Teoria dei Giochi - A

Vito Fragnelli

A.A. 2005-2006

Capitolo 1

Teoria dei modelli

1.1 Teoria delle decisioni

La teoria delle decisioni studia gli strumenti e le tecniche che possono facilitare la decisione su cosa fare, prevedendo l'effetto delle scelte effettuate.

La risoluzione dei problemi di decisione e di scelta risulta notevolmente semplificata utilizzando un opportuno modello (ad esempio i plastici in architettura).

In generale un'analisi del problema permette di costruire un modello che deve essere ancora testato ed eventualmente modificato sulla base dei risultati ottenuti.

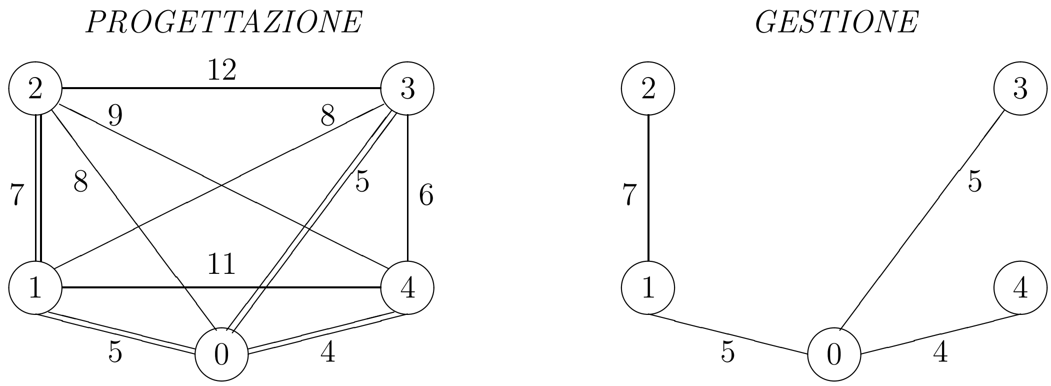
I modelli possono essere classificati in molti modi, non esaustivi e non esclusivi; si possono citare, tra i tanti, modelli deterministici, stocastici, a singolo decisore, multidecisore, progettuali, gestionali, simulativi.

Può essere utile anche la seguente tabella:

	singolo decisore	multidecisore
singolo obiettivo	programmazione matematica	giochi cooperativi
multiobiettivo	programmazione multiobiettivo	giochi non cooperativi

I seguenti esempi possono chiarire qualche differenza.

Esempio 1.1.1 (Connessione - Progettazione e gestione) *Un'azienda ha 4 impianti (1, 2, 3, 4) che devono essere collegati ad una centrale elettrica (0):*



Nel primo caso il problema consiste nel determinare le connessioni di costo minimo, mentre nel secondo caso il problema è come ripartire i costi. ◊

Esempio 1.1.2 (Scheduling - Programmazione matematica) *L'officina di un'azienda deve riparare 4 macchinari per i quali è noto il tempo necessario per la riparazione e il costo unitario derivante dal non utilizzo del macchinario:*

macchinario	*A*	*B*	*C*	*D*
tempo di riparazione	1	3	2	4
costo di fermo	2	1	3	9

Se i macchinari vengono riparati nell'ordine in cui sono stati consegnati all'officina il costo della riparazione è:

$$1 * 2 + (1 + 3) * 1 + (1 + 3 + 2) * 3 + (1 + 3 + 2 + 4) * 9 = 2 + 4 + 18 + 90 = 114$$

Poichè i macchinari appartengono tutti alla stessa azienda è possible cercare di ridurre i costi utilizzando un diverso ordine di intervento. Riparando i macchinari per tempi di riparazione crescenti si ha l'ordine A - C - B - D a cui corrisponde il costo di riparazione:

$$1 * 2 + (1 + 2) * 3 + (1 + 2 + 3) * 1 + (1 + 2 + 3 + 4) * 9 = 2 + 9 + 6 + 90 = 107$$

Ordinando i macchinari per costi di fermo decrescenti $(D - C - A - B)$ *il costo di riparazione si riduce a:*

$$4 * 9 + (4 + 2) * 3 + (4 + 2 + 1) * 2 + (4 + 2 + 1 + 3) * 1 = 36 + 18 + 14 + 10 = 78$$

