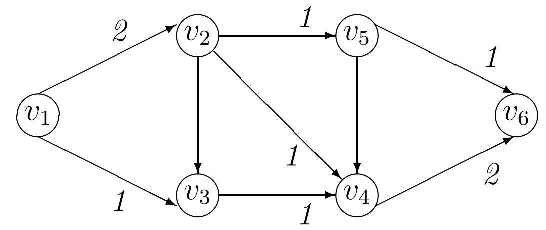
Il cammino aumentante è dato da: $v_1 - v_2 - v_4 - v_6$ *con incremento di 2 unità.*



Il cammino aumentante è dato da: $v_1 - v_3 - v_4 - v_2 - v_5 - v_6$ *con incremento di 1 unità.*



Poichè non è possibile contrassegnare il pozzo v_6 non esistono cammini aumentanti e il flusso massimo è quello rappresentato in basso.



Utilizzando i nodi contrassegnati e non contrassegnati si determina il taglio minimo $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4)$*, rappresentato in alto, che ha capacità di 3 unità.* ♢

Capitolo 3

Giochi cooperativi

3.1 Introduzione

I giocatori di un gioco non devono necessariamente avere interessi contrastanti, ma possono perseguire un fine comune, almeno per la durata del gioco, pertanto è possibile che alcuni di essi tendano ad associarsi per migliorare il proprio risultato.

Per realizzare la cooperazione:

- deve essere possibile stipulare accordi (ad esempio non devono esserci regole antitrust o difficoltà di comunicazione);
- deve esserci la possibilità di far rispettare tali accordi, nel senso che deve esistere una autorità sufficientemente forte e accettata da tutti i componenti.

Una ulteriore suddivisione dei giochi cooperativi fa riferimento a come i giocatori di una coalizione possono ripartirsi la vincita. Si distinguono due sottoclassi:

- <u>Giochi cooperativi senza pagamenti laterali (NTU-Games)</u>: i giocatori ricevono un payoff preassegnato.
- <u>Giochi cooperativi a pagamenti laterali (TU-Games)</u>: i giocatori di una coalizione possono ripartirsi in qualsiasi modo la vincita.

I secondi costituiscono un caso particolare dei primi.
In particolare per avere un gioco TU devono essere soddisfatte tre ipotesi:

- deve essere possibile trasferire l'utilità (da un punto di vista normativo);
- deve esistere un mezzo comune di scambio, ad esempio il denaro, con cui trasferire l'utilità (da un punto di vista materiale);
- le funzioni di utilità dei giocatori devono essere equivalenti, ad esempio funzioni lineari della quantità di denaro.

Esempio 3.1.1 (Coalizione semplice) *Sono dati tre giocatori I, II, III; se due di loro si accordano, formando una coalizione, il terzo giocatore da ad ognuno di essi una moneta, altrimenti nessuno riceve nulla. I payoff sono:*

$(1, 1, -2)$	*se I e II si coalizzano*
$(1, -2, 1)$	*se I e III si coalizzano*
$(-2, 1, 1)$	*se II e III si coalizzano*
$(0, 0, 0)$	*altrimenti*

Se i payoff relativi alla coalizione (II, III) fossero $(-2.0, 1.1, 0.9)$ *la posizione del giocatore II non si rafforza in quanto il giocatore III ha più interesse a coalizzarsi con I che con II; questa situazione non sussiste nel caso in cui sia possibile per II "trasferire" parte della propria vincita al giocatore III, ritornando alla situazione precedente.* ♢

3.1.1 Funzione caratteristica per un gioco TU

La funzione caratteristica di un gioco TU può essere costruita a partire dalla forma strategica del gioco a due persone tra le coalizioni S ed $N \setminus S$:

$$v'(S) = \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \quad \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \left\{ \sum_{i \in S} u_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\} \quad \text{(von Neumann-Morgenstern)}$$

$$v''(S) = \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \quad \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \left\{ \sum_{i \in S} u_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\}$$

Ovviamente i due risultati possono non coincidere, in particolare il secondo è non inferiore al primo. Ma questa osservazione è assolutamente trascurabile al fine di assegnare correttamente il valore di $v(S)$.

Esempio 3.1.2 (Costruzione della funzione caratteristica - I) *Si consideri il seguente gioco a tre giocatori:*

3 = S		
1 / 2	*L*	*R*
T	$1, 0, 4$	$1, 0, -2$
B	$1, 2, -3$	$0, -1, -5$

3 = C		
1 / 2	*L*	*R*
T	$1, -3, -3$	$2, 0, -4$
B	$0, 1, 4$	$0, -1, -2$

3 = D		
1 / 2	*L*	*R*
T	$1, 4, 3$	$2, -3, 4$
B	$2, 2, 3$	$0, 1, 5$

Volendo determinare il valore di v si può costruire il gioco tra $S = \{1, 2\}$ *e* $N \setminus S = \{3\}$*:*

S / $N \setminus S$	N_1	N_2	N_3
S_1	$1, 4$	$-2, -3$	$5, 3$
S_2	$1, -2$	$2, -4$	$-1, 4$
S_3	$3, -3$	$1, 4$	$4, 3$
S_4	$-1, -5$	$-1, -2$	$1, 5$

dove $S_1 = (T, L)$*,* $S_2 = (T, R)$*,* $S_3 = (B, L)$*,* $S_4 = (B, R)$ *e* $N_1 = S$*,* $N_2 = C$*,* $N_3 = D$*.*
È facile a questo punto determinare i valori di $v(\{1, 2\})$ *associati alle precedenti definizioni:*

$$v'(S) = \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \left\{ \widehat{u}_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\} = \max\{-2, -1, 1, -1\} = 1$$

$$v''(S) = \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \left\{ \widehat{u}_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\} = \min\{3, 2, 5\} = 2$$

Il secondo risultato è preferibile al primo, ma in questo caso non si tratta di "preferire" un risultato ma di rappresentare una situazione.
Si può osservare che il valore $v'(S)$ corrisponde alla strategia S_3 ed in effetti la coalizione S giocando $S_3 = (B, L)$ può garantirsi un payoff non inferiore a 1, mentre il valore $v''(S)$ corrisponde alla strategia S_2, ma la coalizione S giocando $S_2 = (T, R)$ non può garantirsi un payoff non inferiore a 2, anzi probabilmente il suo payoff risulterà inferiore.
In realtà entrambe le interpretazioni difettano di realismo poichè lo scopo della coalizione $N \setminus S$ è quello di massimizzare il proprio payoff e non di minimizzare il payoff di S. Quindi la validità delle formule precedenti è limitata dal fatto di non considerare le utilità di $N \setminus S$: in questo caso è facile osservare che $N \setminus S$ considera "rischiose" le strategie N_1 ed N_2, in corrispondenza delle quali si hanno i valori $v'(S)$ e $v''(S)$. ♢

Inoltre esiste un altro punto fondamentale dato dalle funzioni di utilità dei giocatori. La base di partenza sono le preferenze dei giocatori di cui le funzioni di utilità sono solo rappresentazioni, pertanto la scelta delle strategie dei giocatori di S dovrebbe avvenire non sulle funzioni di utilità, ma sulle preferenze, mentre si può osservare nell'esempio precedente che triplicando le utilità del giocatore 1 si ottiene:

S / $N \setminus S$	N_1	N_2	N_3
S_1	$3, 4$	$0, -3$	$7, 3$
S_2	$3, -2$	$6, -4$	$3, 4$
S_3	$5, -3$	$1, 4$	$8, 3$
S_4	$-1, -5$	$-1, -2$	$1, 5$

e quindi:

$$v'(S) = max\{0, 3, 1, -1\} = 3$$
$$v''(S) = min\{5, 6, 8\} = 5$$

Come prevedibile i valori risultano differenti, ma soprattutto si ottengono in corrispondenza di differenti strategie per la coalizione S, in particolare $v'(S)$ si ottiene per S_2 e $v''(S)$ per S_3. Questo dipende dall'aver dato alle funzioni di utilità un significato quantitativo che non necessariamente hanno. Sempre con riferimento alle funzioni di utilità si può evidenziare che non necessariamente sono additive, quindi non si può definire l'utilità della coalizione come la somma delle utilità.

La funzione caratteristica assegna ad ogni coalizione l'utilità che i giocatori possono ottenere "indipendentemente" dagli altri, ma questo termine merita qualche approfondimento; il significato di "qualunque sia la strategia" degli altri giocatori e di "escludendo" gli altri giocatori possono non definire correttamente il valore della coalizione; si può allora utilizzare il significato di "senza la collaborazione" degli altri giocatori.

Esempio 3.1.3 (Costruzione della funzione caratteristica - II) *Due fratelli, I e II, devono dividersi un'eredità costituita da 4 oggetti A, B, C, D ai quali assegnano valutazioni* *differenti, riportate nella seguente tabella:*

	A	B	C	D
I	12	10	9	6
II	2	3	1	5

L'esecutore testamentario dice ai due fratelli che in mancanza di un accordo provvederà ad assegnare 2 oggetti a ciascuno, a sua discrezione. In questo caso i due fratelli sanno che nel peggiore dei casi potrebbero ottenere i due oggetti che essi valutano meno, cioè C e D per I e A e C per II, e quindi hanno entrambi interesse ad un accordo che eviti questa situazione. Assegnando al giocatore I il valore $v(\{I\}) = 15$ *corrispondente agli oggetti C e D che lui giudica di minor valore si sottintende che il giocatore II voglia tenersi gli oggetti A e B, ma questo è improbabile, visto che lascerebbe l'oggetto D che per lui ha valore massimo; analogamente il valore* $v(\{I\}) = 22$ *corrispondente ai due oggetti A e B che lui giudica di maggior valore non è adeguato in quanto implica che il giocatore II accetti di prendere l'oggetto C che per lui ha valore minimo; invece il giocatore I è certamente in grado di garantirsi il valore* $v(\{I\}) = 21$ *corrispondente a prendere gli oggetti A e C e a lasciare al giocatore II gli oggetti B e D che quest'ultimo giudica di maggior valore.*
In maniera analoga il valore che il giocatore II può ottenere "senza la collaborazione" del giocatore I è $v(\{II\}) = 6$ *corrispondente a prendere gli oggetti C e D e a lasciare al giocatore I gli oggetti A e B che quest'ultimo giudica di maggior valore.*
La grande coalizione ha valore $v(\{I, II\}) = 37$*, in quanto, avendo la possibilità di trasferire l'utilità, la scelta più vantaggiosa corrisponde a dare tutti gli oggetti al giocatore I, che dà a tutti gli oggetti un valore maggiore rispetto al giocatore II, salvo poi ripartire adeguatamente questo valore tra i due giocatori.* $\diamondsuit$

Osservazione 3.1.1

- *Se il gioco fosse stato ad utilità non trasferibile la funzione caratteristica avrebbe assegnato alla grande coalizione tutte le coppie di valori che i due giocatori possono ottenere, ad esempio* $(12, 9)$ *corrispondente a dare l'oggetto A al giocatore I e gli altri tre oggetti al giocatore II, oppure* $(18, 4)$ *corrispondente a dare al giocatore I gli oggetti A e D e al giocatore II gli oggetti B e C, oppure* $(0, 11)$ *corrispondente a dare i quattro oggetti al giocatore II e così via.*

Sono state proposte altre definizioni per $v(S)$, ad esempio il valore ottenuto in corrispondenza delle strategie che massimizzano la differenza tra il payoff di S e di $N \setminus S$, ma nessuna supera le questioni poste, a meno di oppurtune ipotesi sulle funzioni di utilità, ad esempio supporre che siano additive e uguali per tutti i giocatori.

3.2 Giochi cooperativi senza pagamenti laterali

In questi giochi introdotti da Aumann e Peleg (1960) ogni giocatore utilizza le proprie strategie in accordo con gli altri giocatori con cui ha formato una coalizione, ma consegue una sua propria vincita indipendentemente dagli altri.

Definizione 3.2.1 *Un gioco NTU è una coppia $G = (N, V)$ dove N è l'insieme dei giocatori e V è la funzione che ad ogni coalizione $S \subset N$ associa l'insieme dei payoff ammissibili per i giocatori di S, tale che:*

- $V(S) \subset \mathbb{R}^S$
- $V(S)$ *è chiuso e non vuoto*
- $V(S) = V(S) - \mathbb{R}^S_{\geq}$ (comprehensiveness)

Esempio 3.2.1 (Dilemma del prigioniero senza pagamenti laterali)

I/II	C	NC
C	$1,1$	$5,0$
NC	$0,5$	$4,4$

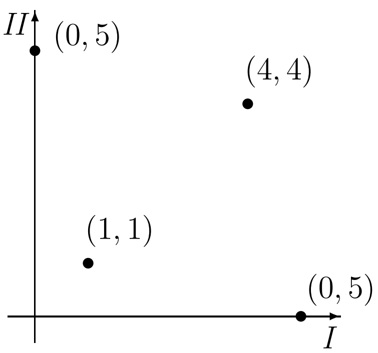
Dalla tabella si ricava che se il giocatore I gioca C si garantisce una vincita di un'unità, mentre se gioca NC si garantisce una vincita nulla per cui la funzione caratteristica è:

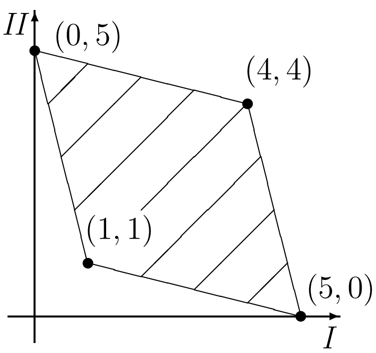
$$V(\{I\}) = V(I) = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$$

e analogamente per il giocatore II:

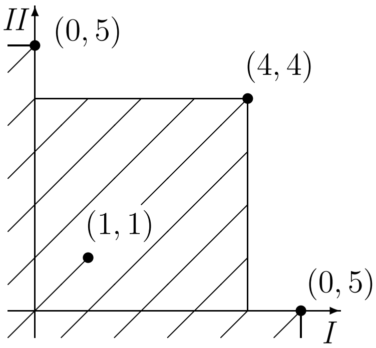
$$V(\{II\}) = V(II) = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 1\}$$

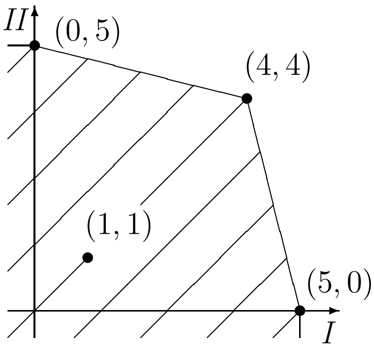
Per la coalizione $\{I, II\} = N$ si possono avere differenti valori per $V(N)$; se sono ammesse solo strategie pure si ha $V_p(N) = \{(1,1), (5,0), (0,5), (4,4)\}$; se sono ammesse strategie correlate si ha $V_c(N) = coV_p(N)$ = involucro convesso di $V(N)$.





Inoltre i giocatori hanno la possibilità di "bruciare" tutto il payoff che vogliono (free disposal), per cui si ha rispettivamente:





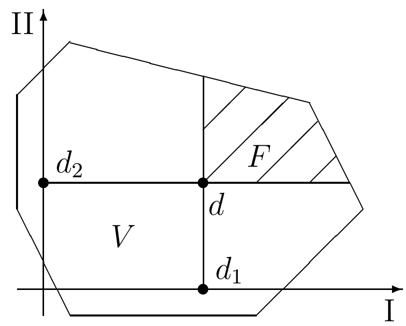
$\diamondsuit$

3.3 Problema di contrattazione a due giocatori senza pagamenti laterali

Un'applicazione interessante dei giochi cooperativi senza pagamenti laterali è data dal problema di contrattazione a due giocatori senza pagamenti laterali (Nash, 1950).

Se è giocato cooperativamente i giocatori possono accordarsi per una strategia correlata e possono giocare qualunque elemento dello spazio delle strategie $X \times Y$.

Sotto opportune ipotesi di compattezza dell'insieme delle strategie possibili (ad esempio un simplesso) e di comportamento delle funzioni di utilità (ad esempio lineari), l'immagine nello spazio delle utilità $I \times II$ è un insieme V convesso e chiuso.



Al giocatore i si assegna un valore di riferimento d_i, ad esempio la soluzione non cooperativa di maxmin, quella di Nash o altro, e si definisce il punto $d = (d_1, d_2)$, che costituisce il payoff dei giocatori nel caso non raggiungano un accordo; quindi si considera il sottoinsieme indicato con $F = V \cup \{(x_1, x_2) | x_1 \geq d_1, x_2 \geq d_2\}$ chiuso, convesso, limitato e non vuoto, che costituisce l'insieme dei payoff che i giocatori possono raggiungere contrattando.

Definizione 3.3.1 *Un problema di contrattazione a due giocatori è rappresentato dalla coppia (F, d) con $F \subset \mathbb{R}^2$ chiuso, convesso, limitato e non vuoto (*feasibility set*), $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$ (*disagreement point*).*

Il caso più interessante si ha quando i giocatori sono antagonisti, nel senso che ad un incremento del payoff per uno corrisponde una diminuzione per l'altro, come accade restringendosi alla frontiera di Pareto (giocatori efficientisti).

Questo problema può essere visto come gioco NTU dove:

- $V(1) = \{x_1 \in \mathbb{R} | x_1 \leq d_1\}$
- $V(2) = \{x_2 \in \mathbb{R} | x_2 \leq d_2\}$
- $V(1,2) = F - \mathbb{R}^2_{\geq}$

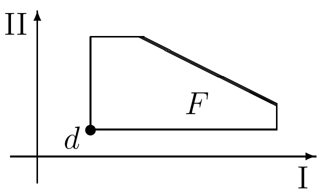
3.3.1 Soluzione assiomatica di Nash (1950)

Una soluzione $\Phi(F,d)$ di un problema di contrattazione a due giocatori $(F,d) \in C$, insieme dei problemi di contrattazione, si determina come funzione $\Phi : C \to \mathbb{R}^2$ tale che $\Phi(F,d) \in F$ e che soddisfa i seguenti requisiti detti *assiomi di Nash*:

1. Efficienza stretta

La soluzione appartiene alla frontiera paretiana stretta, cioè non può essere migliorabile per un giocatore:

$$x \in F, x \geq \Phi(F,d) \Rightarrow x = \Phi(F,d)$$



2. Razionalità individuale

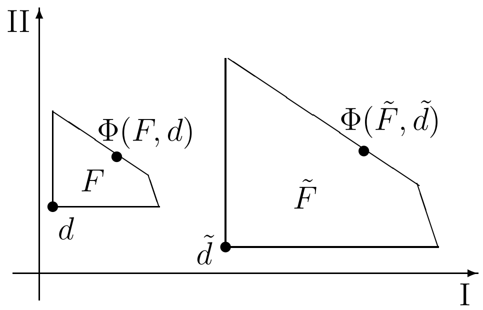
$$\Phi(F,d) \geq d$$

con la relazione d'ordine di $\mathbb{R}^2$.

3. Scale covariance

La soluzione è invariante per trasformazioni lineari, cioè $\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{>}, \forall\ \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ siano $\tilde{F} = \{(\lambda_1 x_1 + \mu_1, \lambda_2 x_2 + \mu_2) \mid (x_1, x_2) \in F\}$ e $\tilde{d} = (\lambda_1 d_1 + \mu_1, \lambda_2 d_2 + \mu_2)$ allora:

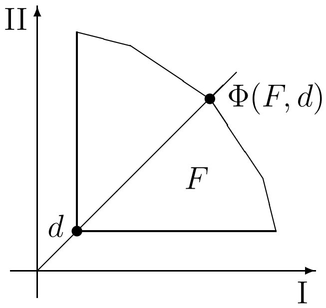
$$\Phi(\tilde{F}, \tilde{d}) = (\lambda_1 \Phi_1(F,d) + \mu_1, \lambda_2 \Phi_2(F,d) + \mu_2)$$



4. Simmetria

Se F è simmetrico per i due giocatori, cioè entrambi possono ottenere gli stessi payoff, cioè $(a,b) \in F \iff (b,a) \in F$ e $d_1 = d_2$ allora si ha:

$$\Phi_1(F,d) = \Phi_2(F,d)$$

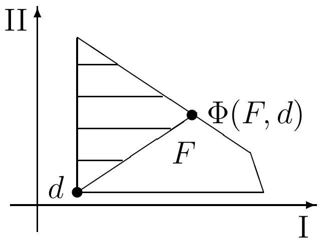


5. Indipendenza dalle alternative irrilevanti

Assioma controverso. Se si elimina un sottoinsieme di F non contenente $\Phi(F, d)$ la soluzione resta invariata, cioè:

$$d, \Phi(F, d) \in G \subset F \Rightarrow \Phi(G, d) = \Phi(F, d)$$

Nell'esempio in figura il giocatore I può ridiscutere o meno la scelta della soluzione ottenuta.