Un approccio meno empirico può migliorare il risultato? La risposta è affermativa.
Nel 1956 Smith propone una soluzione basata sull'indice di urgenza dato dal rapporto tra costo di fermo e tempo di riparazione. Nel caso precedente gli indici di urgenza sono rispettivamente $2, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}$ *e l'ordine per indici decrescenti è* $D-A-C-B$ *a cui corrisponde il costo di riparazione:*

$$4 * 9 + (4 + 1) * 2 + (4 + 1 + 2) * 3 + (4 + 1 + 2 + 3) * 1 = 36 + 10 + 21 + 10 = 77$$

che è il miglior risultato ottenibile (soluzione ottimale). ◊

Esempio 1.1.3 (Scheduling - Teoria dei giochi) *Se i macchinari appartengono ad aziende differenti le possibilità di modificare l'ordine dipendono dalla disponibilità a cooperare, eventualmente ricevendo un adeguato compenso. Si supponga di avere due macchinari appartenenti a due aziende diverse A e B.*

macchinario	*A*	*B*
tempo di riparazione	5	6
costo di fermo	2	4
urgenza	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{6}$

Secondo quanto detto in precedenza l'ordine ottimale è B - A con un costo per A di $(6+5)*2 = 22$ *e un costo per B di* $6*4 = 24$*, a fronte di un costo per A di* $5*2 = 10$ *e per B di* $(5+6)*4 = 44$ *se si fosse adottato l'ordine A - B. L'ottimalità dipende dal fatto che nel primo caso il costo per le due aziende è 46 mentre nel secondo caso è 54. Ovviamente la riduzione di costo della prima soluzione deriva da un "guadagno" per B di 20 e da una "perdita" per A di 12, per cui A chiederà che venga rispettato il fatto che il suo macchinario è stato portato per primo alla riparazione. D'altra parte B potrebbe decidere di offrire un compenso ad A se questi accetta lo scambio. Tale compenso dovrà essere almeno di 12, in modo da eguagliare la "perdita" di A ma non superiore a 20 per non superare il "guadagno" di B.* $\diamondsuit$

1.2 Modelli di programmazione matematica

Dato un problema risolubile con la programmazione matematica, un modello consiste nel rappresentare gli elementi del problema da determinare tramite variabili, dette *variabili decisionali*, e le relazioni intercorrenti tra esse sottoforma di funzioni matematiche, una delle quali rappresenta il valore del problema ed è detta *funzione obiettivo* e le altre che definiscono quali valori delle variabili sono ammissibili e sono dette *vincoli*.

La forma più generale di un problema di programmazione matematica è la seguente:

$$max \; \{f(x) \text{ s.t. } x \in \mathbb{R}^n, \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m\}$$

oppure:

$$\begin{array}{ll} max & f(x) \\ s.t. & g_i(x) \leq 0 \end{array}$$

dove x rappresenta un vettore di $\mathbb{R}^n$ le cui componenti corrispondono alle variabili decisionali, la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ rappresenta la funzione obiettivo e le relazioni $g_i(x) \leq 0, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$ rappresentano i vincoli del problema.

Tutti i problemi possono essere scritti in questa forma in quanto si ha:

1. $min \; \{f(x)\} = -max \; \{-f(x)\}$

2. $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow -g(x) \leq 0$

3. $g(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) \leq 0; -g(x) \leq 0$

Soluzioni ammissibili

L'insieme dei valori di x per cui i vincoli sono soddisfatti è detto *insieme delle soluzioni ammissibili* o *insieme ammissibile* o *regione ammissibile* e si indica con S_a. L'insieme ammissibile può essere vuoto, limitato o illimitato.

<u>**Soluzioni ottimali**</u>

L'insieme dei valori di x per cui i vincoli sono soddisfatti e la funzione obiettivo assume il valore massimo è detto *insieme delle soluzioni ottimali* o *insieme ottimale* o *regione ottimale* e si indica con S_{ott}. L'insieme ottimale può essere vuoto, limitato o illimitato. Se l'insieme ammissibile non è chiuso può non esistere il massimo, ma solo l'estremo superiore, ma questo caso non fa parte della trattazione del corso.

Risolvere un problema di programmazione matematica vuol dire determinare sia una soluzione ottimale (punto di massimo) che il valore della funzione obiettivo (valore massimo); a seconda delle situazioni può essere più rilevante il punto di massimo o il valore massimo, in particolare il punto di massimo è importante se si ricerca una strategia ottimale, mentre il valore massimo acquista maggiore importanza nel confronto tra differenti strategie.

1.2.1 Stesura di un modello

Per scrivere correttamente un modello di programmazione matematica è necessario stabilire le quantità che si vogliono determinare, cioè quelle che sono significative per il problema specifico, e quindi le variabili decisionali. Successivamente si scrivono i vincoli e la funzione obiettivo del modello, eventualmente modificando le variabili.

E' importante che le variabili utilizzate nel modello consentano sia di rispondere alle domande richieste, sia di scrivere facilmente i vincoli del problema e la funzione obiettivo e inoltre che non siano in numero troppo elevato in modo da ridurre i tempi di risoluzione. Nello scrivere i vincoli è importante che tutte le relazioni significative siano rappresentate correttamente in modo da evitare errori nella soluzione.

Una volta completato il modello e risolto il problema può essere necessario rivedere sia le variabili che le relazioni sulla base dei risultati ottenuti.

Esempio 1.2.1 (Problema della dieta) *Siano dati n alimenti contenenti m fattori nutritivi. Sia A_{ij} la quantità percentuale di fattore nutritivo i nell'alimento j, b_i il fabbisogno minimo giornaliero del fattore nutritivo i, c_j il costo unitario dell'alimento j. Trovare la dieta di minor costo che soddisfa i fabbisogni minimi.*
<u>*Modello matematico*</u>
Trovare una dieta vuol dire determinare quali alimenti utilizzare e per ciascuno di essi la quantità giornaliera. Per le caratteristiche del problema non è necessario variare la dieta di giorno in giorno, nè tenere conto del gusto nell'accoppiare i cibi.
Una buona scelta delle variabili è la quantità giornaliera x_j dell'alimento j.
I vincoli del problema consistono nell'imporre che la quantità di ciascun fattore nutritivo presente nella dieta sia non inferiore al fabbisogno minimo e che ciascun alimento sia

presente nella dieta in quantità non negativa.
La funzione obiettivo del problema è il costo della dieta, da minimizzare.
In accordo con le variabili scelte e con i dati del problema la quantità di fattore nutritivo i presente nella dieta può essere espressa come:

$$\sum_{j=1,\ldots,n} A_{ij}x_j$$

e il vincolo relativo al fattore nutritivo i come:

$$\sum_{j=1,\ldots,n} A_{ij}x_j \geq b_i$$

Il vincolo di quantità non negativa dell'alimento j può essere espresso come:

$$x_j \geq 0$$

Il costo della dieta può essere espresso come:

$$\sum_{j=1,\ldots,n} c_j x_j$$

e la funzione obiettivo come:

$$min \sum_{j=1,\ldots,n} c_j x_j$$

Riassumendo il modello può essere scritto come:

$$\begin{array}{lll} min & \sum_{j=1,\ldots,n} c_j x_j & \\ s.t. & \sum_{j=1,\ldots,n} A_{ij}x_j \geq b_i & i = 1,\ldots,m \\ & x_j \geq 0 & j = 1,\ldots,n \end{array}$$

o in forma vettoriale, con ovvio significato dei vettori e della matrice, come:

$$\begin{array}{ll} min & c^T x \\ s.t. & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

$\diamondsuit$

Capitolo 2

Programmazione lineare

2.1 Problema di programmazione lineare

Un problema di programmazione lineare o problema lineare è un problema di programmazione matematica in cui la funzione obiettivo e i vincoli sono lineari.

Definizione 2.1.1 *Un problema lineare si dice in forma canonica se è scritto nella forma:*

$$\begin{array}{ll} max & z = c^T x \\ s.t. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

dove c e x sono vettori di $\mathbb{R}^n$, A è una matrice $m \times n$ e b è un vettore di $\mathbb{R}^m$.
c rappresenta il gradiente della funzione z ed è detto vettore dei costi*, A è detta* matrice dei vincoli *e b è detto* vettore dei termini noti*.*

Osservazione 2.1.1

- *Per la precisione i vincoli sono affini, per la presenza del termine noto non nullo.*

Se la forma canonica verifica la relazione $b \geq 0$ il problema ammette la *forma normale*. Non tutti i problemi possono essere scritti in forma normale, mentre tutti i problemi possono essere scritti in forma canonica in quanto si ha:

1. $min\ z = c^T x \Leftrightarrow -max\ \ -z = (-c)^T x$

2. $Ax \geq b \Leftrightarrow (-A)x \leq (-b)$

3. $Ax = b \Leftrightarrow Ax \leq b; \quad (-A)x \leq (-b)$

4. $x \leq 0 \Leftrightarrow (-x) \geq 0$

5. x non vincolata $\Leftrightarrow x = x' - x''; \ x' \geq 0; \ x'' \geq 0$

Soluzioni ammissibili

S_a è un insieme convesso in quanto intersezione dei semispazi $(Ax)_j \leq b_j, j = 1, \ldots, m$; $x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$ e può essere vuoto se i vincoli sono incompatibili, limitato (*poliedro convesso*) oppure illimitato (*troncone convesso*).