Teorema 3.3.1 *Esiste un'unica funzione $\Phi : C \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa gli assiomi di Nash, quella che massimizza il prodotto di Nash:*

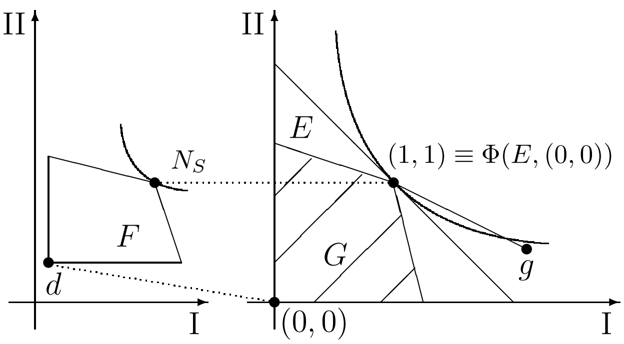
$$\Phi(F, d) = argmax \ \{(x_1 - d_1)(x_2 - d_2)|x \in F\} = N_S$$

Dimostrazione

Si cerca una funzione opportuna a partire dalle conoscenze su F. Dato (F, d) esiste un solo punto (x_1, x_2) di F per cui $(x_1 - d_1)(x_2 - d_2)$ è massimo.

Per l'assioma 3 è possibile definire una trasformazione di F in G tale che:

$$\begin{array}{rcll} d & \rightarrow & (0,0) & \qquad (*) \\ (x_1, x_2) & \rightarrow & (1,1) & \qquad (*) \end{array}$$



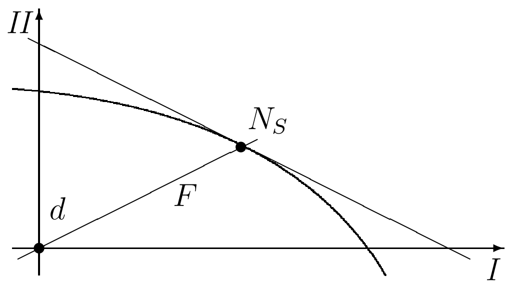
Considerando il triangolo E, che è simmetrico, il problema $(E, (0, 0))$ ha soluzione (1, 1) (assioma 4) e quindi, essendo $G \subset E$, la soluzione del problema $(G, (0, 0))$ è (1,1) (assioma 5). Per verificare $G \subset E$ si consideri per assurdo un punto $g \in G$, $g \notin E$. Per la convessità di G il segmento $[(1, 1), g] \subset G$ e contiene punti in cui il prodotto di Nash è migliore che in (1, 1). ♣

Osservazione 3.3.1

- *Se il payoff di un giocatore è costante su F, allora il prodotto di Nash è identicamente nullo.*
- *La soluzione di Nash può essere caratterizzata dalla seguente proprietà:*

$$F \subseteq H = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid h(x) \leq h(N_S)\}$$

dove $h(x_1, x_2) = x_1(N_{S2} - d_2) + x_2(N_{S1} - d_1)$.
Geometricamente la proprietà dice che la soluzione di Nash identifica una retta tangente a F nel punto soluzione che genera l'insieme H contenente F; tale retta forma con l'asse delle ascisse un angolo opposto a quello formato dalla retta passante per d e per N_S.



- *Nella trattazione precedente sono state fatte alcune ipotesi non necessariamente verificate:*

  1. *non è detto che il punto d influenzi nel modo esposto la soluzione;*
  2. *i decisori possono non uniformarsi al modello di von Neumann - Morgenstern.*

  Ne consegue che dati due identici problemi di contrattazione a due giocatori si può pervenire a risultati diversi, ad esempio un decisore potrebbe essere più rigido in un caso che nell'altro.

Il problema di contrattazione è alla base di numerosi concetti di soluzione tra i quali l'insieme di contrattazione (Bargaining set) di Aumann e Maschler (1964), il Kernel introdotto da Davis e Maschler (1965) e il nucleolo dovuto a Schmeidler (1969).

3.3.2 Altre soluzioni

L'assioma 5 è stato oggetto di revisione da parte di Kalai-Smorodinsky (1975). Essi hanno proposto il seguente:

5'. Monotonia individuale

Sia $d \in G \subset F$.

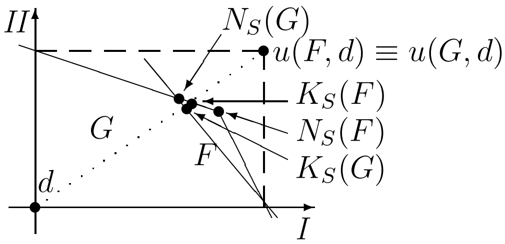
Se $u_1(G,d) = u_1(F,d)$ allora $\Phi_2(G,d) \leq \Phi_2(F,d)$ e se $u_2(G,d) = u_2(F,d)$ allora $\Phi_1(G,d) \leq \Phi_1(F,d)$, dove $u(F,d)$ è il punto *utopia* del problema (F,d), cioè $u_i(F,d) = max\ \{x_i \mid x \in F\}, i = 1,2$.

Kalai e Smorodinsky hanno proposto la seguente soluzione:

$$K_S = argmax\ \left\{ x \in F \,\middle|\, \frac{x_1 - d_1}{u_1(F,d) - d_1} = \frac{x_2 - d_2}{u_2(F,d) - d_2} \right\}$$

L'assioma 5' è violato dalla soluzione di Nash, come mostra il seguente esempio.

Esempio 3.3.1 (Soluzioni di Nash e di Kalai-Smorodinsky) *Si consideri la seguente situazione:*



Passando da F a G, il punto utopia è invariato ma $N_{S2}(G) > N_{S2}(F)$, mentre $K_{S2}(G) < K_{S2}(F)$. $\diamondsuit$

Data l'importanza del problema di contrattazione sono state proposte altre soluzioni, tra cui:

Soluzione Egualitaria

$$E_S = argmax\ \{x \in F |\ x_1 - d_1 = x_2 - d_2\}$$

Soluzione λ-Egualitaria

$$\lambda - E_S = argmax\ \{x \in F |\ \lambda_1(x_1 - d_1) = \lambda_2(x_2 - d_2)\}$$

Soluzione delle Aree uguali

$$A_S\ t.c A\left(\left\{d + \mathbb{R}^2_{\geq}\right\} \cap \{x \in F \mid x_1 \geq (A_S)_1\}\right) = A\left(\left\{d + \mathbb{R}^2_{\geq}\right\} \cap \{x \in F \mid x_2 \geq (A_S)_2\}\right)$$

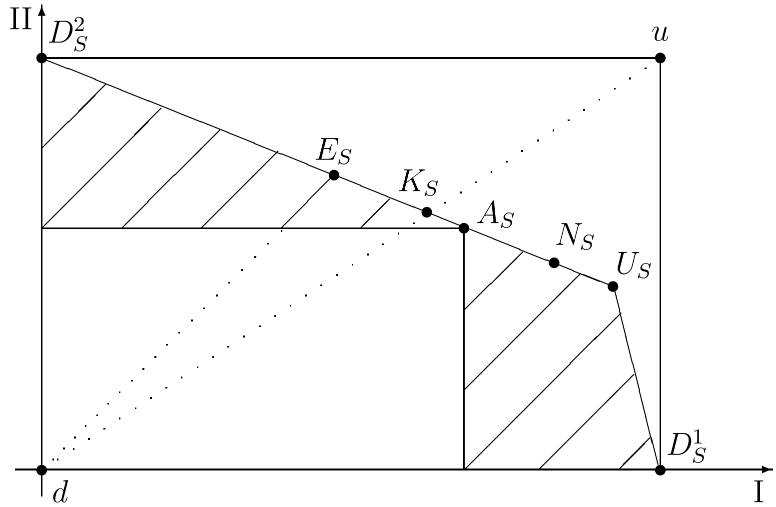
Soluzione Dittatoriale

$$D_S^i = argmax\ \{x_i | x \in F, x_j = d_j, j \neq i\}$$

Soluzione Utilitaria

$$U_S = argmax\ \{x_1 + x_2 | x \in F\}$$

La figura seguente rappresenta le differenti soluzioni proposte:



3.4 Giochi di mercato

Un altro interessante esempio di gioco NTU è dato dai giochi di mercato, introdotti da Edgeworth (1881) e rielaborati da Shubik (1959).

Economia di puro scambio

Sia N l'insieme degli agenti (giocatori); ogni agente $i \in N$ ha una "dotazione iniziale" , cioè un paniere di beni $w^i \in \mathbb{R}^\ell_\geq$ dove ℓ è il numero di beni considerati, e una relazione di preferenza $\sqsupseteq_i$ definita su $\mathbb{R}^\ell_\geq$; a partire dalla relazione di preferenza si può definire per ogni giocatore i una opportuna funzione di utilità $u_i : \mathbb{R}^\ell_\geq \to \mathbb{R}$ che assegna un valore ai beni del giocatore.

Gli agenti possono adottare una ridistribuzione $(x^i)_{i\in N}$ del complesso delle dotazioni iniziali, in modo che $\sum_{i\in N} x^i = \sum_{i\in N} w^i$. Questa è una versione semplificata del modello di Walras di equilibrio economico generale, senza la produzione e i prezzi di equilibrio.

Ad un'economia di puro scambio si può associare un gioco NTU $G = (N, V)$ dove:

- N è l'insieme degli agenti;
- $V(S) = \big\{(z_i)_{i\in S} | \exists (x^i)_{i\in N}, x^i \in \mathbb{R}^\ell_\geq$ con $x^j = w^j$ se $j \in N \setminus S$, $\sum_{i\in S} x^i = \sum_{i\in S} w^i, z_i = u_i(x^i)\big\}$

$V(S)$ esprime la possibilità dei giocatori di S di ridistribuire tra di loro solo le proprie dotazioni iniziali.

Si cercano le ridistribuzioni $\bar{x}$ per cui non esiste alcuna coalizione S che possa ridistribuire le proprie dotazioni iniziali in modo che ogni giocatore di S preferisca la nuova distribuzione rispetto a $\bar{x}$, cioè:

$$\nexists S \subset N, \nexists y \in V(S) \ t.c. \ u_i(y^i) > u_i(\bar{x}^i) \qquad \forall\, i \in S$$

oppure:

$$\nexists S \subset N, \nexists y \in V(S) \ t.c. \ y^i \sqsupset_i \bar{x}^i \qquad \forall\, i \in S$$

con $\sum_{i \in N} x^i = \sum_{i \in N} w^i$.

Osservazione 3.4.1

- *Le ridistribuzioni $\bar{x}$ precedenti costituiscono il* nucleo *del gioco in quanto non possono essere migliorate da un giocatore senza danneggiare qualche altro giocatore.*

3.5 Giochi cooperativi a pagamenti laterali

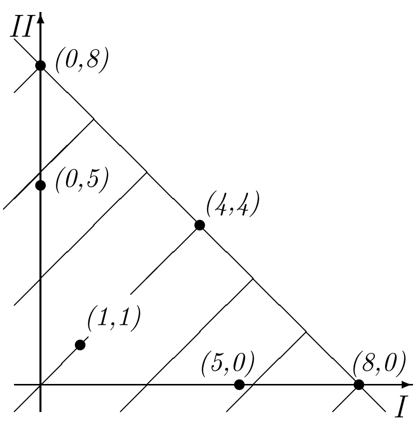
In questi giochi introdotti da Von Neumann e Morgenstern (1944) i giocatori possono stipulare accordi vincolanti e possono ripartirsi la vincita con un accordo al di fuori delle regole del gioco, la cui validità può estendersi anche oltre la fine del gioco.

Il problema può essere come trasferire la vincita o utilità poichè i giocatori possono avere differenti funzioni di utilità.

Definizione 3.5.1 *Un gioco TU è una coppia $G = (N, v)$ dove N è l'insieme dei giocatori e v è la funzione caratteristica, con $v(\emptyset) = 0$.*

Se i valori della funzione v sono negativi si ha un *gioco di costi* o cost game (N, c) in cui si pone $c = -v$, in modo da operare con quantità non negative.

Esempio 3.5.1 (Dilemma del prigioniero) *In questo caso sono possibili tutte le vincite aventi somma non superiore a 8. Ad esempio è possibile la vincita (8, 0), nel caso in cui il giocatore I prende la sua vincita (4) e la vincita del giocatore II (4).*
Quindi si ottiene:



$$\begin{aligned} &v(\emptyset) = 0 \\ &v(I) = 1 \\ &v(II) = 1 \\ &v(N) = 8 = max\{f_I + f_{II}\} \end{aligned}$$

$\diamond$

Esempio 3.5.2 (Gioco dei guanti) *Due insiemi di giocatori, L ed R, possiedono dei guanti; i giocatori di L possiedono solo guanti sinistri mentre i giocatori di R possiedono solo guanti destri. Il valore di una coalizione di giocatori è data dal numero di paia di guanti che riescono a formare. In generale ogni giocatore possiede un solo guanto. Nel caso in cui i giocatori di L siano 1 e 2 e i giocatori di R siano 3 e 4 si ha il seguente gioco:*

$$\begin{array}{ll} N = \{1,2,3,4\} & \\ v(i) = 0 & \forall\ i \in N \\ v(12) = v(34) = 0 & \\ v(S) = 1 & \textit{se } |S| = 2 \textit{ e } S \neq \{12\}, S \neq \{34\} \textit{ oppure se } |S| = 3 \\ v(N) = 2 & \end{array}$$

♢

Definizione 3.5.2 *Un gioco $G = (N, v)$ si dice monotono se $v(S) \leq v(T),\ \forall\ S \subseteq T$.*

Definizione 3.5.3 *Un gioco $G = (N, v)$ si dice convesso se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:*

- $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T),\ \forall\ S, T \subseteq N$.
- $v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T),\ \forall\ S \subset T \subseteq N \setminus \{i\}$.

Definizione 3.5.4 *Un gioco $G = (N, v)$ si dice semplice 0-1 o semplice se le coalizioni possono assumere solo i valori 0 e 1.*
Se una coalizione ha valore 1 è detta vincente, se ha valore 0 è detta perdente. Solitamente la grande coalizione è vincente.

Definizione 3.5.5 *Un gioco $G = (N, v)$ si dice coesivo se per ogni partizione di N $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ si ha:*

$$\sum_{i=1,\ldots,k} v(S_i) \leq v(N)$$

Osservazione 3.5.1

- *Nella definizione di monotonia non si tiene conto della cardinalità delle coalizioni.*
- *L'equivalenza delle definizioni di convessità è oggetto di un teorema.*
- *I giochi semplici trovano applicazione nelle situazioni in cui una coalizione è caratterizzata dal riuscire a conseguire o meno un determinato risultato, come nei giochi di maggioranza, utilizzati in politica.*
- *La coesività è più debole della superadditività ed esprime la "convenienza" dei giocatori a formare la grande coalizione, piuttosto che riunirsi in sottocoalizioni. L'importanza deriva dal fatto che in generale i concetti di soluzione più comuni costituiscono una ripartizione del valore della grande coalizione.*

Le soluzioni di un gioco TU possono essere raggruppate in due famiglie:

- *soluzioni insiemistiche* che individuano un insieme di vettori payoff che ripartiscono il valore del gioco tra tutti i giocatori;
- *soluzioni puntuali* che individuano una sola ripartizione e che costituiscono l'attuale tendenza in quanto più simili all'idea classica di soluzione di un problema.

Capitolo 4

Soluzioni insiemistiche di un gioco TU

4.1 Imputazioni

Un'idea per determinare le singole vincite può essere risolvere un sottogioco ristretto ai giocatori di ciascuna coalizione, oppure suddividere in parti uguali la vincita, trascurando il contributo dei singoli giocatori; esistono però altri metodi più complessi che meglio tengono conto del ruolo svolto da ciascun giocatore e che definiscono altri concetti di soluzione.

Definizione 4.1.1 *Dato un gioco $G = (N, v)$ si dice imputazione o ripartizione del valore del gioco o soluzione del gioco un vettore $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tale che:*

$$\begin{array}{ll} \sum_{i \in N} x_i = v(N) & \textit{ipotesi di efficienza} \\ x_i \geq v(i); i = 1, \dots, n & \textit{ipotesi di forza dei giocatori o razionalità individuale} \end{array}$$

Nel caso di un cost game la razionalità individuale richiede $x_i \leq c(i)$.

L'insieme di tutte le imputazioni si indica con $E(v)$.

Definizione 4.1.2 *Se per un gioco $G = (N, v)$ si ha:*

$$\sum_{i \in N} v(i) = v(N)$$

allora $E(v)$ ha come unico elemento $x = (v(1), v(2), \dots, v(n))$; in questo caso il gioco è detto inessenziale e essenziale altrimenti.

Per la razionalità individuale una imputazione deve assegnare ad ogni giocatore almeno quanto egli può ottenere da solo. Pertanto le imputazioni costituiscono un primo passo verso la determinazione della ripartizione delle vincite e ogni concetto di soluzione dovrà soddisfare questa condizione, cioè dovrà essere una imputazione. D'altra parte se il gioco è essenziale esistono più imputazioni possibili e si ripropone il problema di scegliere la soluzione. Infatti poichè la somma degli elementi delle imputazioni è costante se due imputazioni x e y sono distinte esiste almeno un giocatore k per cui $x_k > y_k$ e almeno un giocatore h per cui $x_h < y_h$.

Definizione 4.1.3

- *Date $x, y \in E(v)$ e una coalizione S si dice che x domina y mediante $S, x \succ_S y$, se:*

  1. $x_i > y_i \qquad \forall i \in S$
  2. $x(S) \leq v(S)$

  dove $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$.

- *Date $x, y \in E(v)$ si dice che x domina y, $x \succ y$, se esiste S tale che $x \succ_S y$.*

La dominanza non è riflessiva, nè antisimmetrica, nè transitiva.

Esempio 4.1.1 (Non antisimmetria) *Sia dato il seguente gioco:*

$$\begin{array}{l} N = \{1,2,3,4\} \\ v(i) = 0 \\ v(i,j) = v(i,j,k) = v(N) = 1 \qquad \forall i,j,k \end{array}$$

Date le seguenti imputazioni $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ e $y = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ si ha:

$$x \succ_{\{1,2\}} y \text{ e } y \succ_{\{3,4\}} x \qquad \diamondsuit$$

4.2 Insiemi stabili

Questo concetto di soluzione è stato proposto da Von Neumann - Morgenstern (1944) come la soluzione dei giochi TU e privilegia alcune imputazioni rispetto ad altre.

Definizione 4.2.1 *Un insieme $V \subset E(v)$ si dice stabile se:*

1. *dati $x, y \in V$ si ha $x \not\succ y$ e viceversa* — *stabilità interna*
2. *dato $x \notin V$, $\exists y \in V$ per il quale si ha $y \succ x$* — *stabilità esterna*

Un insieme stabile contiene la soluzione ma la decisione dipende da altre informazioni non espresse dalla forma caratteristica.

Un gioco può avere più insiemi stabili.