Gli iperpiani $(Ax)_j = b_j, j = 1, \ldots, m$; $x_i = 0, i = 1, \ldots, n$ si dicono *iperpiani generatori*.

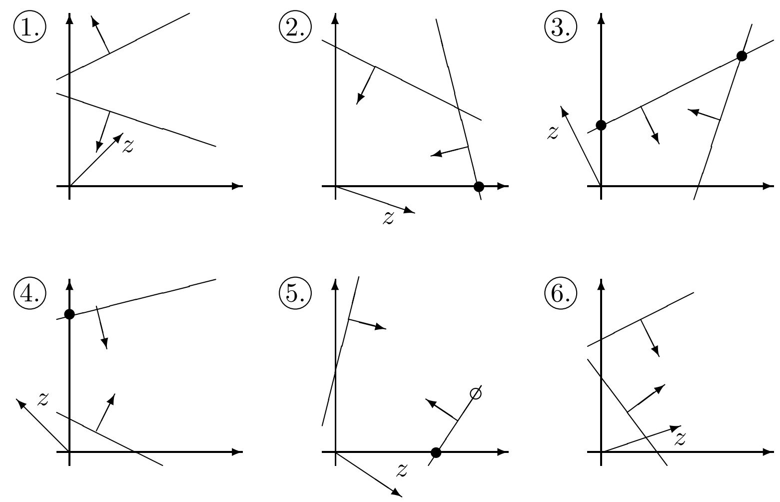
Se un punto di S_a è intersezione unica di almeno n iperpiani generatori si dice *vertice di* S_a; se è intersezione unica di più di n iperpiani generatori si dice *vertice degenere*.

L'intersezione di almeno $n-1$ iperpiani generatori di cui $n-1$ linearmente indipendenti è una retta. La parte di retta appartenente ad S_a si dice *spigolo di* S_a; se uno spigolo è limitato i due vertici estremi si dicono *adiacenti*.

Soluzioni ottimali

S_{ott} è un insieme convesso ed è contenuto nella frontiera di S_a, salvo che la funzione z sia costante, e può essere vuoto, costituito da un unico punto o da infiniti punti, in quanto se contiene due punti distinti contiene tutto il segmento che ha per estremi i due punti; se è costituito da infiniti punti può essere limitato, cioè è un poliedro convesso, oppure illimitato, cioè è un troncone convesso.

Se S_a è vuoto non esistono soluzioni ottimali; se S_a è un poliedro convesso esistono sempre soluzioni ottimali (teorema di Weierstrass); se S_a è un troncone convesso o esistono soluzioni ottimali o la funzione obiettivo è superiormente illimitata.



Nella figura precedente il vettore z rappresenta il gradiente della funzione obiettivo, gli altri vettori rappresentano i gradienti dei vincoli e sono stati omessi quelli relativi ai vincoli di non negatività; sono rappresentati i seguenti casi:

1. $S_{ott} = \emptyset$ in quanto $S_a = \emptyset$;
2. S_{ott} costituito da un unico punto con S_a limitato;
3. S_{ott} costituito da un insieme limitato di infiniti punti con S_a limitato;
4. S_{ott} costituito da un unico punto con S_a illimitato;
5. S_{ott} costituito da un insieme illimitato di infiniti punti con S_a illimitato;

6. $S_{ott} = \emptyset$ in quanto la funzione obiettivo è superiormente illimitata con S_a illimitato.