Esempio 4.2.1 (Maggioranza semplice) *Gli insiemi stabili sono:*

- $\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right),\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\} \subset E(v)$
- $V_{1,c} = \{c, t, 1-c-t\}$
- $V_{2,c} = \{1-c-t, c, t\}$
- $V_{3,c} = \{t, 1-c-t, c\}$

con $c \in [0, \frac{1}{2}[$ *funzione delle tradizioni*
$t \in [0, 1-c]$ *funzione della forza* $\diamondsuit$

Gli insiemi stabili oltre a essere soluzioni insiemistiche e non essere unici, possono non esistere; nel 1968 Lucas ha dato un esempio di gioco senza insiemi stabili, indebolendo ulteriormente questo concetto di soluzione.

4.3 Nucleo

Probabilmente il concetto di soluzione insiemistico più interessante per numerose classi di giochi è il nucleo; è stato introdotto da Gillies (1953 e 1959). L'idea di base è quella di considerare il comportamento delle imputazioni rispetto alle coalizioni, richiedendo:

$$x(S) \geq v(S) \quad S \subset N \qquad \text{ipotesi di razionalità della coalizione}$$

Definizione 4.3.1 *Si dice nucleo di un gioco, o core, l'insieme:*

$$C(v) = \{x \in E(v) | x(S) \geq v(S), \forall\ S \subset N\}$$

Nel caso di un cost game c la razionalità della coalizione richiede $x(S) \leq c(S), \forall\ S \subset N$.

Osservazione 4.3.1

- *Le imputazioni non dominate costituiscono il nucleo del gioco.*
- *Il nucleo può essere vuoto come nel gioco di maggioranza semplice e in generale nei giochi essenziali a somma costante.*
- *Il nucleo ha un aspetto normativo, cioè dice quali soluzioni non bisogna scegliere (quelle che non stanno nel nucleo) se il nucleo è non vuoto. Ovviamente se il nucleo è vuoto non si può concludere che la grande coalizione non si forma, ma solo che è caratterizzata da una più o meno elevata instabilità.*

Esempio 4.3.1 (Nucleo del gioco dei guanti) *Riferendosi all'Esempio 3.5.2, il nucleo è:*

$$C(v) = \{(\alpha, \alpha, 1-\alpha, 1-\alpha) s.t. 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

In generale se $L = \{1, ..., n_l\}$ *e* $R = \{1, ..., n_r\}$ *si ha:*
se $n_l = n_r$*:*

$$C(v) = \{(\alpha, ..., \alpha, 1-\alpha, ..., 1-\alpha) s.t. 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

se $n_l < n_r$*:*

$$C(v) = \{(\underbrace{1, ..., 1}_{1,...,n_l}, \underbrace{0, ..., 0}_{1,...,n_r})\}$$

se $n_l > n_r$*:*

$$C(v) = \{(\underbrace{0, ..., 0}_{1,...,n_l}, \underbrace{1, ..., 1}_{1,...,n_r})\}$$

Il nucleo evidenzia il comportamento del mercato quando uno tra due beni complementari è carente. $\diamondsuit$

4.3.1 Bilanciamento

E' interessante poter stabilire se un gioco ha nucleo vuoto o meno, in quanto ciò fornisce indicazioni sulla stabilità della grande coalizione. Si noti che la coesività o la superadditività non danno informazioni precise; ad esempio il gioco di maggioranza semplice ha nucleo vuoto ma è superadditivo e quindi anche coesivo; d'altra parte un gioco può non essere superadditivo, ma avere nucleo non vuoto, come nel seguente esempio.

Esempio 4.3.2 (Gioco non superadditivo a nucleo non vuoto) *Si consideri il gioco TU:*

$$\begin{array}{ll} N = \{1, 2, 3\} & \\ v(S) = 1 & \textit{se } S \neq N \\ v(N) = 3 & \end{array}$$

Il gioco non è superadditivo poichè $v(1) + v(2) = 2$ *e* $v(12) = 1$ *ma ha nucleo non vuoto in quanto* $x = (1, 1, 1) \in C(v)$*.* $\diamondsuit$

Invece se un gioco non è coesivo ha nucleo vuoto, in quanto esisterebbero una allocazione x e una partizione $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ per cui si avrebbe:

$$x(N) = v(N) < \sum_{i=1,...,k} v(S_i) \leq \sum_{i=1,...,k} x(S_i) = x(N)$$

E' necessario avere un criterio più preciso che permetta una caratterizzazione completa ma semplice.

Dalla definizione si ricava che le imputazioni del nucleo possono essere caratterizzate come le soluzioni del problema lineare:

$$\begin{array}{ll} min & z = \sum_{i \in N} x_i \\ s.t. & \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \qquad \forall S \subseteq N \end{array}$$

per le quali $z^* = v(N)$.

Il duale del problema precedente si può scrivere come:

$$\begin{array}{lll} max & w = \sum_{S \subseteq N} y_s v(S) & \\ s.t. & \sum_{S \ni i} y_S = 1 & \forall i \in N \\ & y_S \geq 0 & \forall S \subseteq N \end{array}$$

per le quali $w^* = v(N)$.

Questo permette di stabilire il seguente teorema.

Teorema 4.3.1 *Un gioco v ha nucleo non vuoto se e solo se esiste una soluzione del problema primale con $z^* = v(N)$ o equivalentemente (per il primo teorema della dualità) esiste una soluzione del problema duale con $w^* = v(N)$.*

Purtroppo l'utilità di questo teorema è molto limitata in quanto la difficoltà di verificare una delle tre condizioni è equivalente. Si può fare un passo avanti introducendo le collezioni bilanciate.

Definizione 4.3.2

- *Una collezione $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ di sottoinsiemi di N è detta bilanciata se esistono m numeri non negativi $y_1, y_2, \ldots, y_m$ detti coefficienti di bilanciamento, tali che:*

$$\sum_{S_j \ni i} y_j = 1 \qquad \forall i \in N$$

- *Una collezione bilanciata è detta minimale se nessuna sottocollezione è bilanciata.*

- *Un gioco è detto bilanciato se per ogni collezione bilanciata minimale $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ con coefficienti di bilanciamento $y_1, y_2, \ldots, y_m$, si ha:*

$$\sum_{j=1,\ldots,m} y_j v(S_j) \leq v(N)$$

Proprietà

- Ogni collezione bilanciata è unione di collezioni bilanciate minimali.

- Una collezione bilanciata è minimale se e solo se i coefficienti di bilanciamento sono unici.

- Le collezioni bilanciate non dipendono dalla funzione caratteristica, ma solo da N.

Esempio 4.3.3 (Collezioni bilanciate I)

1. *Ogni partizione di N è una collezione bilanciata, con coefficienti unitari.*
2. *Sia $N = \{1, 2, 3\}$; $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ è una collezione bilanciata con coefficienti $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. In generale per ogni N la collezione di $\binom{n}{s}$ sottoinsiemi distinti di s elementi è bilanciata con coefficienti $\binom{n-1}{s-1}^{-1}$.* ♢

A questo punto si può migliorare la caratterizzazione dei giochi a nucleo non vuoto.

Teorema 4.3.2 (Bondareva, 1963 - Shapley, 1967) *Un gioco $G = (N, v)$ ha nucleo non vuoto se e solo se è bilanciato.*

<u>Dimostrazione</u>

$$C(v) \neq \emptyset \iff v(N) = min \left\{ \sum_{i=1,\dots,n} x_i | \; x(S) \geq v(S) \; \forall \; S \subseteq N \right\} \iff$$

$$\iff v(N) = max \left\{ \sum_{S \subseteq N} y_S v(S) | \sum_{S \ni i} y_S = 1 \; \forall i \in N, y_S \geq 0 \; \forall \; S \subseteq N \right\} \iff$$

$$\iff \sum_{S \subseteq N} y_S v(S) \leq v(N)$$

♣

Osservazione 4.3.2

- *Il teorema di Bondareva-Shapley considera un sistema lineare generato da un sottoinsieme dei vincoli del problema duale associato al nucleo.*
- *Per un gioco superadditivo il teorema di Bondareva-Shapley è vero per le partizioni di N, quindi è sufficiente verificarlo per le altre collezioni bilanciate minimali.*
- *Il teorema è particolarmente utile per dimostrare che un gioco ha nucleo vuoto in quanto è sufficiente trovare una collezione bilanciata che non verifica la condizione.*
- *Un gioco a nucleo non vuoto viene anche detto bilanciato.*

Esempio 4.3.4 (Collezioni bilanciate II)

1. *Un gioco a tre giocatori superadditivo è bilanciato se e solo se $v(12)+v(13)+v(23) \leq 2 \; v(123)$ poichè $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ è l'unica collezione bilanciata minimale con coefficienti $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.*

2. *Sia dato il gioco:*

$$N = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = v(14) = v(24) = 0; v(23) = v(34) = 2$$
$$v(12) = v(13) = v(123) = 3; v(124) = 4; v(134) = v(234) = 5; v(N) = 6$$

Il gioco non è bilanciato in quanto $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ *è una collezione bilanciata con coefficienti* $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *per la quale si ha:*

$$\frac{1}{2}v(12) + \frac{1}{2}v(134) + \frac{1}{2}v(234) = \frac{13}{2} > 6 = v(N) \qquad \diamondsuit$$

4.4 Esempi di giochi e nucleo

Questo paragrafo è dedicato a presentare alcune classi di giochi, per meglio approfondire il concetto di nucleo.

4.4.1 Bankruptcy game

Dopo il fallimento di una ditta un gruppo di creditori deve dividersi il capitale residuo, tenendo conto delle richieste di ciascuno. Formalmente un problema di bancarotta è una tripla $\mathcal{B} = (N, c, E)$, dove $N = \{1, ..., n\}$ è l'insieme dei creditori, $c = \{c_1, ..., c_n\}$ è il vettore delle richieste ed E è il capitale, con $E < \sum_{i \in N} c_i = C$; per semplicità un problema di bancarotta si può indicare come $(E; c_1, ..., c_n)$. Più in generale si ha un problema di bancarotta quando si deve allocare una risorsa insufficiente a coprire le richieste.

E' facile verificare che ogni ripartizione ammissibile ("razionale) del capitale, $x = \{x_1, ..., x_n\}$ deve soddisfare le seguenti condizioni:

$$\sum_{i \in N} x_i = E$$
$$0 \leq x_i \leq c_i, \qquad i \in N$$

Tra le varie possibili soluzioni tre sono particolarmente importanti: proporzionale ($PROP$), Constrained Equal Award (CEA) e Constrained Equal Loss (CEL).

- $PROP$ - Le quote assegnate sono proporzionali alle richieste di ciascuno:

$$PROP_i = \frac{c_i}{C}E \qquad i \in N$$

- CEA - Le quote assegnate sono uguali per tutti, col vincolo di non superare le richieste di ciascuno:

$$CEA_i = \min(\alpha, c_i) \qquad i \in N$$

dove α è l'unico valore reale positivo per cui $\sum_{i \in N} CEA_i = E$

- CEL - Le quote assegnate sono uguali alle richieste di ciascuno diminuite di una quantità uguale per tutti, col vincolo di non assegnare quote negative:

$$CEL_i = \max(c_i - \beta, 0) \qquad i \in N$$

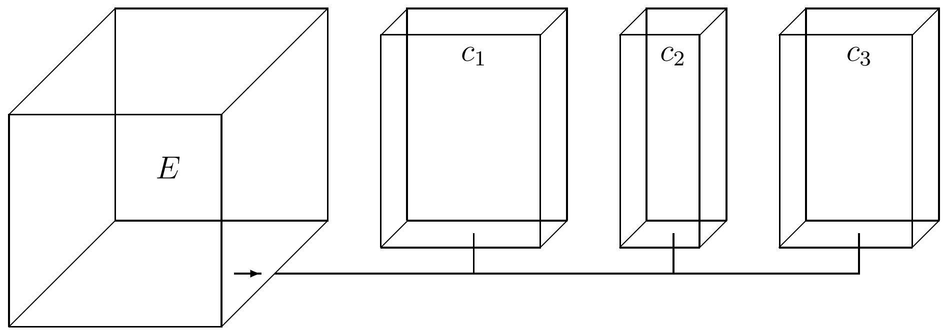
dove β è l'unico valore reale positivo per cui $\sum_{i \in N} CEL_i = E$

Esempio 4.4.1 (Soluzioni) *Si consideri il problema di bancarotta* $(15; 3, 6, 7, 14)$.
$PROP = (1.5, 3, 3.5, 7)$
$CEA = (3, 4, 4, 4)$
$CEL = (0, 2, 3, 10)$ $\diamondsuit$

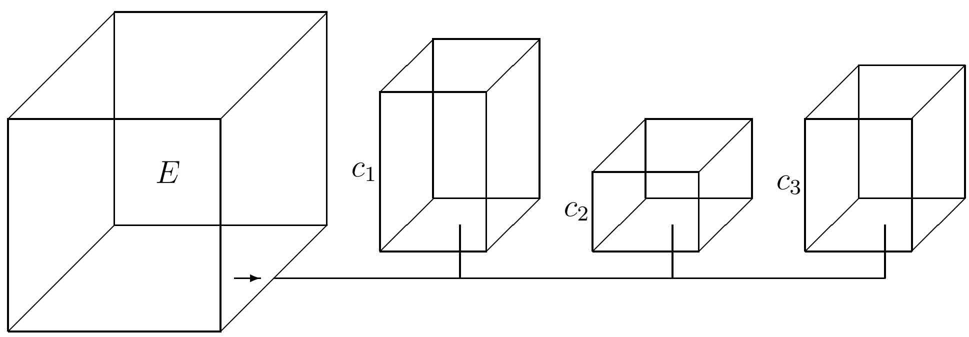
$PROP$ è la soluzione più intuitiva, CEA è quella che più protegge i piccoli creditori, CEL è quella più favorevole ai grossi creditori.

Interpretazione dei vasi comunicanti

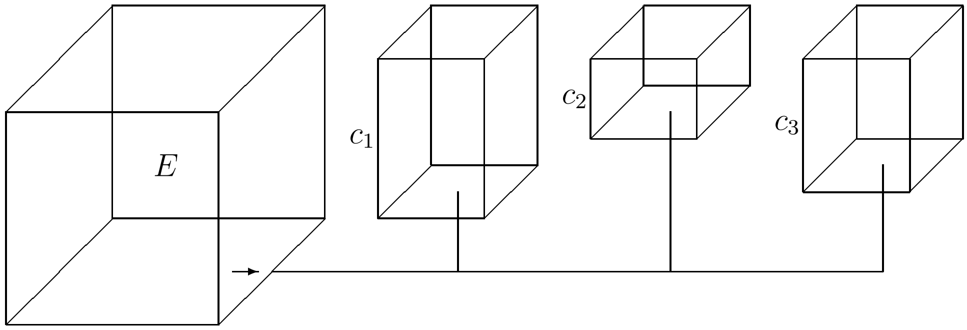
Dato un problema di bancarotta è possibile ottenere le soluzioni $PROP$, CEA e CEL da opportune situazioni di vasi comunicanti.
$PROP$ corrisponde a vasi di sezione $c_i, i \in N$, con le basi inferiori allo stesso livello.



CEA corrisponde a vasi di sezione unitaria e di altezza $c_i, i \in N$, con le basi inferiori allo stesso livello.



CEL corrisponde a vasi di sezione unitaria e di altezza $c_i, i \in N$, con le basi superiori allo stesso livello.



Dato un problema di bancarotta si possono definire due giochi TU (Aumann e Maschler, 1985 - Curiel, Maschler e Tijs, 1987 - Herrero e Villar, 2001), uno pessimistico e uno ottimistico; per entrambi l'insieme dei giocatori è N mentre la funzione caratteristica del gioco pessimistico è:

$$v_P(S) = max \left(0, E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i \right) \qquad S \subseteq N$$

e quella del gioco ottimistico è:

$$v_O(S) = min \left(E, \sum_{i \in S} c_i \right) \qquad S \subseteq N$$

Nel gioco pessimistico se alcuni giocatori vogliono formare una coalizione, devono soddisfare le richieste degli altri, ovviamente senza rimetterci, mentre nel gioco ottimistico se alcuni giocatori formano una coalizione hanno diritto a soddisfare le loro richieste, col massimo dell'intero capitale.

Il gioco ottimistico, a differenza di quello pessimistico, non è realistico, come mostra il seguente semplice esempio.

Esempio 4.4.2 (Inconsistenza del gioco ottimistico) *Si consideri il problema di bancarotta* $(5; 3, 4)$*. I due giochi sono definiti rispettivamente da:*

$$v_O(1) = 3; v_O(2) = 4; v_O(12) = 5$$
$$v_P(1) = 1; v_P(2) = 2; v_P(12) = 5$$

per cui il gioco ottimistico dice che i due giocatori separatamente possono ottenere rispettivamente 3 *e* 4*, mentre il capitale è solo* 5*.* $\diamondsuit$

Il nucleo del gioco pessimistico coincide con l'insieme delle soluzioni ammissibili del problema di bancarotta, cioè:

$$x \in core(v_P) \iff \begin{cases} \sum_{i \in N} x_i = E \\ 0 \le x_i \le c_i, \qquad i \in N \end{cases}$$

$\Rightarrow$ La prima è la condizione di efficienza. Per la seconda condizione per ogni $i \in N$ si ha $x_i \ge v_P(i) \ge 0$ e $E - x_i = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j \ge v_P(N \setminus \{i\}) \ge E - c_i \Rightarrow x_i \le c_i$.

$\Leftarrow$ La condizione di efficienza è ovviamente soddisfatta. Per ogni $S \subset N$ si hanno due casi:

1) se $v_P(S) = 0 \leq \sum_{i \in S} x_i$;

2) se $v_P(S) = E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i \leq E - \sum_{i \in N \setminus S} x_i = \sum_{i \in S} x_i$.

4.4.2 Fixed tree game

Un insieme di agenti è collegato alla sorgente di un servizio tramite una fissata connessione ad albero; ciascun agente corrisponde ad un vertice dell'albero. Il servizio è pagato in base all'utilizzo ma restano i costi di manutenzione. E' possibile associare al problema un gioco TU che ha come giocatori l'insieme di agenti $N = \{1, ..., n\}$ e come funzione caratteristica:

$$c(S) = \min_{T \supseteq S} \left\{ \sum_{i \in T} c_i \right\} \qquad S \subseteq N$$

dove c_i è il costo di manutenzione dell'unico arco entrante nel vertice associato al giocatore i e T è una componente connessa dell'albero contenente la sorgente.

Il nucleo di un fixed tree game è dato dall'insieme delle allocazioni che si ottengono ripartendo il costo di ciascun arco solo tra i giocatori della componente connessa non contenente la sorgente che si ottiene eliminando l'arco stesso.

4.4.3 Weighted majority game

I rappresentanti in un consiglio di amministrazione vogliono valutare la loro situazione ed esaminare le possibili alleanze. Formalmente un problema di maggioranza pesata è una tripla $\mathcal{W} = (N, w, q)$, dove $N = \{1, ..., n\}$ è l'insieme dei consiglieri, $w = \{w_1, ..., w_n\}$ è il vettore dei "pesi, ad esempio il numero di azioni e q è la quota di maggioranza, cioè il numero di voti necessari per approvare una mozione, con $q < \sum_{i \in N} w_i$; per semplicità si indica come $(q; w_1, ..., w_n)$. E' possibile associare al problema un gioco TU semplice 0-1 dove l'insieme dei giocatori è N e la funzione caratteristica è:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum_{i \in S} w_i > q \quad S \text{ vincente} \\ 0 & \text{se } \sum_{i \in S} w_i \leq q \quad S \text{ perdente} \end{cases}$$

Il gioco risulta monotono e spesso si suppone anche $q \geq \frac{1}{2} \sum_{i \in N} w_i$ in modo che se S è vincente $N \setminus S$ sia perdente.

Questi giochi sono più utilizzati nei consigli di amministrazione che in politica, in quanto nel secondo caso la formazione di una maggioranza è legata non solo ai numeri, ma anche alla collocazione dei partiti.

Esempio 4.4.3 (Consiglio di sicurezza dell'ONU) *Il Consiglio di sicurezza dell'ONU è composto da cinque membri permanenti con diritto di veto e dieci membri eletti. Un provvedimento è approvato se riceve almeno 9 voti e nessun veto. Questo problema può essere rappresentato come un problema di maggioranza pesata in cui $w_i = 1$ se i è un membro eletto e $w_i = 7$ se i è un membro permanente e $q = 38$.* $\diamondsuit$

Un gioco di maggioranza pesata ha solitamente nucleo vuoto, salvo nel caso in cui esistano giocatori di veto; un giocatore i è detto di veto se $v(S) = 0$ se $i \notin S$. Detto V l'insieme dei giocatori di veto e data una allocazione x tale che $\sum_{i \in N} x_i = 1, x_i \geq 0, i \in N$ si ha:

$$x \in core(v) \iff \sum_{i \in V} x_i = 1$$

$\Rightarrow$ E' sufficiente verificare che $x_i = 0, i \in N \setminus V$.
$i \in N \setminus V \Rightarrow v(N \setminus \{i\}) = 1$ (altrimenti i sarebbe di veto) per cui $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = 1 \Rightarrow x_i = 0$.

$\Leftarrow$ Per ogni $S \subset N$ si hanno due casi:

1) $v(S) = 0 \leq \sum_{i \in S} x_i$;

2) $v(S) = 1 \Rightarrow V \subseteq S \Rightarrow \sum_{i \in S} x_i \geq \sum_{i \in V} x_i = 1$.

Osservazione 4.4.1

- *Se il giocatore i è di veto non è vero che $i \in S \Rightarrow v(S) = 1$.*

4.4.4 Sequencing game

Alcuni agenti attendono un servizio e ogni agente conosce il proprio tempo di servizio e il costo per unità di tempo. Due agenti adiacenti possono scambiarsi di posto se questo è vantaggioso. Formalmente un problema di sequenziamento è una quadrupla $\mathcal{S} = (N, \sigma_0, \alpha, s)$ dove $N = \{1, ..., n\}$ è l'insieme degli agenti, σ_0 è una permutazione che definisce l'ordine iniziale, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ è il vettore dei costi per unità di tempo e $s = (s_1, ..., s_n)$ è il vettore dei tempi di servizio. Dato un ordinamento σ si può definire il costo C_σ come la somma dei costi degli agenti, ciascuno dei quali è dato dal tempo trascorso per il costo unitario, cioè:

$$C_\sigma = \sum_{i \in N} \alpha_i \left(\sum_{j \in P(\sigma, i)} s_j + s_i \right)$$

dove $P(\sigma, i)$ è l'insieme degli agenti che precedono i nell'ordinamento σ. Il problema è determinare l'ordinamento ottimale σ^* degli agenti.

Smith (1956) ha dimostrato che l'ordinamento ottimale si può ottenere ordinando gli agenti secondo indici di urgenza debolmente decrescenti, dove l'urgenza è $u_i = \frac{\alpha_i}{s_i}$, $i \in N$.

Esempio 4.4.4 (Problema di sequenziamento) *Si consideri il problema di sequenziamento definito da* $N = \{1, 2, 3\}, \sigma_0 = (1, 2, 3), \alpha = (5, 9, 8), s = (5, 3, 4)$*; il costo iniziale è* $C_{\sigma_0} = 25 + 72 + 96 = 193$ *e gli indici di urgenza sono* $u = (1, 3, 2)$*, per cui* $\sigma^* = (2, 3, 1)$ *con costo* $C_{\sigma^*} = 27 + 56 + 60 = 143$*.* ♢

E' possibile associare al problema un gioco TU dove l'insieme dei giocatori è N e la funzione caratteristica è definita come segue. Una coalizione $T \subseteq N$ è detta connessa secondo σ se per ogni $i, j \in T$ e $k \in N$ si ha $\sigma(i) < \sigma(k) < \sigma(j) \Rightarrow k \in T$. Scambiando due giocatori i, j la variazione di costo è $\alpha_j s_i - \alpha_i s_j$; la variazione è positiva se e solo se $u_i < u_j$; se la variazione è negativa non si ha lo scambio. Il guadagno di uno scambio è $g_{ij} = max\{0, \alpha_j s_i - \alpha_i s_j\}$, quindi il guadagno di una coalizione T connessa secondo σ è:

$$v(T) = \sum_{j \in T} \sum_{i \in P(\sigma,j) \cap T} g_{ij}$$

In generale data una coalizione $S \subseteq N$, l'ordine σ induce una partizione in componenti connesse, S/σ, per cui si ha:

$$v(S) = \sum_{T \in S/\sigma} v(T) \qquad S \subset N$$

Esempio 4.4.5 (Sequencing game) *Riferendosi all'Esempio 4.4.4 la funzione caratteristica è:*

S	1	2	3	12	13	23	123
$v(S)$	0	0	0	30	0	0	50

$v(23) = 0$ *poichè lo scambio produrrebbe una perdita, in quanto* $u_2 > u_3$*; invece* $v(13) = 0$ *perchè la coalizione non è connessa e i giocatori* 1 *e* 3 *non possono scambiarsi anche se otterrebbero un guadagno di 20 e il giocatore* 2 *avrebbe un guadagno, poichè il tempo di servizio di* 3 *è 4 e quello di* 1 *è 5.* ♢

Questi giochi hanno nucleo non vuoto e una allocazione interessante è la Equal Gain Splitting Rule (*EGS* - Curiel , Pederzoli e Tijs, 1989), che divide in parti uguali il guadagno di ogni scambio tra i due giocatori coinvolti; cioè:

$$EGS_i = \frac{1}{2} \sum_{k \in P(\sigma,i)} g_{ki} + \frac{1}{2} \sum_{j: i \in P(\sigma,j)} g_{ij} \qquad \forall i \in N$$

Esempio 4.4.6 (EGS-Rule) *Riferendosi all'Esempio 4.4.4 i guadagni* g_{ij} *sono:*

ij	12	13	21	23	31	32
g_{ij}	30	20	0	0	0	12

e conseguentemente

$$EGS_1 = \frac{1}{2}(g_{12} + g_{13}) = 25$$

$$EGS_2 = \frac{1}{2} g_{12} + \frac{1}{2} g_{23} = 15$$

$$EGS_3 = \frac{1}{2}(g_{13} + g_{23}) = 10$$

♢

Osservazione 4.4.2

- *La soluzione EGS non è simmetrica per i giocatori* 1 *e* 2 *che sono simmetrici per il gioco ma non per il problema associato; infatti* 1 *può scambiarsi vantaggiosamente sia con* 2 *che con* 3*, mentre* 2 *può scambiarsi vantaggiosamente solo con* 1*; quindi la EGS tiene conto del ruolo effettivo di ciascun giocatore.*

- g_{21}, g_{31}, g_{32} *non vengono utilizzati perchè l'ordine iniziale dato non permette questi scambi.*

- *Una variante è* $EGS_i^{\varepsilon} = \varepsilon \sum_{k \in P(\sigma,i)} g_{ki} + (1-\varepsilon) \sum_{j: i \in P(\sigma,j)} g_{ij}, \forall i \in N, \forall \varepsilon \in [0,1]$.

4.4.5 Production game

Alcuni agenti possiedono le risorse utilizzate in un processo produttivo, che vogliono utilizzare in modo da massimizzare il valore dei beni prodotti. Formalmente un problema di produzione è una quadrupla $\mathcal{P} = (N, A, (b^i)_{i \in N}, c)$ dove $N = \{1, ..., n\}$ è l'insieme degli agenti, A è la matrice tecnologica del processo produttivo, b^i è il vettore delle risorse dell'agente i e c è il vettore dei prezzi dei beni prodotti.

E' possibile associare al problema un gioco TU dove l'insieme dei giocatori è N e la funzione caratteristica è definita come:

$$v(S) = max\ \{c^T z | Az \leq b^S, z \geq 0\} \qquad S \subseteq N$$

dove $b^S = \sum_{i \in S} b^i$ rappresenta le risorse possedute dalla coalizione S.

Il nucleo di un gioco di produzione contiene le imputazioni x tali che $x_i = b^{iT} u^*$ dove u^* è una soluzione ottimale del duale del problema di produzione:

$$\begin{array}{ll} max & c^T z \\ s.t. & Az \leq b^N \\ & z \geq 0 \end{array}$$

Osservazione 4.4.3

- *Il risultato precedente può essere esteso a tutti i giochi originati da un problema lineare (Teorema di Owen, 1975).*

4.4.6 Assignment game

Gli agenti sono divisi in due gruppi, i venditori e i compratori; ciascun venditore possiede un solo oggetto, di cui conosce la propria valutazione, e ogni compratore può acquistare un solo oggetto e conosce la propria valutazione di ogni oggetto; se un venditore ha più di un oggetto da vendere o un compratore è interessato a più oggetti si considerano più copie con identiche valutazioni. E' opportuno precisare che si tratta di oggetti che non hanno un prezzo di mercato, ma il prezzo dipende dalle valutazioni e dalle capacità di contrattazione. L'obiettivo dei giocatori di entrambi i gruppi è massimizzare il guadagno, rispetto alle proprie valutazioni. Formalmente un problema di assegnazione è una quadrupla $\mathcal{A} = (N^v, N^c, A, B)$ dove $N^v = \{1, ..., n^v\}$ è l'insieme dei venditori, $N^c = \{1, ..., n^c\}$ è l'insieme dei compratori, A è un vettore dove a_j è la valutazione che il venditore $j \in N^v$ attribuisce al proprio oggetto, B è una matrice dove b_{ij} è la valutazione che il compratore $i \in N^c$ attribuisce all'oggetto offerto dal venditore $j \in N^v$.

E' possibile associare al problema un gioco TU dove l'insieme dei giocatori è $N = N^v \cup N^c$ e la funzione caratteristica v è definita come segue:

- Se un venditore j^* e un compratore i^* formano una coalizione allora:

$$v(i^*j^*) = c_{i^*j^*} = \begin{cases} b_{i^*j^*} - a_{j^*} & \text{se } b_{i^*j^*} - a_{j^*} \geq 0 \\ 0 & \text{se } b_{i^*j^*} - a_{j^*} < 0 \end{cases}$$

- Se una coalizione S contiene più compratori che venditori, detto $i(j) \in S \cap N^c$ il compratore dell'oggetto offerto dal venditore $j \in S \cap N^v$, si ha:

$$v(S) = max \sum_{j \in S \cap N^v} c_{i(j),j}$$

- Se una coalizione S contiene più venditori che compratori, detto $j(i) \in S \cap N^v$ il venditore dell'oggetto acquistato dal compratore $i \in S \cap N^c$, si ha:

$$v(S) = max \sum_{i \in S \cap N^c} c_{i,j(i)}$$

L'insieme dei valori c_{ij} definisce un problema di assegnazione che può scriversi come:

$$\begin{array}{lll} max & z = \sum_{i \in N^c, j \in N^v} c_{ij} x_{ij} & \\ s.t. & \sum_{i \in N^c} x_{ij} \leq 1 & \forall\, j \in N^v \\ & \sum_{j \in N^v} x_{ij} \leq 1 & \forall\, i \in N^c \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall\, i \in N^c, j \in N^v \end{array}$$

dove $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ e } j \text{ si accordano} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.

In accordo al teorema di Owen, il nucleo di un gioco di assegnazione contiene le imputazioni ottenute da una soluzione ottimale del duale (Shapley e Shubik, 1972):

$$\begin{array}{lll} min & w = \sum_{j \in N^v} y_j^v + \sum_{i \in N^c} y_i^c & \\ s.t. & y_j^v + y_i^c \geq c_{ij} & \forall\, j \in N^v, \forall\, i \in N^c \end{array}$$

Osservazione 4.4.4

- *Si utilizzano solo le soluzioni ottimali duali aventi le componenti non negative per rispettare le condizioni di razionalità individuale. Infatti se* $(\bar{y}_1^v, ..., \bar{y}_{n^v}^v, \bar{y}_1^c, ..., \bar{y}_{n^c}^c)$ *è una soluzione ottimale e supponendo, senza perdita di generalità, che corrisponda all'assegnazione di k oggetti (*$k \leq min\ \{n, m\}$*) tra le coppie venditore-compratore 1-1, 2-2, ..., k-k, allora è ottimale anche* $(\bar{y}_1^v + \alpha_1, ..., \bar{y}_k^v + \alpha_k, ..., \bar{y}_{n^v}^v, \bar{y}_1^c - \alpha_1, ..., \bar{y}_k^c - \alpha_k, ..., \bar{y}_{n^c}^c)$, $\forall\ (\alpha_1, ..., \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$.

Esempio 4.4.7 (Gioco di assegnazione) *Si supponga di avere tre giocatori, dove il giocatore 1 è un venditore che valuta il proprio oggetto* $a_1 = 10$ *e i giocatori 2 e 3 sono compratori le cui valutazioni sono rispettivamente* $b_{21} = 12, b_{31} = 15$. *La funzione caratteristica del gioco è:*

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(N) = 5$$

Il nucleo è l'insieme delle imputazioni (x_1, x_2, x_3) *con* $x_1 = \alpha, x_2 = 0, x_3 = 5 - \alpha, 2 \leq \alpha \leq 5$. *Questo vuol dire che l'oggetto non viene venduto al giocatore 2 e il payoff dei giocatori 1 e 3 dipende da come si accordano, ma il prezzo deve garantire al giocatore 1 un'utilità di almeno* 2 *unità. In altre parole il prezzo di vendita deve essere almeno 12, altrimenti il giocatore 1 può accordarsi col giocatore 2, ma non più di 15, altrimenti il giocatore 3 si ritira. Si noti infine che se la valutazione del giocatore 2 fosse* $\bar{b}_{21} = 15$ *allora l'unica allocazione nel nucleo sarebbe* $(5, 0, 0)$ *cioè il prezzo di vendita sarebbe esattamente 15. Quest'esempio conferma la ben nota legge della domanda e dell'offerta.* $\diamondsuit$

Osservazione 4.4.5

- *L'esempio 4.4.7 permette alcune considerazioni di carattere economico.*
  1. *La legge dell'equilibrio tra domanda e offerta dice che il prezzo deve far síche la domanda sia uguale all'offerta, per cui se il prezzo dell'oggetto fosse inferiore a 12 vi sarebbero due acquirenti mentre se il prezzo fosse superiore a 15 non vi sarebbero acquirenti.*
  2. *Le leggi economiche non escludono, come il nucleo, un'utilità positiva per il giocatore 2; infatti il giocatore 1 potrebbe offrire al giocatore 2 parte della sua utilità in cambio di un'offerta maggiore per far síche il prezzo pagato dal giocatore 3 sia più alto oppure il giocatore 3 potrebbe offrire al giocatore 2 parte della sua utilità in cambio del suo ritiro per far síche il prezzo pagato al giocatore 1 sia più basso.*

Capitolo 5

Soluzioni puntuali di un gioco TU

Le soluzioni puntuali prendono frequentemente il nome di *indici di potere* o *valori* perchè permettono di identificare il "potere" di ciascun giocatore all'interno del gioco. In generale il termine "indice di potere" si usa per i giochi semplici, mentre per un gioco qualsiasi si preferisce il termine "valore".

5.1 Valore di Shapley (1953)

È un concetto di soluzione che si basa sul valore che ogni giocatore è in grado di aggiungere alle possibili coalizioni, cioè sul suo *contributo marginale*.

Definizione 5.1.1 *Si chiama valore di Shapley il vettore $\phi(v)$ la cui componente ϕ_i è il contributo marginale medio del giocatore i rispetto alle possibili permutazioni dei giocatori, cioè:*

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} [v(P(\pi, i)) \cup \{i\}) - v(P(\pi, i))]$$

dove $n = |N|$, π è una permutazione di N e $P(\pi, i)$ è l'insieme dei giocatori che precedono i nella permutazione π.

Il valore di Shapley per un gioco cooperativo esiste ed è unico.

Se il gioco è superadditivo (subadditivo per un cost game) il valore di Shapley è un'imputazione in quanto verifica:

$$\begin{array}{ll} \sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N) & \\ \phi_i(v) \geq v(i) & \forall i \in N \end{array}$$

ma non è necessariamente un elemento del nucleo, visto che questo può essere vuoto.

Se il gioco è convesso (concavo per un cost game) il valore di Shapley è un elemento del nucleo.

Esempio 5.1.1 (Gioco di assegnazione) *Riferendosi all'Esempio 4.4.7, dove* $v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(123) = 5$ *il valore di Shapley value è dato da:*

	Contributi marginali		
Permutazioni	*Giocatore* 1	*Giocatore* 2	*Giocatore* 3
1 2 3	$v(1) - v(\emptyset) = 0$	$v(12) - v(1) = 2$	$v(123) - v(12) = 3$
1 3 2	$v(1) - v(\emptyset) = 0$	$v(123) - v(13) = 0$	$v(13) - v(1) = 5$
2 1 3	$v(12) - v(2) = 2$	$v(2) - v(\emptyset) = 0$	$v(123) - v(12) = 3$
2 3 1	$v(123) - v(23) = 5$	$v(2) - v(\emptyset) = 0$	$v(23) - v(2) = 0$
3 1 2	$v(13) - v(3) = 5$	$v(123) - v(13) = 0$	$v(3) - v(\emptyset) = 0$
3 2 1	$v(123) - v(23) = 5$	$v(23) - v(3) = 0$	$v(3) - v(\emptyset) = 0$
ϕ_i	$\frac{17}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{11}{6}$

Il valore di Shapley riflette il valore economico del giocatore 2. $\diamondsuit$

5.1.1 Assiomi di Shapley

Il valore di Shapley può essere caratterizzato in maniera assiomatica come l'unico vettore efficiente ϕ che soddisfa i seguenti assiomi:

1. Simmetria
   Se due giocatori i, j sono simmetrici, cioè vale la proprietà $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \forall\ S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ allora $\phi_i(v) = \phi_j(v)$.

2. Dummy player
   Sia i un giocatore fittizio, cioè che ad ogni coalizione aggiunge solo il suo valore $v(i)$:

   $$v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i) \quad \forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$$

   Il valore di Shapley del giocatore i è il suo valore, cioè $\phi_i(v) = v(i)$.

3. Additività o indipendenza (assioma controverso)
   Dati due giochi u e v, sia $(u + v)$ il gioco somma definito da:

   $$(u + v)(S) = u(S) + v(S), \quad \forall\ S \subseteq N$$

   Il valore di Shapley del gioco somma è dato dalla somma dei valori di Shapley, cioè $\phi_i(u + v) = \phi_i(u) + \phi_i(v), \forall\ i \in N$.

Esempio 5.1.2 (Giocatori simmetrici e giocatore fittizio) *Sia dato il gioco* $G = (N, v)$ *dove:*

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = 1; v(12) = 4; v(13) = v(23) = 2; v(N) = 5$$

I giocatori 1 e 2 sono simmetrici e il giocatore 3 è fittizio, allora $\phi_3(v) = v(3) = 1$ *e* $\phi_1(v) = \phi_2(v) = \frac{1}{2}(v(N) - v(3)) = 2$ *e quindi* $\phi(v) = (2, 2, 1)$. $\diamondsuit$

Osservazione 5.1.1

- *L'assioma di simmetria può essere sostituito dall'assioma di* anonimato*:*
  Dato un gioco v e una permutazione dei giocatori π sia u il gioco definito da:

  $$u(\pi(S)) = v(S) \quad \forall\ S \subseteq N$$

  Il valore di Shapley del gioco ottenuto permutando i giocatori è dato dalla permutazione dei valori di Shapley, cioè $\phi_{\pi(i)}(u) = \phi_i(v)$.

- *L'assioma di dummy player può essere sostituito dall'assioma di* null player*:*
  Un giocatore $i \in N$ è un null player se $v(S \cup \{i\}) = v(S), \forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$; allora $\phi_i(v) = 0$.
  Si può notare che $v(i) = v(\emptyset \cup \{i\}) = v(\emptyset) = 0$ e quindi ancora $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i), \forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$.

5.1.2 Calcolo del valore di Shapley

Il valore di Shapley risulta molto complesso da calcolare.

Applicando la definizione è necessario determinare i contributi marginali dei giocatori in tutte le possibili coalizioni ordinate, che sono $n!$; nel caso di 10 giocatori è necessario considerare per ogni giocatore $10! = 3.628.800$ permutazioni.

Una piccola semplificazione si può ottenere considerando tutte le possibili coalizioni non vuote, che sono $2^n - 1$, e per ciascuna considerare ogni giocatore come l'ultimo arrivato e quindi "pesare" il suo contributo marginale con le permutazioni degli altri giocatori della coalizione e dei giocatori non facenti parte della coalizione; in questo modo si ottiene la seguente espressione per il valore di Shapley:

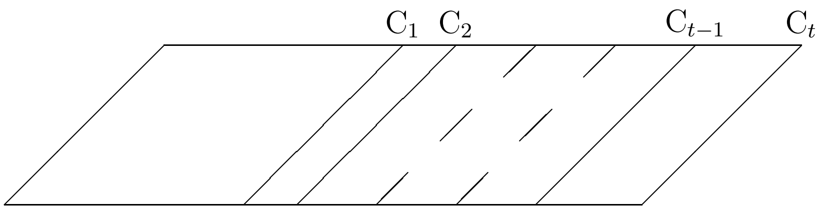
$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

Nel caso di 10 giocatori è necessario considerare $2^{10} - 1 = 1.023$ coalizioni.

Per alcuni giochi è possibile determinare il valore di Shapley molto più semplicemente, sfruttando alcune caratteristiche del gioco.

<u>Gioco dell'aeroporto (Airport game - Littlechild e Thompson, 1977)</u>

Sia dato un aeroporto in cui atterrano differenti tipi di aerei che richiedono una pista di lunghezza differente a seconda delle loro caratteristiche; si vuole determinare come ripartire il costo di costruzione e manutenzione della pista tra gli aerei che la utilizzano. Gli aerei sono raggruppati, a seconda della lunghezza di pista necessaria, in t sottoinsiemi disgiunti $N_1, \ldots, N_t$ in modo che gli aerei del sottoinsieme N_i richiedono una pista di costo C_i con $C_i < C_{i+1}$.



Definendo il gioco assegnando ad ogni coalizione il costo della pista necessaria all'aereo più grosso della coalizione, cioè:

$$v(S) = C_{j(S)}$$

dove $j(S) = max\ \{i|S \cap N_i \neq \emptyset\}$. Si può dimostrare che il valore di Shapley di ogni aereo corrisponde alla ripartizione dei costi ottenuta nel seguente modo:

- Il costo del primo tratto di pista C_1 è diviso tra tutti gli aerei, poichè tutti lo utilizzano;
- Il costo del secondo tratto di pista $C_2 - C_1$ è diviso tra gli aerei dei sottoinsiemi $N_2, \dots, N_t$ che sono quelli che lo utilizzano;
- Il costo dell'ultimo tratto di pista $C_t - C_{t-1}$ che è diviso tra gli aerei del sottoinsieme N_t che sono gli unici che lo utilizzano.

E' facile vedere che questo criterio è facilmente applicabile anche nel caso di molti aerei.

Esempio 5.1.3 (Gioco dell'aeroporto)

$$\begin{array}{l} N_1 = \{1,2,3\}; N_2 = \{4,5,6,7\}; N_3 = \{8,9,10\} \\ C_1 = 20; C_2 = 27; C_3 = 33 \\ \phi_1 = \frac{20}{10} = 2 \\ \phi_2 = \frac{20}{10} + \frac{27-20}{7} = 3 \\ \phi_3 = \frac{20}{10} + \frac{27-20}{7} + \frac{33-27}{3} = 5 \end{array}$$

$\diamondsuit$

La verifica utilizza gli assiomi di Shapley (Littlechild e Owen, 1973).
Si definiscono t giochi $v_1, \dots, v_t$ con il gioco v_i relativo al tratto di pista i in cui si ha:

$$v_i(S) = \begin{cases} C_i - C_{i-1} & se\ i \leq j(S) \\ 0 & se\ i > j(S) \end{cases}$$

dove $C_0 = 0$.
A questo punto si osserva che:

1. gli aerei dei sottoinsiemi $N_1, \dots, N_{i-1}$ che non utilizzano il tratto di pista i sono dummy per il gioco v_i, per cui il loro valore di Shapley per questo gioco è nullo;
2. gli aerei dei sottoinsiemi $N_i, \dots, N_t$ che utilizzano il tratto di pista i sono simmetrici per il gioco v_i, per cui il loro valore di Shapley per questo gioco è uguale a $\frac{C_i - C_{i-1}}{|N_i \cup \dots \cup N_t|}$;
3. il gioco v è dato dalla somma dei giochi v_i, per cui il valore di Shapley di v è dato dalla somma dei valori di Shapley dei giochi v_i.

5.1.3 Un'applicazione del valore di Shapley

Esempio 5.1.4 (Consiglio dell'UE 1958-1973) *Il valore di Shapley permette di evidenziare un difetto nei pesi assegnati nel Consiglio dell'UE del 1958. La quota di maggioranza nel 1958 era 12 su 17 (70%) e nel 1973 era 41 su 58 (70%).*

	1958			1973		
Paesi	*Peso*	*%*	*Shapley*	*Peso*	*%*	*Shapley*
Francia	*4*	*23.53*	*0.233*	*10*	*17.24*	*0.179*
Germania	*4*	*23.53*	*0.233*	*10*	*17.24*	*0.179*
Italia	*4*	*23.53*	*0.233*	*10*	*17.24*	*0.179*
Belgio	*2*	*11.76*	*0.150*	*5*	*8.62*	*0.081*
Paesi Bassi	*2*	*11.76*	*0.150*	*5*	*8.62*	*0.081*
Lussemburgo	*1*	*5.88*	**0.000**	*2*	*3.45*	*0.010*
Regno Unito	-	-	-	*10*	*17.24*	*0.179*
Danimarca	-	-	-	*3*	*5.17*	*0.057*
Irlanda	-	-	-	*3*	*5.17*	*0.057*
Totale	*17*	*100.00*	*1.000*	*58*	*100.00*	*1.000*

Il Lussemburgo, pur riducendo il suo peso percentuale, ha perso il ruolo di dummy player. ♢

5.2 Indice di Banzhaf-Coleman (1965, 1971)

E' un altro indice di potere basato sul concetto di contributo marginale.

Definizione 5.2.1 *Si chiama indice di Banzhaf-Coleman il vettore $\psi(v)$ la cui componente ψ_i è il contributo marginale medio del giocatore i rispetto alle possibili coalizioni a cui appartiene, cioè:*

$$\psi_i(v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N, i \in S} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

Questo indice non è un'imputazione poichè non è efficiente.

5.3 Indice di Banzhaf-Coleman normalizzato

Questo indice può essere ottenuto normalizzando a 1 l'indice precedente, oppure nel modo seguente, che evidenzia il ruolo di ciascun giocatore.

Definizione 5.3.1 *Si chiama contributo vincente del giocatore i per un gioco semplice monotono v, il numero di casi in cui la sua presenza rende vincente una coalizione o* swing, *cioè:*

$$\vartheta_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

Definizione 5.3.2 *Si chiama indice di Banzhaf-Coleman normalizzato per un gioco semplice monotono v, il vettore $\beta(v)$ la cui componente i è il rapporto tra il contributo vincente del giocatore i e la somma dei contributi vincenti di tutti i giocatori, cioè:*

$$\beta_i(v) = \frac{\vartheta_i(v)}{\sum_{j \in N} \vartheta_j(v)}$$

L'indice di Banzhaf-Coleman normalizzato è un'imputazione.

Esempio 5.3.1 (Confronti tra indici)

1. *Sia dato il seguente gioco:*

$$\begin{array}{l} N = \{1,2,3\} \\ v(1) = v(2) = v(3) = v(12) = v(13) = 0; v(23) = v(N) = 1 \end{array}$$

In questo caso si ha $\varphi = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \psi = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \beta = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ cioè gli indici coincidono.

2. *Sia dato il seguente gioco:*

$$\begin{array}{l} N = \{1,2,3\} \\ v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(12) = v(13) = v(23) = v(N) = 1 \end{array}$$

In questo caso si ha $\varphi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \psi = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \beta = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ cioè gli indici ϕ e β coincidono e sono minori dell'indice ψ.

3. *Sia dato il seguente gioco:*

$$\begin{array}{l} N = \{1,2,3\} \\ v(1) = v(2) = v(3) = v(12) = v(13) = v(23) = 0; v(N) = 1 \end{array}$$

In questo caso si ha $\varphi = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \psi = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}), \beta = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ cioè gli indici ϕ e β coincidono e sono maggiori dell'indice ψ.

4. *Sia dato il seguente gioco:*

$$\begin{array}{l} N = \{1,2,3\} \\ v(1) = v(2) = v(3) = v(12) = 0; v(13) = v(23) = v(N) = 1 \end{array}$$

In questo caso si ha $\varphi = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{6}), \psi = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}), \beta = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ cioè non esiste nessuna relazione tra gli indici. $\diamondsuit$

5.4 Indice di Deegan-Packel (1978)

Un'altro importante indice di potere è stato introdotto da Deegan-Packel; esso privilegia le coalizioni vincenti minimali, cioè tali che ogni sottocoalizione sia perdente. Anche questo indice richiede che il gioco sia semplice e monotono.

L'indice di Deegan-Packel considera equivalenti tutte le coalizioni vincenti minimali e, per ciascuna di esse, tutti i componenti. Formalmente dato un gioco $G = (N, v)$, sia $\mathcal{W} = \{S_1, ..., S_m\}$ l'insieme delle coalizioni vincenti minimali; a ciascuna si assegna il valore $\frac{1}{m}$ e per ciascuna coalizione $S_j \in \mathcal{W}$ ad ogni giocatore $i \in S_j$ si assegna il valore $\frac{1}{m}\frac{1}{s_j}$; quindi l'indice di Deegan-Packel, $\delta(v)$, assegna ad ogni giocatore la somma dei valori da lui ottenuti con la procedura precedente, cioè:

$$\delta_i(v) = \sum_{S_j \ni i; S_j \in \mathcal{W}} \frac{1}{m}\frac{1}{s_j}, \forall\ i \in N$$

L'indice di Deegan-Packel è efficiente, ma non è monotono rispetto ai giocatori, come mostra il seguente esempio.

Esempio 5.4.1 (Non monotonia) *Si consideri il gioco di maggioranza pesata definito da* $(50; 26, 25, 25, 23, 1)$*; le coalizioni vincenti minimali sono:*

$$\mathcal{W} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}\}$$

per cui l'indice di Deegan-Packel è:

$$\delta(v) = \left(\frac{6}{24}, \frac{7}{24}, \frac{7}{24}, \frac{2}{24}, \frac{2}{24}\right)$$

e quindi i giocatori 2 e 3 hanno un "potere" superiore al giocatore 1 pur avendo quote inferiori. Come raffronto si può osservare che gli indici di Shapley e di Banzhaf-Coleman normalizzato sono:

$$\varphi(v) = \left(\frac{22}{60}, \frac{17}{60}, \frac{17}{60}, \frac{2}{60}, \frac{2}{60}\right)$$

$$\beta(v) = \left(\frac{9}{16}, \frac{7}{16}, \frac{7}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right) \qquad \diamondsuit$$

5.5 Indice dei beni pubblici (*Public Goods Index* - Holler, 1982)

Un altro indice legato alle coalizioni vincenti minimali è quello di Holler che dipende solo dal numero di coalizioni vincenti minimali a cui cascun giocatore appartiene, trascurando la loro cardinalità. Formalmente dato un gioco $G = (N, v)$, sia $w_i, i \in N$ il numero di coalizioni vincenti minimali comprendenti il giocatore i; l'indice di Holler, $h(v)$, assegna ad ogni giocatore $i \in N$ la quantità:

$$h_i(v) = \frac{w_i}{\sum_{j \in N} w_j}$$

L'indice di Holler è efficiente, ma non è monotono rispetto ai giocatori, come mostra il precedente Esempio 5.4.1 per il quale si ha:

$$h(v) = \left(\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$$

5.6 Nucleolo (1969)

Un altro concetto di soluzione puntuale è il nucleolo di Schmeidler, che si basa sull'idea di minimizzare il massimo "malcontento".

Definizione 5.6.1 *Dato un gioco v, sia S una coalizione e x una possibile ripartizione del valore del gioco; si dice rimpianto o eccesso di S rispetto ad x la quantità:*

$$e(S,x) = v(S) - x(S)$$

Nel caso di un cost game il rimpianto è $x(S) - c(S)$.

Osservazione 5.6.1

- *Nella definizione precedente x è una ripartizione del valore del gioco in quanto deve soddisfare solo l'ipotesi di efficienza; in questo caso talvolta si usano i termini preimputazione e prenucleolo per indicare che non si tiene conto della razionalità individuale.*

E' possibile definire un vettore $\vartheta(x) \in \mathbb{R}^{2^n}$ nel seguente modo:

$$\begin{array}{ll} \vartheta_1(x) = max\ \{e(S,x) | S \subset N\} = e(S_1, x) & \\ \vartheta_i(x) = max\ \{e(S,x) | S \subset N, S \neq S_j, j = 1, \ldots, i-1\} = e(S_i, x) & \quad i = 2, \ldots, 2^n \end{array}$$

Le componenti di $\vartheta(x)$ sono i rimpianti generati da x al variare di S, in ordine debolmente decrescente.

Esempio 5.6.1 (Vettore degli eccessi) *Sia dato il seguente gioco:*

$$\begin{array}{l} N = \{1,2,3\} \\ v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(23) = 3; v(N) = 5 \end{array}$$

Data la ripartizione $x = (3,1,1)$ si ha:

$$e(1,x) = -3; e(2,x) = -1; e(3,x) = -1; e(12,x) = -2; e(13,x) = -1; e(23,x) = 1; e(N,x) = 0$$

e quindi:

$$\vartheta(x) = (1, 0, -1, -1, -1, -2, -3) \qquad \diamondsuit$$

Definizione 5.6.2 *Dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, si dice che x è lessicograficamente minore di y e si indica con $x <_L y$, se esiste $i \geq 1$ per cui:*

$$\begin{array}{ll} x_j = y_j & \quad j < i \\ x_i < y_i & \end{array}$$

Definizione 5.6.3 *Dato un gioco v si dice nucleolo del gioco il vettore $\nu(X)$ che genera il minimo, secondo l'ordine lessicografico, dei vettori $\vartheta(x)$ al variare di x nell'insieme X delle possibili ripartizioni.*

Osservazione 5.6.2

- *Il nucleolo è un elemento del nucleo se questo è non vuoto, per cui costituisce un concetto di soluzione per i giochi a nucleo vuoto, ma permette anche di "scegliere" un elemento del nucleo.*

Esempio 5.6.2 (Ordine lessicografico) *Sia dato il seguente gioco:*

$$\begin{aligned} &N = \{1, 2\} \\ &v(1) = 1; v(2) = 3; v(12) = 8 \end{aligned}$$

Dati $x = (6, 2)$ e $y = (3, 5)$ si ha:

$$\begin{aligned} &e(1, x) = -5; e(2, x) = 1; e(12, x) = 0 \\ &e(1, y) = -2; e(2, y) = -2; e(12, y) = 0 \end{aligned}$$

e quindi $\vartheta(x) = (1, 0, -5)$ e $\vartheta(y) = (0, -2, -2)$ per cui $\vartheta(y) <_L \vartheta(x)$.
Si può verificare che $y = \nu(X)$. ♢

Proprietà
Se X è non vuoto, compatto e convesso allora $\nu(X)$ esiste ed è unico.

5.6.1 Calcolo del nucleolo

Anche questo concetto di soluzione non è facilmente calcolabile.
Un modo relativamente semplice è dato dal seguente algoritmo.
Algoritmo di Kopelowitz (1967)

L'idea fondamentale su cui si basa questo algoritmo è che il massimo rimpianto delle coalizioni può essere rappresentato da una variabile α, per cui si ha:

$$v(S) - x(S) \leq \alpha \qquad \forall\ S \subset N$$

Poichè il nucleolo minimizza il massimo rimpianto è sufficiente cercare il minimo di α. La grande coalizione viene esclusa poichè il suo rimpianto è sempre nullo; la variabile α non è vincolata in segno in quanto il massimo rimpianto può essere sia positivo che negativo. Si ottiene quindi il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} min \quad & \alpha \\ s.t. \quad & \sum_{i \in N} x_i = v(N) \\ & \sum_{i \in S} x_i + \alpha \geq v(S) \qquad \forall\ S \subset N \end{aligned}$$

Non è sufficente risolvere il problema precedente in quanto la soluzione potrebbe non essere unica. Per avere l'unicità è necessario iterare l'algoritmo, conservando il massimo rimpianto ottenuto. Per fare questo si considera l'insieme S_0 delle coalizioni leganti, cioè quelle per cui il rimpianto è uguale al valore α_0 ottenuto e una diversa allocazione altera il valore del massimo rimpianto; la nuova ripartizione deve minimizzare il massimo rimpianto per le altre coalizioni, ma non deve incrementare il rimpianto per le coalizioni di S_0. A tal fine è sufficiente riscrivere i vincoli corrispondenti nella forma:

$$\sum_{i \in S} x_i = v(S) - \alpha_0 \qquad \forall\ S \in S_0$$

Il nuovo problema fornisce un nuovo valore α_1 e un nuovo insieme S_1 di coalizioni leganti; nel caso in cui la soluzione non sia unica è sufficiente riscrivere i vincoli corrispondenti nella forma:

$$\sum_{i \in S} x_i = v(S) - \alpha_1 \qquad \forall\ S \in S_1$$

Dopo al più n iterazioni la soluzione è unica e costituisce il nucleolo del gioco.

Esempio 5.6.3 (Calcolo del nucleolo) *Sia dato il seguente gioco:*

$$\begin{array}{l} N = \{1,2,3\} \\ v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(12) = 2; v(13) = 3; v(23) = 5; v(N) = 6 \end{array}$$

Il primo problema è:

$$\begin{array}{ll} min & \alpha \\ s.t. & x_1 + x_2 + x_3 = v(N) = 6 \\ & x_1 + x_2 + \alpha \geq v(12) = 2 \\ & x_1 + x_3 + \alpha \geq v(13) = 3 \\ & x_2 + x_3 + \alpha \geq v(23) = 5 \\ & x_1 + \alpha \geq v(1) = 0 \\ & x_2 + \alpha \geq v(2) = 0 \\ & x_3 + \alpha \geq v(3) = 0 \end{array}$$

La soluzione ottimale è $x = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 3)$ *con* $\alpha_0 = -\frac{1}{2}$ *e* $S_0 = \{\{1\}, \{2,3\}\}$*; poichè la soluzione non è unica si itera riscrivendo i vincoli associati alle coalizioni in* S_0*; il secondo problema è:*

$$\begin{array}{ll} min & \alpha \\ s.t. & x_1 + x_2 + x_3 = v(N) = 6 \\ & x_1 + x_2 + \alpha \geq v(12) = 2 \\ & x_1 + x_3 + \alpha \geq v(13) = 3 \\ & x_2 + x_3 = v(23) - \alpha_0 = \frac{11}{2} \\ & x_1 = v(1) - \alpha_0 = \frac{1}{2} \\ & x_2 + \alpha \geq v(2) = 0 \\ & x_3 + \alpha \geq v(3) = 0 \end{array}$$

La soluzione ottimale è $x = (\frac{1}{2}, \frac{9}{4}, \frac{13}{4})$ *con* $\alpha_1 = -\frac{3}{4}$ *e* $S_1 = \{\{1,2\}, \{1,3\}\}$*; poichè la soluzione è unica la ripartizione trovata costituisce il nucleolo.* ◇

Capitolo 6

Il Bargaining Set, il Kernel e il Nucleolo

6.1 Premessa

Questo capitolo è dedicato ad analizzare i concetti di soluzione basati sull'idea di contrattazione. In altre parole i giocatori possono ridiscutere una allocazione x (ovviamente a loro vantaggio) se esistono dei fondamenti "razionali", su cui basare la loro richiesta. In un certo senso si vuole studiare anche il problema di quale, o quali, coalizioni possono formare, al fine di dare una valutazione della forza, o potere contrattuale dei giocatori. E' inutile sottolineare che la decisione di formare una coalizione dipende in gran parte dal payoff che i singoli giocatori possono garantirsi nelle differenti situazioni.

6.2 Il Bargaining Set

Per cominciare è necessario introdurre l'idea di obiezione di un giocatore i contro un altro giocatore j rispetto all'imputazione x.

Definizione 6.2.1 *Un'obiezione di i contro j rispetto ad x è una coppia (C, y), con $C \subset N, i \in C, j \notin C$ e y è un'imputazione tale che:*

$$y(C) = v(C)$$
$$y_k > x_k, \forall\ k \in C$$

Successivamente è necessario introdurre l'idea di controbiezione del giocatore j contro il giocatore i rispetto all'obiezione (C, y).

Definizione 6.2.2 *Una controbiezione di j contro i rispetto a (C, y) è una coppia (D, z), con $D \subset N, j \in D, i \notin D$ e z è un'imputazione tale che:*

$$z(D) = v(D)$$
$$z_k \geq y_k, \forall\ k \in D \cap C$$
$$z_k \geq x_k, \forall\ k \in D \setminus C$$

A questo punto si può definire il Bargaining Set.

Definizione 6.2.3 *Il Bargaining Set di un gioco (N, v) è l'insieme delle imputazioni x tali che per ogni obiezione ad x esiste una controbiezione, cioè l'insieme delle imputazioni x per le quali non esistono obiezioni giustificate; si indica con $\mathcal{M}_1^i$.*

Si può dare la seguente interpretazione:
Il giocatore i non è soddisfatto della ripartizione x in quanto ritiene che il giocatore j ottenga troppo, per cui minaccia di formare la coalizione C che esclude j, nella quale tutti i componenti saranno avvantaggiati (obiezione); ma se l'obiezione non è giustificata questo vuol dire che il giocatore j può a sua volta formare la coalizione D, di cui possono far parte anche membri di C, con la quale non svantaggerà nessuno.

Esempio 6.2.1 (Gioco di maggioranza) *Data un'imputazione x, sia (C, y) un'obiezione di i contro j; C deve essere della forma $\{i, h\}$, perchè $v(i) = 0$, con $y_i > x_i$ e quindi $y_h < 1 - x_i$, essendo $y(C) = v(C) = 1$. Se $x_j + y_h \leq 1$ allora j ha una controbiezione e quindi se $x \in \mathcal{M}_1^i$ si ha $y_h < 1 - x_i \Rightarrow y_h \leq 1 - x_j$ da cui si ricava $x_j \leq x_i, \forall\ i, j$ e quindi $x_i = x_j = x_h = \frac{1}{3}$. Quindi $\mathcal{M}_1^i = \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$.* ♢

Esempio 6.2.2 (Io e mia zia (da Osborne - Rubinstein)) *Si consideri il gioco a 4 giocatori con v definita da:*

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } S = \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3,4\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Data un'imputazione x con $x_2 < x_3$, un'obiezione di 2 contro 3 è data dalla coalizione $\{1, 2\}$, assegnando $y_1 = 1 - x_2 - \varepsilon$ e $y_2 = x_2 + \varepsilon$, con $\varepsilon < x_3 - x_2$. 3 non ha alcuna controbiezione (infatti $y_1 + x_3 > 1$), per cui per la simmetria dei giocatori $2, 3, 4$ si ha che $x \in \mathcal{M}_1^i$ se $x_1 = 1 - 3\alpha, x_2 = x_3 = x_4 = \alpha$.
Un'obiezione di 1 contro 2 rispetto ad x è data dalla coalizione $\{1, 3\}$, assegnando $y_1 > 1 - 3\alpha$ e $y_3 < 3\alpha$. 2 non ha alcuna controbiezione rispetto ad y (con la coalizione $\{2, 3, 4\}$), se $\alpha + 3\alpha + \alpha > 1$, cioè se $\alpha > \frac{1}{5}$.
Un'obiezione di 2 contro 1 rispetto ad x è data dalla coalizione $\{2, 3, 4\}$, assegnando $y_2 > \alpha$ e $y_3 = y_4 < \frac{1-\alpha}{2}$. 1 non ha alcuna controbiezione rispetto ad y (con la coalizione $\{1, 3\}$ oppure $\{1, 4\}$), se $1 - 3\alpha + \frac{1-\alpha}{2} > 1$, cioè se $\alpha < \frac{1}{7}$.
Quindi $\mathcal{M}_1^i = \{(1 - 3\alpha, \alpha, \alpha, \alpha,), \frac{1}{7} \leq \alpha \leq \frac{1}{5})\}$. ♢

6.3 Il Kernel

A partire dalla definizione di eccesso di una coalizione S rispetto ad un'imputazione x ($e(S,x)$) si può introdurre l'idea di surplus di un giocatore i contro un altro giocatore j rispetto all'imputazione x.

Definizione 6.3.1 *Il surplus di i contro j rispetto ad x è dato da:*

$$s_{i,j}(x) = \max_{S \ni i; S \not\ni j} e(S,x)$$

In altre parole il surplus rappresenta il massimo guadagno (o minima perdita) del giocatore i se forma una coalizione senza j, supponendo che gli altri giocatori si "accontentino" del payoff x.

A questo punto si possono definire il Kernel e il Prekernel, che fa riferimento alle preimputazioni.

Definizione 6.3.2 *Il Kernel di un gioco (N,v) è l'insieme delle imputazioni x tali che $s_{i,j}(x) > s_{j,i}(x) \Rightarrow x_j = v(j), \forall\ i,j \in N$; si indica con $\mathcal{K}$.*
Il Prekernel di un gioco (N,v) è l'insieme delle preimputazioni x tali che $s_{i,j}(x) = s_{j,i}(x)$; si indica con $\mathcal{K}$.

Teorema 6.3.1 *Il Kernel è un sottoinsieme del Bargaining Set.*

Esempio 6.3.1 (Gioco di maggioranza) *Per il Teorema 6.3.1 $\mathcal{K} = \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$.* $\diamondsuit$

Esempio 6.3.2 (Io e mia zia (da Osborne - Rubinstein)) *Data un'imputazione $x \in \mathcal{K}$, per il Teorema 6.3.1 si ha $x = (1-3\alpha, \alpha, \alpha, \alpha,), \frac{1}{7} \leq \alpha \leq \frac{1}{5})$; allora $s_{1,2}(x) = 2\alpha$ e $s_{2,1}(x) = 1 - 3\alpha$; essendo $1 - 3\alpha > 0$, cioè $x_1 > v(1)$, deve essere verificato $s_{2,1} \leq s_{1,2}$, cioè $1 - 3\alpha \leq 2\alpha$ da cui $\alpha \geq \frac{1}{5}$ e quindi $\mathcal{K} = \{(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})\}$.* $\diamondsuit$

Esiste una definizione alternativa del Kernel che si basa su differenti definizioni di obiezione e controbiezione.

Definizione 6.3.3 *Un'obiezione di i contro j rispetto ad x è una coalizione $C \subset N, i \in C, j \notin C$ e $x_j > v(j)$.*
Una controbiezione di j contro i è una coalizione $D \subset N, j \in D, i \notin D$ e $e(D,x) \geq e(C,x)$.
Il Kernel è l'insieme delle imputazioni x tali che per ogni obiezione C di un qualsiasi i contro j esiste una controbiezione D di j contro i.

6.4 Il Nucleolo

Per finire è possibile definire anche il nucleolo in funzione di una opportuna obiezione e controbiezione.

Definizione 6.4.1 *Un'obiezione ad x è una coppia (C, y), con $C \subset N$ e y è un'imputazione tale che $e(C, x) > e(C, y)$, cioè $y(C) > x(C)$.*
Una controbiezione rispetto a (C, y) è una coalizione $D \subset N$ tale che $e(D, y) > e(D, x)$, cioè $x(D) > y(D)$ e $e(D, y) \geq e(C, x)$.
Il nucleolo è l'insieme delle imputazioni x tali che per ogni obiezione (C, y) esiste una controbiezione D.

Teorema 6.4.1 *Il nucleolo è un elemento del Kernel.*

Esempio 6.4.1 (Giochi precedenti) *Per il Teorema 6.4.1 il nucleolo del gioco di maggioranza è $\nu = \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$ e quello del gioco io e mia zia è $\nu = \{(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})\}$.* $\diamondsuit$

Per concludere si possono esaminare due classi di giochi per le quali è particolarmente semplice determinare il nucleolo, i bankruptcy game e i fixed tree game.

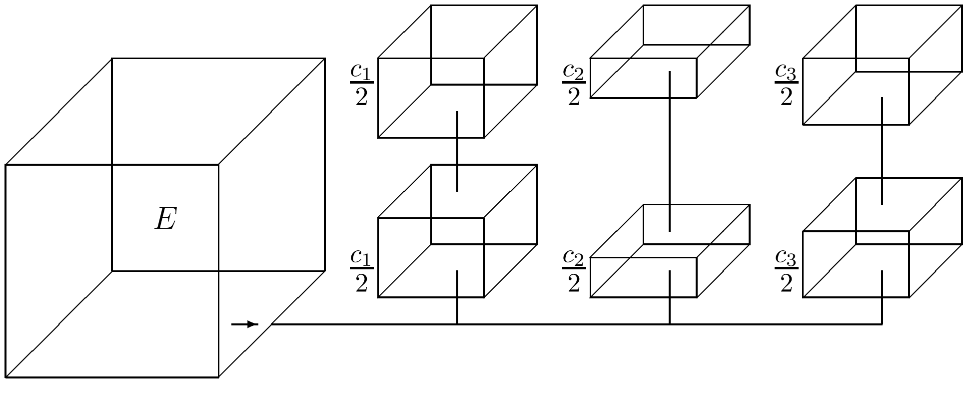
Per un bankruptcy game (E, c) il nucleolo si può calcolare facilmente come:

$$\nu_i = \begin{cases} CEA_i(E; \frac{1}{2}c) & \text{se } E < \frac{1}{2}\sum_{i \in N} c_i \\ c_i - CEA_i(\sum_{j \in N} c_j - E, \frac{1}{2}c) & \text{se } E \geq \frac{1}{2}\sum_{i \in N} c_i \end{cases}$$

Questa soluzione è nota anche come "regola del Talmud", per la seguente citazione nel libro della legge ebraica:
Se un uomo muore lasciando tre mogli alla prima delle quali aveva promesso 100, alla seconda 200 e alla terza 300, si divida il patrimonio nel modo seguente:

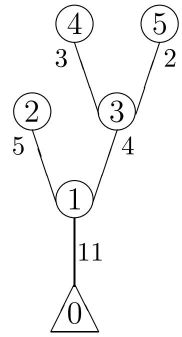
Lascito	*Prima*	*Seconda*	*Terza*
100	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$
200	50	75	75
300	50	100	150

Questa regola può essere rappresentata tramite i seguenti vasi comunicanti:



Per un fixed tree game si può utilizzare la seguente procedura (*painting story*). Si può supporre che la manutenzione dell'albero consista in nella tinteggiatura; tutti i giocatori dipingono alla stessa velocità e iniziano contemporaneamente. Ogni giocatore inizia a dipingere il secondo arco a lui più vicino, escludendo cioè quello entrante nel vertice a lui associato, che non sia ancora stato dipinto; per ultimo dipinge l'arco entrante. Quando un qualsiasi arco viene terminato si riassegnano i giocatori, sempre con le stesse regole.

Esempio 6.4.2 (Nucleolo di un fixed tree game) *Per la situazione rappresentata nella figura si ha:*



- *Le assegnazioni iniziali dei giocatori sono:*
  $1 \to (0,1), 2 \to (0,1), 3 \to (0,1), 4 \to (1,3), 5 \to (1,3)$
  dopo due unità di tempo 4 e 5 hanno terminato l'arco $(1,3)$*;*
- *Le nuove assegnazioni sono:*
  $1 \to (0,1), 2 \to (0,1), 3 \to (0,1), 4 \to (0,1), 5 \to (0,1)$
  dopo una unità di tempo l'arco $(0,1)$ *è terminato;*
  1 e 3 hanno terminato;
- *Le ultime assegnazioni sono:*
  $2 \to (1,2), 4 \to (3,4), 5 \to (3,5)$
  5 termina dopo due unità di tempo;
  4 termina dopo tre unità di tempo;
  2 termina dopo cinque unità di tempo.

Il nucleolo è $\nu = (3,8,3,6,5)$. $\diamondsuit$

Capitolo 7

Allocazione di costi

Il problema dell'allocazione di costi costituisce una delle prime applicazioni della Teoria dei Giochi. I primi esempi di allocazione di costi risalgono agli anni '30 col problema della Tennessee Valley Authority (Ransmeier, 1942 - Straffin e Heaney, 1986).

Il problema nasce quando è necessario determinare una ripartizione dei costi di un progetto tra i diversi utenti, tenendo conto del diverso ruolo e dei differenti interessi. Esiste ovviamente il problema corrispondente di allocazione di profitti, per il quale valgono analoghe considerazioni.

I concetti di soluzione precedentemente esposti, in particolare valore di Shapley e nucleolo, costituiscono differenti possibili soluzioni del problema, ma esiste una serie di concetti di soluzione o metodi di allocazione che hanno una validità generale, ma che sono stati sviluppati per questo problema e si basano sui costi separabili.

7.1 Metodi dei costi separabili

Definizione 7.1.1

- *Dato un gioco di costi o cost game c si chiama costo separabile del giocatore i il suo contributo marginale o costo marginale:*

$$m_i = c(N) - c(N \setminus \{i\})$$

- *Se la somma dei costi separabili dei giocatori è minore del costo del gioco si chiama costo non separabile del gioco la differenza tra i due valori, cioè:*

$$g(N) = c(N) - \sum_{i \in N} m_i$$

I vari metodi si differenziano per come viene ripartito il costo non separabile.

7.1.1 Equa ripartizione (ECA)

Il costo non separabile viene ripartito in parti uguali tra i giocatori. In questo modo il giocatore i deve pagare il costo:

$$ECA_i = m_i + \frac{1}{n} g(N)$$

7.1.2 Costi di alternativa risparmiati (ACA)

Il costo non separabile viene ripartito tra i giocatori proporzionalmente al risparmio ottenuto da ciascuno per aver pagato il proprio costo separabile invece del costo che avrebbe pagato da solo; in altre parole definendo il risparmio del giocatore i come:

$$r_i = c(i) - m_i$$

si ha:

$$ACA_i = m_i + \frac{r_i}{\sum_{j \in N} r_j} g(N)$$

7.1.3 Cost Gap (CGA)

Il costo non separabile viene ripartito tra i giocatori proporzionalmente al migliore (minimo) massimo contributo che ciascuno è disposto a pagare facendo parte di una coalizione, cioè definendo il costo non separabile di una coalizione S come:

$$g(S) = c(S) - \sum_{i \in S} m_i$$

si ha che il giocatore i è disposto a pagare al più tutto il minimo costo non separabile delle coalizioni di cui può far parte, per cui ponendo:

$$g_i = min \; \{g(S) | i \in S\}$$

si ha:

$$CGA_i = m_i + \frac{g_i}{\sum_{j \in N} g_j} g(N)$$

Osservazione 7.1.1

- *Esiste un altro concetto di soluzione equivalente al CGA, il valore τ, introdotto da Tijs nel 1981, definito da $\tau = \alpha m + (1 - \alpha)M$, dove $m_i = c(N) - c(N \setminus \{i\}), \forall\, i \in N$ (utopia = miglior payoff per ogni singolo giocatore), $M_i = min\; \{c(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} m_j | i \in S, S \subseteq N\}, \forall\, i \in N$ (peggior payoff per ogni singolo giocatore) e α è tale che $\sum_{i \in N} \tau_i = c(N)$ che si basa su principi differenti; questo fatto rafforza reciprocamente i due concetti di soluzione.*

- *Il valore τ richiede che il gioco sia* quasi-bilanciato*, cioè valgano le seguenti condizioni:*
  1 - $m_i \leq M_i, \forall\ i \in N$
  2 - $\sum_{i \in N} m_i \leq c(N) \leq \sum_{i \in N} M_i$

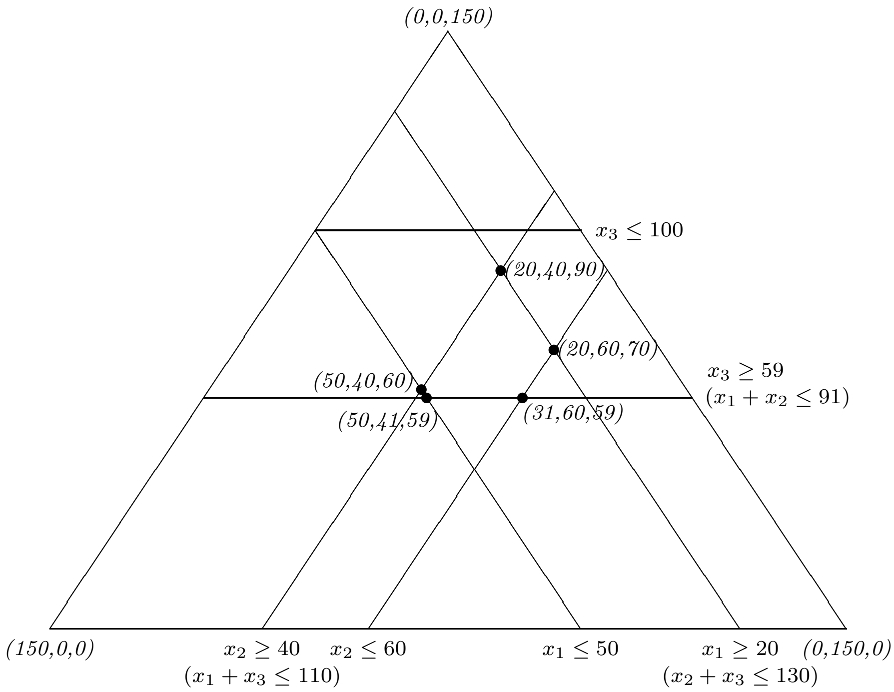
- *Per un gioco di profitti il vettore utopia è definito come* $M_i = v(N) - v(N \setminus \{i\})$ *e il peggior payoff come* $m_i = max\ \{v(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j | i \in S, S \subseteq N\}, \forall\ i \in N.$

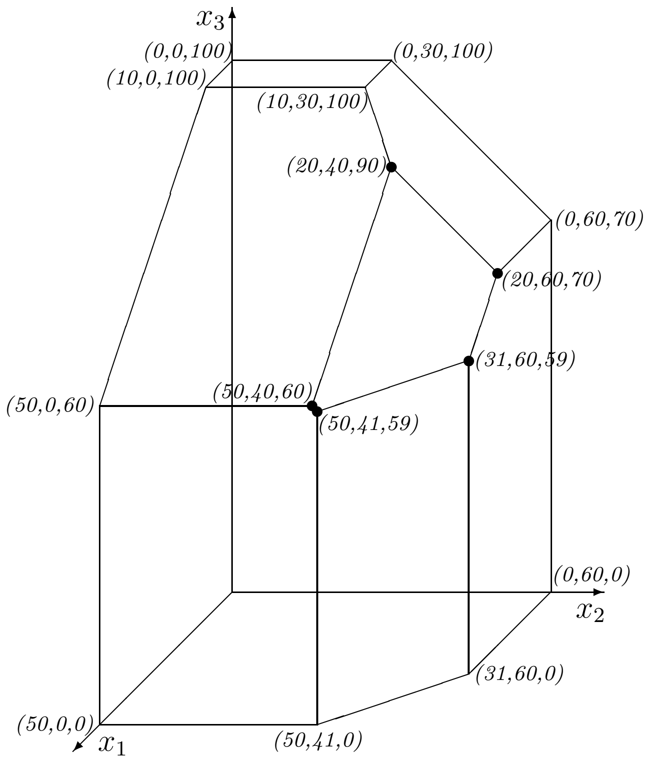
Esempio 7.1.1 (Allocazione di costi) *Sia dato il seguente gioco* $< N, c >$*:*

$N = \{1, 2, 3\}$

$c(1) = 50; c(2) = 60; c(3) = 100; c(12) = 91; c(13) = 110; c(23) = 130; c(N) = 150$

di cui le figure seguenti sono una rappresentazione bidimensionale e tridimensionale:





Applicando le definizioni precedenti si ha:

Costi separabili

$$m_1 = c(N) - c(N \setminus \{1\}) = 150 - 130 = 20$$
$$m_2 = c(N) - c(N \setminus \{2\}) = 150 - 110 = 40$$
$$m_3 = c(N) - c(N \setminus \{3\}) = 150 - 91 = 59$$

Costo non separabile

$$g(N) = c(N) - \sum_{i \in N} m_i = 150 - (20 + 40 + 59) = 31$$

Risparmi

$$r_1 = c(1) - m_1 = 50 - 20 = 30$$
$$r_2 = c(2) - m_2 = 60 - 40 = 20$$
$$r_3 = c(3) - m_3 = 100 - 59 = 41$$

Costi non separabili delle coalizioni

$$g(1) = c(1) - m_1 = 50 - 20 = 30$$
$$g(2) = c(2) - m_2 = 60 - 40 = 20$$
$$g(3) = c(3) - m_3 = 100 - 59 = 41$$
$$g(12) = c(12) - (m_1 + m_2) = 91 - (20 + 40) = 31$$
$$g(13) = c(13) - (m_1 + m_3) = 110 - (20 + 59) = 31$$
$$g(23) = c(23) - (m_2 + m_3) = 130 - (40 + 59) = 31$$

Minimi costi non separabili

$$g_1 = min\{g(1), g(12), g(13), g(N)\} = min\{30, 31, 31, 31\} = 30$$
$$g_2 = min\{g(2), g(12), g(23), g(N)\} = min\{20, 31, 31, 31\} = 20$$
$$g_3 = min\{g(3), g(13), g(23), g(N)\} = min\{40, 31, 31, 31\} = 31$$

I differenti criteri forniscono:

ECA

$$\begin{array}{l} ECA_1 = m_1 + \frac{1}{n}g(N) = 20 + \frac{1}{3}31 = 30.333 \\ ECA_2 = m_2 + \frac{1}{n}g(N) = 40 + \frac{1}{3}31 = 50.333 \\ ECA_3 = m_3 + \frac{1}{n}g(N) = 59 + \frac{1}{3}31 = 69.333 \end{array}$$

ACA

$$\begin{array}{l} ACA_1 = m_1 + \frac{r_1}{r_1+r_2+r_3}g(N) = 20 + \frac{30}{91}31 = 30.220 \\ ACA_2 = m_2 + \frac{r_2}{r_1+r_2+r_3}g(N) = 40 + \frac{20}{91}31 = 46.813 \\ ACA_3 = m_3 + \frac{r_3}{r_1+r_2+r_3}g(N) = 59 + \frac{41}{91}31 = 72.967 \end{array}$$

CGA

$$\begin{array}{l} CGA_1 = m_1 + \frac{g_1}{g_1+g_2+g_3}g(N) = 20 + \frac{30}{81}31 = 31.481 \\ CGA_2 = m_2 + \frac{g_2}{g_1+g_2+g_3}g(N) = 40 + \frac{20}{81}31 = 47.654 \\ CGA_3 = m_3 + \frac{g_3}{g_1+g_2+g_3}g(N) = 59 + \frac{31}{81}31 = 70.864 \end{array}$$

Per completezza si possono calcolare il valore di Shapley e il nucleolo. Gli indici di Banzhaf-Coleman non vengono considerati poichè il gioco non è semplice.

Valore Shapley

Permutazioni	*Contributi marginali*		
1 2 3	*50*	*41*	*59*
1 3 2	*50*	*40*	*60*
2 1 3	*31*	*60*	*59*
2 3 1	*20*	*60*	*70*
3 1 2	*10*	*40*	*100*
3 2 1	*20*	*30*	*100*
Valore di Shapley	*30.167*	*45.167*	*74.667*

Nucleolo

Il primo problema è:

$$\begin{array}{ll} min & \alpha \\ s.t. & x_1 + x_2 + x_3 = c(N) = 150 \\ & x_1 + x_2 - \alpha \leq c(12) = 91 \\ & x_1 + x_3 - \alpha \leq c(13) = 110 \\ & x_2 + x_3 - \alpha \leq c(23) = 130 \\ & x_1 - \alpha \leq c(1) = 50 \\ & x_2 - \alpha \leq c(2) = 60 \\ & x_3 - \alpha \leq c(3) = 100 \end{array}$$

La soluzione ottimale è $x = (31, 50, 69)$ *con* $\alpha_0 = -10$ *e* $S_0 = \{\{1,3\},\{2\}\}$*; poichè la soluzione non è unica si itera riscrivendo i vincoli associati alle coalizioni in* S_0*; il secondo* *problema è:*

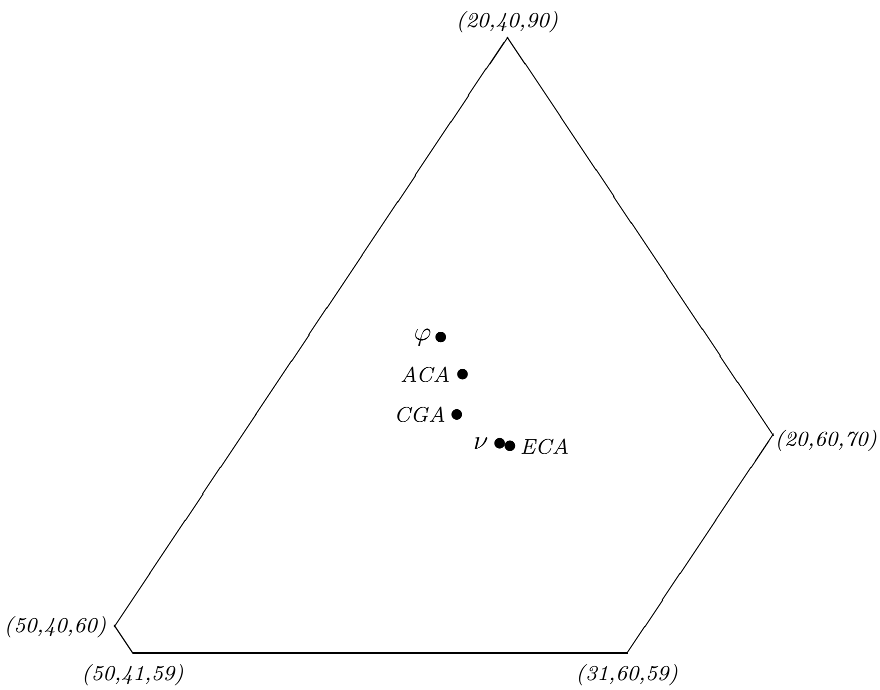
$$\begin{array}{ll} min & \alpha \\ s.t. & x_1 + x_2 + x_3 = c(N) = 150 \\ & x_1 + x_2 - \alpha \leq c(12) = 91 \\ & x_1 + x_3 = c(13) + \alpha_0 = 100 \\ & x_2 + x_3 - \alpha \leq c(23) = 130 \\ & x_1 - \alpha \leq c(1) = 50 \\ & x_2 = c(2) + \alpha_0 = 50 \\ & x_3 - \alpha \leq c(3) = 100 \end{array}$$

La soluzione ottimale è $x = (30.5, 50.0, 69.5)$ *con* $\alpha_1 = -10.5$ *e* $S_1 = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$*; poichè la soluzione è unica la ripartizione trovata costituisce il nucleolo.*

Per avere un immediato confronto dei risultati dell'esempio si può fare riferimento alla tabella seguente:

	Allocazioni		
Criterio	x_1	x_2	x_3
ECA	*30.333*	*50.333*	*69.333*
ACA	*30.220*	*46.813*	*72.967*
CGA	*31.481*	*47.654*	*70.864*
Valore di Shapley	*30.167*	*45.167*	*74.667*
Nucleolo (ν)	*30.500*	*50.000*	*69.500*

Le allocazioni proposte appartengono tutte al nucleo e sono riportate nella figura seguente:



◇

Capitolo 8

Giochi su reti

8.1 Giochi sugli archi e sui nodi

Col termine giochi su reti si indicano quelle classi di giochi che fanno riferimento ad un problema che può essere rappresentato tramite una rete. Questi giochi appartengono alla classe degli *Operations Research Games*, cioè giochi derivanti da problemi di ricerca operativa. Gli *ORG* risultano estremamente interessanti da un punto di vista strutturale e computazionale in quanto "ereditano" dalla struttura del problema alcune caratteristiche che permettono di semplificare alcuni aspetti complessi della Teoria dei Giochi, quali la determinazione della funzione caratteristica e il suo stesso significato.
Solitamente si distinguono due tipi di giochi su reti:
Giochi sugli archi: I giocatori controllano gli archi.
Giochi sui nodi: I giocatori controllano i nodi.

Il controllo non è necessariamente biunivoco, nel senso che un giocatore può controllare più elementi oppure un elemento può essere controllato da più giocatori (comitato) oppure possono esistere elementi non controllati da alcun giocatore (pubblici).

Ai problemi su reti, o comunque legati ai grafi, può essere associato un gioco supponendo di avere più decisori. In questa trattazione verrano analizzati alcuni problemi, evidenziando alcune caratteristiche interessanti del gioco TU associato, precisando se, nella versione classica, si tratta di giochi di costo o di profitto.

8.1.1 Flow Game

Sono giochi di profitto associati ad un problema di flusso massimo.
Ogni giocatore può controllare più archi e ogni arco è controllato da un solo giocatore; non ci sono archi pubblici. Il valore di una coalizione è dato dal valore del flusso massimo dalla sorgente al pozzo, utilizzando la sottorete che contiene solo archi controllati dai giocatori della coalizione.

Questi giochi sono bilanciati e in particolare sono totalmente bilanciati, cioè il gioco ristretto ad una qualsiasi coalizione è bilanciato; una allocazione nel nucleo si ottiene assegnando ai giocatori che controllano gli archi di un taglio di capacità minima le capacità degli archi del taglio, in accordo col risultato di Owen. Le allocazioni corrispondenti ai tagli di capacità minima non rispettano alcun criterio di equità.

Esempio 8.1.1 (Nucleo di un flow game) *Si consideri il seguente problema di flusso da v_s a v_t, dove il giocatore I controlla il primo arco e II controlla il secondo:*

$$v_s \xrightarrow{\mathbf{1}/\mathrm{I}} v_1 \xrightarrow{\mathbf{2}/\mathrm{II}} v_t$$

La funzione caratteristica del gioco associato è:

$$v(I) = v(II) = 0; v(I, II) = 1$$

Applicando il risultato esposto si ottiene l'allocazione $x = (1, 0)$ corrispondente al taglio contenente l'arco da v_s a v_1. Tale allocazione sta nel nucleo, ma tratta in modo diverso i giocatori che sono simmetrici rispetto al gioco, mentre il giocatore II "contribuisce" anche maggiormente alla rete, fornendo un arco di capacità superiore. ♢

Un altro risultato interessante è dato dal seguente teorema.

Teorema 8.1.1 (Kalai e Zemel, 1982)
Un gioco è totalmente bilanciato se e solo se è un flow game.

La dimostrazione è abbastanza articolata.

Definizione 8.1.1 *Dati due giochi u, v si chiama* gioco minimo di u e v *il gioco $w = min(u, v)$ definito da $w(S) = min\ (u(S), v(S)), \forall\ S \subseteq N$.*

Osservazione 8.1.1

- *Se u e v sono totalmente bilanciati allora il gioco w è totalmente bilanciato in quanto $Core(u_S) \subseteq Core(w_S)$ oppure $Core(v_S) \subseteq Core(w_S), \forall\ S \subseteq N$.*

Teorema 8.1.2 *Un gioco è totalmente bilanciato se e solo se è il gioco minimo di un insieme finito di giochi additivi.*

<u>Dimostrazione</u>
Per l'osservazione precedente la condizione è sufficiente.
Viceversa sia v un gioco totalmente bilanciato e sia $\{v^S\}_{S \subseteq N}$, un insieme finito di giochi additivi a n giocatori costruiti nel seguente modo:
per ogni $S \subseteq N$

- sia $(x_i)_{i \in S}$ una allocazione di $Core(v_S)$;
- siano $x_j,\ j \in N \setminus S \quad n - s$ numeri reali con $x_j \geq v(N)$;
- sia v^S il gioco additivo generato da $(x_1, ..., x_n)$;

allora si ha:

$$\min_{S \subseteq N}\{v^S(T)\} = v^T(T) = v(T), \forall\, T \subseteq N \Rightarrow v = min\{v^S\}$$ ♣

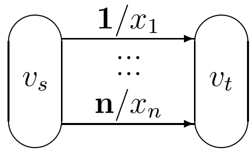
Osservazione 8.1.2

- $(x_i)_{i \in S} \in Core(v_S) \Rightarrow v^S(T) \geq v(T)$ *se* $T \subseteq S$, *con* $v^S(T) = v(T)$ *se* $T = S$.
- $x_j \geq v(N),\ j \in N \setminus S \Rightarrow v^S(T) \geq v(T)$ *se* $T \nsubseteq S$.

Lemma 8.1.1 *Ogni gioco additivo è un flow game.*

Dimostrazione

Il gioco additivo generato da $(x_1, ..., x_n)$ equivale al flow game generato da una rete con n archi che collegano la sorgente al pozzo, in cui l'arco a_i appartiene al giocatore i e ha capacità x_i.

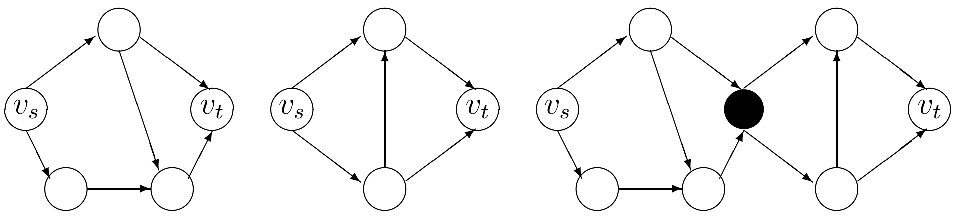


♣

Lemma 8.1.2 *Il gioco minimo di due flow game è un flow game.*

Dimostrazione

Dati due giochi v' e v'' generati dalle reti G' e G'' il gioco $v = min(v', v'')$ è generato dalla rete ottenuta facendo coincidere il pozzo di G' con la sorgente di G''.



♣

Dimostrazione del Teorema di Kalai-Zemel

Per i Lemmi 8.1.1 e 8.1.2 e il Teorema 8.1.2 la condizione è sufficiente. Viceversa un flow game è totalmente bilanciato poichè i suoi sottogiochi sono flow game. ♣

8.1.2 Shortest Path Game

Sono giochi di profitto associati ad un problema di cammino minimo.

Ogni giocatore può controllare più nodi e ogni nodo è controllato da un solo giocatore; non ci sono nodi pubblici; alcuni nodi sono detti sorgenti, altri pozzi. Il valore di una coalizione è dato dalla differenza tra il ricavo ottenuto trasportando un bene da una qualsiasi sorgente ad un qualsiasi pozzo tra quelli controllati dai giocatori della coalizione

e il costo del cammino minimo che attraversa solo nodi posseduti dai giocatori della coalizione; se la differenza è negativa il valore della coalizione è nullo.
Poichè il nucleo può essere vuoto si può utilizzare il valore di Shapley come regola di ripartizione dei profitti che risponda ai seguenti principi di equità (Fragnelli, García-Jurado, Mendez-Naya, 2000):

- efficienza;
- irrilevanza (i giocatori che controllano solo nodi isolati ricevono un payoff nullo);
- adiacenza (i giocatori che controllano gli estremi di un arco hanno la stessa variazione di payoff se si elimina l'arco);
- non collegamento (due giocatori che non sono connessi hanno la stessa variazione di payoff se si elimina l'altro giocatore).

8.1.3 Minimum Cost Spanning Tree Game

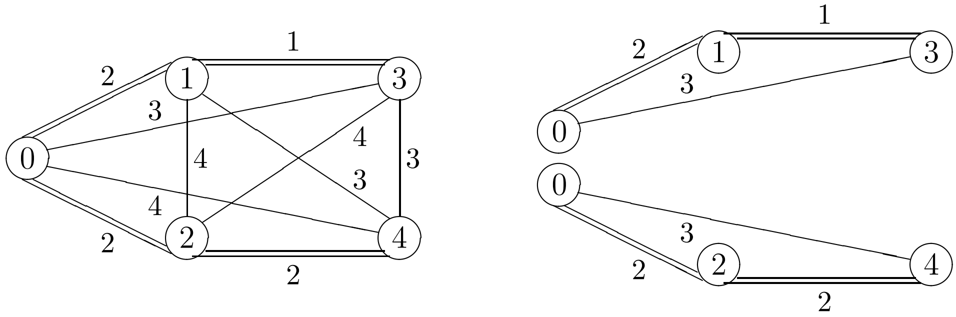
Sono giochi di costo associati ad un problema di minimo albero ricoprente.
Ogni giocatore controlla un solo nodo e ogni nodo è controllato da un solo giocatore; non ci sono nodi pubblici, eccetto la sorgente, alla quale tutti vogliono essere collegati. Il problema richiede che il grafo sia non orientato e completo (clique). Il valore di una coalizione è dato dal valore dell'albero ricoprente di costo minimo che unisce i nodi corrispondenti ai giocatori della coalizione con la sorgente, attraversando solo nodi posseduti dai giocatori della coalizione.
Eliminando la restrizione sui nodi si ottiene un gioco monotono, cioè un gioco in cui il valore della coalizione non decresce se si aggiungono altri giocatori.
Questi giochi sono bilanciati e un'allocazione nel nucleo, detta allocazione di Bird (1976), si ottiene assegnando ad ogni giocatore il costo dell'ultimo arco dell'unico cammino non orientato che nell'albero di costo minimo collega il nodo corrispondente alla radice.

Il nucleo e il nucleolo equivalgono al prodotto cartesiano del nucleo e del nucleolo di una decomposizione in sottogiochi secondo una struttura efficiente $\{P_1, ..., P_m\}$ dei giocatori (Granot e Huberman, 1981), cioè secondo i sottoalberi dell'albero di costo minimo aventi origine dalla sorgente, e ridefinendo il costo c_{0j} degli archi $(0, j)$ come:

$$c'_{0j} = min\ \left\{c_{0j}, \min_{k \notin P_j}\{c_{jk}\}\right\}, \qquad \forall\ j \in P_j$$

Tale risultato non si estende al valore di Shapley.

Esempio 8.1.2 (Decomposizione di uno spanning tree) *Nella figura seguente il nodo* 0 *rappresenta la sorgente, gli archi "spessi" rappresentano uno spanning tree di costo*



minimo e a destra è rappresentata la decomposizione efficiente $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$ *(si noti che il costo dell'arco* $(0,4)$ *diventa 3 unità).*

$$\begin{array}{lll} Core(c_{13}) = \{(\alpha, 3-\alpha) | 0 \le \alpha \le 2\} & \nu(c_{13}) = (1,2) & \varphi(c_{13}) = (1,2) \\ Core(c_{24}) = \{(\beta, 4-\beta) | 1 \le \beta \le 2\} & \nu(c_{24}) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) & \varphi(c_{24}) = (1,3) \\ Core(c) = \left\{ (\alpha, \beta, 3-\alpha, 4-\beta) | \begin{array}{c} 0 \le \alpha \le 2 \\ 1 \le \beta \le 2 \end{array} \right\} & \nu(c) = \left(1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right) & \varphi(c) = \left(\frac{11}{12}, \frac{17}{12}, \frac{23}{12}, \frac{33}{12}\right) \end{array}$$

La decomposizione vale per il nucleo e per il nucleolo, ma non per il valore di Shapley. $\diamondsuit$

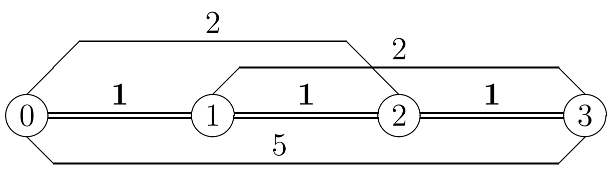
L'allocazione di Bird non è equa per i giocatori "più vicini" alla sorgente. Esistono due modi per ottenere altre ripartizioni che risultano preferibili per questi giocatori (Granot e Huberman, 1984).

Richiesta debole: Un giocatore chiede ad alcuni successori secondo la soluzione di Bird di "rimborsare" il risparmio ottenuto grazie alla sua presenza.

Richiesta forte: Un giocatore chiede ad alcuni successori di "rimborsare" oltre al risparmio ottenuto grazie alla sua presenza anche il "rimborso" che lui ha versato ai suoi predecessori.

La richiesta debole genera soluzioni nel nucleo se applicata alla soluzione di Bird; la richiesta forte genera soluzioni nel nucleo se applicata a una soluzione nel nucleo.

Esempio 8.1.3 (Richiesta debole - Richiesta forte) *Si consideri il gioco associato alla rete seguente:*



La soluzione di Bird assegna ai giocatori i payoff $(1,1,1)$. *Il primo giocatore con una richiesta debole ottiene* $(0,2,1)$. *Il secondo giocatore con una richiesta debole può ottenere* $(0,1,2)$, *mentre con una richiesta forte può ottenere* $(0,0,3)$. $\diamondsuit$

8.1.4 Minimum Cost Forest Game

Sono giochi di costo associati ad un problema di minima foresta ricoprente.

Ogni giocatore controlla un solo nodo e ogni nodo è controllato da un solo giocatore; non

ci sono nodi pubblici, eccetto le sorgenti; ogni nodo vuole essere collegato a una o più sorgenti; gli archi possono servire per il collegamento a qualunque sorgente. Il problema richiede che il grafo sia non orientato ma non necessariamente completo.
Il valore di una coalizione è dato dal valore della foresta di costo minimo che unisce i nodi corrispondenti ai giocatori della coalizione con le sorgenti richieste, attraversando qualsiasi nodo (algoritmo di Kruskal modificato).

Teorema 8.1.3 (Kuipers, 1977)
Il nucleo di un MCFG è non vuoto se è verificata una delle due condizioni seguenti:

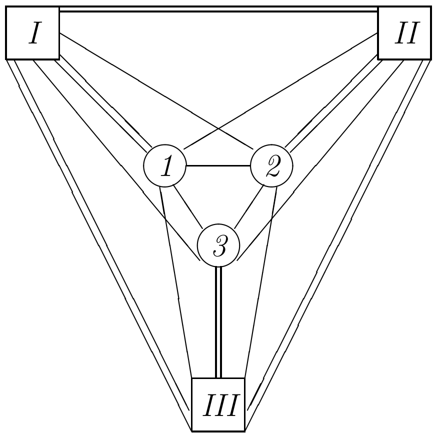
1. *esiste almeno un nodo connesso con tutte le sorgenti (la soluzione è un albero);*

2. *nessun nodo è connesso con più di una sorgente (la soluzione è un insieme di alberi);*

Osservazione 8.1.3

- *Se il gioco ha al più due sorgenti (o al più due giocatori) il nucleo è certamente non vuoto, in quanto una delle due condizioni precedenti è certamente verificata.*

Esempio 8.1.4 (Nucleo vuoto) *Sia dato il gioco rappresentato dalla seguente rete in cui le richieste giocatore-sorgente sono* $1-I, 2-II, 3-III$ *e gli archi 'fini' hanno costo* 3 *e quelli 'spessi' costo* 5.



Si consideri la collezione bilanciata $N = \frac{1}{2}((12),(13),(23))$.
I corrispondenti valori sono:

$$\begin{aligned} c(N) &= C(I-2, 2-1, 1-II) + C(III-3) = 14 \\ c(12) &= C(I-2, 2-1, 1-II) = 9 \\ c(13) &= C(I-3, 3-1, 1-III) = 9 \\ c(23) &= C(II-3, 3-2, 2-III) = 9 \end{aligned}$$

e quindi:

$$14 = c(N) \leq \tfrac{1}{2}c(12) + \tfrac{1}{2}c(13) + \tfrac{1}{2}c(23) = \tfrac{27}{2}.$$

Assurdo. ♢

8.1.5 Traveling Salesman Game

Sono giochi di costo associati ad un problema del commesso viaggiatore.
Ogni giocatore controlla un solo nodo e ogni nodo è controllato da un solo giocatore; non ci sono nodi pubblici, eccetto la sorgente. Il problema richiede che il grafo sia fortemente connesso.
Il valore di una coalizione è dato dal costo del circuito di costo minimo che unisce i nodi corrispondenti ai giocatori della coalizione e la sorgente.

Teorema 8.1.4 (Potters, Curiel e Tijs, 1992)
Il nucleo di un TSG è non vuoto se ci sono al più tre giocatori.

Esempio 8.1.5 (Nucleo vuoto) *Si consideri il gioco rappresentato dalla seguente matrice dei costi, in cui* 0 *rappresenta la sorgente:*

	0	1	2	3	4
0	M	1	2	2	1
1	1	M	1	2	2
2	2	1	M	1	2
3	1	2	2	M	2
4	1	2	1	1	M

Si consideri la collezione bilanciata $N = \frac{1}{2}((123),(124),(34))$. *I corrispondenti valori sono:*

$c(N) = C(0-1-2-3-4-0) = 6$
$c(123) = C(0-1-2-3-0) = 4$
$c(124) = C(0-4-2-1-0) = 4$
$c(34) = C(0-4-3-0) = 3$

e quindi:

$6 = c(N) \leq \frac{1}{2}c(123) + \frac{1}{2}c(124) + \frac{1}{2}c(34) = \frac{11}{2}$.

Assurdo. $\diamondsuit$

Teorema 8.1.5 (Kuipers, 1991 e Tamir, 1989)
Se il problema è simmetrico il nucleo di un TSG è non vuoto se ci sono al più cinque giocatori.

8.2 Grafi e cooperazione

In generale si suppone che tutti i giocatori possano o vogliano formare qualsiasi coalizione, ma questo non è necessariamente verificato in numerose situazioni reali, ad esempio si pensi alle coalizioni politiche. In questo caso si parla di strutture cooperative, che possono essere rappresentate con un grafo non orientato in cui i nodi rappresentano i giocatori e gli archi uniscono i giocatori che accettano di unirsi in una coalizione (Myerson, 1977).

Formalmente il nodo v_i è associato al giocatore i e l'arco $a_{ij} = (v_i, v_j)$ indica che i giocatori i e j sono disposti a far parte della stessa coalizione.

In alcune situazioni può essere necessario che per formare una coalizione ciascun giocatore debba essere disposto a unirsi a tutti gli altri, mentre in altre è sufficiente la disponibilità a formare la coalizione "attraverso alcuni giocatori intermedi". In altre parole nel primo caso una coalizione si forma se il corrispondente sottografo è completo, mentre nel secondo caso è sufficiente che sia connesso.

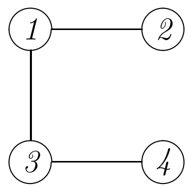
Gioco ristretto rispetto a un grafo G

I giocatori possono realizzare solo le coalizioni indotte dal grafo G; il valore della coalizione è dato dalla somma dei valori delle sottocoalizioni che possono effettivamente formarsi.

Osservazione 8.2.1

- *Esiste una formulazione più restrittiva in cui due giocatori i e j possono far parte della stessa coalizione solo se entrambi esprimono questa volontà (Claim game). In questo caso è necessario utilizzare un grafo orientato, in cui l'arco a_{ij} esprime che il giocatore i accetta di entrare in una coalizione con il giocatore j, ma non viceversa.*

Esempio 8.2.1 (Coalizioni indotte) *Si consideri un gioco a quattro giocatori con la struttura indotta dal seguente grafo G:*



Se per formare una coalizione si richiede la reciprocità si hanno le seguenti coalizioni effettive:

1 - 2 - 3 - 4 - 12 - 13 - 34

Se non si richiede la reciprocità le coalizioni effettive sono:

1 - 2 - 3 - 4 - 12 - 13 - 34 - 123 - 134 - 1234

Il gioco v_G ristretto rispetto a G risulta nel primo caso:

$$
\begin{array}{lll}
v_G(1) = v(1) & v_G(12) = v(12) & v_G(123) = max\ \{v(12) + v(3), v(13) + v(2)\} \\
v_G(2) = v(2) & v_G(13) = v(13) & v_G(124) = v(12) + v(4) \\
v_G(3) = v(3) & v_G(14) = v(1) + v(4) & v_G(134) = max\ \{v(13) + v(4), v(1) + v(34)\} \\
v_G(4) = v(4) & v_G(23) = v(2) + v(3) & v_G(234) = v(2) + v(34) \\
 & v_G(24) = v(2) + v(4) & \\
 & v_G(34) = v(34) & \\
\multicolumn{3}{l}{v_G(N) = max\ \{v(12) + v(34), v(13) + v(2) + v(4)\}}
\end{array}
$$

e nel secondo caso:

$$
\begin{array}{lll}
v_G(1) = v(1) & v_G(12) = v(12) & v_G(123) = v(123) \\
v_G(2) = v(2) & v_G(13) = v(13) & v_G(124) = v(12) + v(4) \\
v_G(3) = v(3) & v_G(14) = v(1) + v(4) & v_G(134) = v(134) \\
v_G(4) = v(4) & v_G(23) = v(2) + v(3) & v_G(234) = v(2) + v(34) \\
 & v_G(24) = v(2) + v(4) & \\
 & v_G(34) = v(34) & \\
\multicolumn{3}{l}{v_G(N) = v(1234)}
\end{array}
$$

$\diamondsuit$

Regola di allocazione rispetto a un grafo G

$$x : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^n \ t.c. \sum_{i \in S} x_i(G) = v_G(S)$$

dove $\mathcal{G}$ è l'insieme dei grafi e $S \in N/G$ è una coalizione indotta da una componente connessa di G.

Stabilità

Una regola di allocazione x è stabile se e solo se:

$$x_i(G) \geq x_i(G \setminus (i,j)) \ e \ x_j(G) \geq x_j(G \setminus (i,j)) \qquad \forall (i,j) \in G$$

Equità

Una regola di allocazione x è equa se e solo se:

$$x_i(G) - x_i(G \setminus (i,j)) = x_j(G) - x_j(G \setminus (i,j)) \qquad \forall (i,j) \in G$$

Teorema 8.2.1 (Myerson, 1977)
L'unica regola di allocazione equa è il valore di Shapley del gioco ristretto rispetto al grafo. Inoltre se il gioco è superadditivo l'allocazione è stabile.

Esempio 8.2.2 (Valore di Shapley del gioco ristretto) *Sia dato il gioco:*

$N = 1, 2, 3$

$v(1) = 1; v(2) = 2; v(3) = 3; v(12) = 6; v(13) = 8; v(23) = 10; v(N) = 12$

I giochi ristretti (non reciproci) e i valori di Shapley sono:

G	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{12\}$	$\{13\}$	$\{23\}$	N	φ		
$\emptyset$	1	2	3	3	4	5	6	1	2	3
a_{12}	1	2	3	6	4	5	9	2.5	3.5	3
a_{13}	1	2	3	3	8	5	10	3	2	5
a_{23}	1	2	3	3	4	10	11	1	4.5	5.5
a_{12}, a_{13}	1	2	3	6	8	5	12	4.167	3.167	4.667
a_{12}, a_{23}	1	2	3	6	4	10	12	1.833	5.333	4.833
a_{13}, a_{23}	1	2	3	3	8	10	12	2	3.5	6.5
a_{12}, a_{13}, a_{23}	1	2	3	6	8	10	12	2.5	4	5.5

$\diamondsuit$

Capitolo 9

Bibliografia

Ahuja RK, Orlin JB (1991) *Distance-directed Augmenting Path Algorithms for Maximum Flow and Parametric Maximum Flow Problems*, Naval Research Logistics Quarterly 38 : 413-430.

Aumann RJ, Maschler M (1964) *The Bargaining Set for Cooperative Games*, in Advances in Game Theory (Annals of Mathematics Studies 52) (Dresher M, Shapley LS, Tucker AW eds.), Princeton University Press, Princeton : 443-476.

Aumann RJ, Maschler M (1985) *Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud*, Journal Economic Theory 36 : 195-213.

Aumann RJ, Peleg B (1960) *Von Neumann - Morgenstern Solutions to Cooperative Games without Side Payments*, Bullettin of the American Mathematical Society 66 : 173-179.

Banzhaf JF (1965) *Weighted Voting doesn't Work: A Mathematical Analysis*, Rutgers Law Review 19 : 317-343.

Bellman R (1958) *On a Routing Problem*, Quarterly of Applied Mathematics 16 : 87-90.

Bird CG (1976) *On Cost Allocation for a Spanning Tree: A Game Theoretic Approach*. Networks 6 : 335-350.

Bondareva ON (1963) *Certain Applications of the Methods of Linear Programming to the Theory of Cooperative Games*, Problemy Kibernetiki 10 : 119-139.

Coleman JS (1971) *Control of Collectivities and Power of a Collectivity to Act*, in Social Choice (Lieberman B ed.), Gordon and Breach, London : 269-300.

Curiel I, Pederzoli G, Tijs S (1989) *Sequencing Games*, European Journal of Operational Research 40 : 344-351.

Curiel I, Maschler M, Tijs S (1987) *Bankruptcy Games*, Zeitschrift für Operations Research Series A 31 : 143-159.

Davis M, Maschler M (1965) *The Kernel of a Cooperative Game*, Naval Research Logistics Quarterly 12 : 223-259.

Deegan J, Packel EW (1978) *A New Index of Power for Simple n-person Games*, International Journal of Game Theory 7 : 113-123.

Dijkstra E (1959) *A Note on Two Problems in Connection with Graphs*, Numerische Mathematik 1 : 269-271.

Dinic EA (1970) *Algorithm for Solution of a Problem of Maximum Flow in Networks with Power Estimation*, Soviet Mathematics Doklady 11 : 1277-1280.

Edgeworth FY (1881) *Mathematical Psychics: An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences*, Kegan Paul, London.

Edmonds J, Karp RM (1972) *Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems*, Journal of ACM 19 : 248-264.

Floyd RW (1962) *Algorithm 97: Shortest Path*, Communications of ACM 5 : 345.

Ford LR (1956) *Network Flow Theory*, Report P-923, Rand Corporation, Santa Monica.

Ford LR, Fulkerson DR (1956) *Maximal Flow through a Network*, Canadian Journal of Maths 8 : 399-404.

Fragnelli V, García-Jurado I, Mendez-Naya L (2000) *On Shortest Path Games*, Mathematical Methods of Operations Research 52 : 139-216.

Gillies DB (1953) *Some Theorems on n-person Games*, PhD Thesis, Princeton, Princeton University Press.

Gillies DB (1959) *Solutions to General Non-Zero-Sum Games* in Contributions to the Theory of Games, Volume IV (Annals of Mathematics Studies 40) (Tucker AW, Luce RD eds.), Princeton University Press, Princeton : 47-85.

Goldberg AV, Tarjan RE (1986) *A New Approach to the Maximum Flow Problem*, Proceedings of the 18th Symposium on the Theory of Computing : 136-146.

Granot D, Huberman G (1981) *Minimum Cost Spanning Tree Games*, Mathematical Programming 21 : 1-18.

Granot D, Huberman G (1984) *On the Core and Nucleolus of Minimum Spanning Tree Games*, Mathematical Programming 29 : 323-347.

Herrero C, Villar A (2001) *The Three Musketeers: Four Classical Solutions to Bankruptcy Problems*, Mathematical Social Sciences 42 : 307-328.

Herz JC (1967) Cours de Théorie des Graphes, Faculté de Sciences de Lille.

Hoffman AJ (1960) *Some Recent Applications of the Theory of Linear Inequalities to Extremal Combinatorial Analysis*, in Combinatorial Analysis (Bellman R, Hall M eds.), American Mathematical Society, Providence : 113-128.

Holler MJ (1982) *Forming Coalitions and Measuring Voting Power*, Political Studies 30 : 262-271.

Kalai E, Smorodinsky M (1975) *Other Solutions to Nash's Bargaining Problem*, Econometrica 43 : 513-518.

Kalai E, Zemel E (1982) *Totally Balanced Games and Games of Flow*, Mathematics of Operations Research 7 : 476-478.

Karzanov AV (1974) *Determining the Maximal Flow in a Network by the Method of Preflow*, Soviet Mathematics Doklady 15 : 434-437.

Kopelowitz A (1967) *Computation of the Kernels of Simple Games and the Nucleolus of n-person Games*, RM-131, Mathematics Department, The Hebrew University of Jerusalem, Israel

Kruskal JB (1956) *On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem*, Proceedings of the American Mathematical Society 7 : 48-50.

Kuipers J (1977) *Minimum Cost Forest Games*, International Journal of Game Theory 26 : 367-377.

Kuipers J (1991) *A Note on the 5-person Traveling Salesman Game*, Zeitschrift fur Operation Research 21 : 339-351.

Littlechild SC, Owen G (1973) *A Simple Expression for the Shapley Value in a Special Case*, Management Science 20 : 370-372.

Littlechild SC, Thompson GF (1977) *Aircraft Landing Fees: A Game Theory Approach*, Bell Journal of Economics 8 : 186-204.

Lucas WF (1968) *A Game with No Solution*, Bulletin of the American Mathematical Society 74 : 237-239.

Myerson RB (1977) *Graphs and Cooperation in Games*, Mathematics of Operations Research 2 : 225-229.

Nash JF (1950) *The Bargaining Problem*, Econometrica 18 : 155-162.

von Neumann J, Morgenstern O (1944) *Theory of Games and Economic Behavior (2nd ed. 1947, 3rd ed. 1953)*, Princeton University Press, Princeton.

Owen G (1975) *On the Core of Linear Production Games*, Mathematical Programming 9 : 358-370.

Potters J, Curiel IJ, Tijs SH (1992) *Traveling Salesman Games*, Mathematical Programming 53 : 199-211.

Prim RC (1957) *Shortest Connection Networks and Some Generalizations*, Bell System Technical Journal 36 : 1389-1401.

Ransmeier JS (1942) *The Tennessee Valley Authority: A Case Study in the Economics of Multiple Purpouse Stream Planning*, The Vanderbilt University Press, Nashville.

Schmeidler D (1969) *The Nucleolus of a Characteristic Function Game*, SIAM Journal of Applied Mathematics 17 : 1163-1170.

Shapley LS (1953) *A Value for n-Person Games*, in Contributions to the Theory of Games, Vol II (Annals of Mathematics Studies 28) (Kuhn HW, Tucker AW eds.), Princeton University Press, Princeton : 307-317

Shapley LS (1967) *On Balanced Sets and Cores*, Naval Research Logistics Quarterly 14 : 453-460.

Shapley LS, Shubik M (1972) *The Assignment Game I: The Core*, International Journal of Game Theory 1 : 111-130.

Shubik M (1959) *Strategy and Market Structure: Competition, Oligopoly, and the Theory of Games*, Wiley, New York.

Smith W (1956) *Various Optimizer for Single-Stage Production*, Naval Research Logistics Quarterly 3 : 59-66.

Straffin PD, Heaney JP (1986) *Game Theory and the Tennessee Valley Authority*, Management Science 32 : 1015-1028.

Tamir A (1989) *On the Core of a Traveling Salesman Cost Allocation Game*, Operations Research Letters 8 : 31-34.

Tijs SH (1981) *Bounds for the Core and the τ-Value*, in Game Theory and Mathematical Economies (Moeschlin O, Pallaschke D eds.), North Holland, Amsterdam : 123-132.

Indice