Teorema 2.1.1 (Teorema fondamentale della programmazione lineare) *Se un problema lineare ha soluzioni ottimali almeno una di esse è un vertice di S_a.*

Osservazione 2.1.2

- *Il teorema precedente è detto fondamentale in quanto riduce la ricerca della soluzione ottimale ai soli vertici di S_a e costituisce il fondamento dell'algoritmo del simplesso.*
- *Anche se l'enunciato riportato è quello classico, si può osservare che in realtà si sottintende che il problema sia in forma canonica. Si consideri il seguente problema:*

$$\begin{array}{ll} max & z = x_1 + x_2 \\ s.t. & x_1 + x_2 \leq 1 \end{array}$$

  Il problema ammette massimo, con $z^* = 1$ e $S_{ott} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 + x_2 = 1\}$ ma non esistono vertici.

Un problema lineare presenta uno dei seguenti casi mutualmente esclusivi:

1. S_a è vuoto;
2. esistono soluzioni ottimali;
3. la funzione z è superiormente illimitata.

1 e 3 si dicono *casi di impossibilità*.

L'algoritmo più noto per la soluzione di un problema di programmazione lineare è l'*algoritmo del simplesso*, presentato da Dantzig nel 1947.

L'idea di fondo è determinare una base di iperpiani generatori la cui intersezione sia costituita da un vertice ottimale. L'algoritmo inizia con la base canonica $\{x_i = 0, i = 1, ..., n\}$ a cui è associato il vertice, non necessariamente ammissibile, $(0, ..., 0)$. Se il vertice iniziale non è ammissibile c'è una fase preliminare in cui l'algoritmo, scambiando un iperpiano in base e uno fuori base, determina una sequenza (finita) di vertici fino a che si ottiene una soluzione ammissibile o si determina che la regione ammissibile è vuota. Se si trova un vertice ammissibile, l'algoritmo, in una seconda fase, determina una sequenza (finita) di vertici ammissibili fino a che si ottiene una soluzione ottimale o si determina che la funzione obiettivo è superiormente illimitata.

2.2 Problema duale

Sia dato il problema lineare:

$$\begin{array}{ll} max & z = c^T x \\ s.t. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

È sempre possibile definire un problema ad esso associato della forma:

$$\begin{array}{ll} min & w = b^T u \\ s.t. & A^T u \geq c \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Il problema associato prende il nome di *problema duale* e il problema dato può essere indicato come *problema primale.*

Osservazione 2.2.1

- *I due problemi sono definiti in due spazi differenti. In particolare se A è una matrice $m \times n$ il vettore x ha n componenti, cioè il problema è in $\mathbb{R}^n$, mentre il vettore u ha m componenti, cioè il problema è in $\mathbb{R}^m$.*

2.2.1 Proprietà di un problema e del suo duale

1. Il duale del problema duale coincide con il problema dato.

2. Se un problema lineare e il suo duale hanno rispettivamente soluzioni ammissibili x^0 e u^0, allora vale:
$$c^T x^0 \leq b^T u^0$$
e inoltre entrambi hanno soluzioni ottimali.

3. Se un problema lineare e il suo duale hanno rispettivamente soluzioni ammissibili x^* e u^* per cui vale $c^T x^* = b^T u^*$, allora x^* e u^* sono soluzioni ottimali rispettivamente del primale e del duale.

4. <u>I teorema della dualità.</u> Uno dei due problemi ha soluzioni ottimali se e solo se ne ha anche l'altro.
In questo caso $max\ z = min\ w$.

5. Se uno dei due problemi ha soluzione illimitata allora l'altro non ha soluzioni ammissibili.

6. Se uno dei due problemi non ha soluzioni ammissibili allora l'altro o ha soluzione illimitata o non ha soluzioni ammissibili.

7. II teorema della dualità. Due soluzioni ammissibili x^* e u^* sono soluzioni ottimali se e solo se valgono le relazioni:

$$\begin{aligned}(b - Ax^*)^T u^* &= 0 \\ (A^T u^* - c)^T x^* &= 0\end{aligned}$$

Osservazione 2.2.2

- *Le relazioni del II teorema della dualità vengono chiamate anche condizioni di complementarietà. La prima esprime che se un vincolo è soddisfatto come disuguaglianza stretta la corrispondente variabile duale deve essere nulla, la seconda che se una variabile è non nulla il corrispondente vincolo duale deve essere soddisfatto come uguaglianza.*
  Queste relazioni non sono invertibili nel senso che un vincolo può essere soddisfatto come uguaglianza e la corrispondente variabile duale può essere nulla.

2.2.2 Interpretazione economica del problema duale

Con riferimento ad un problema di produzione:

$$\begin{array}{ll} max & z = c^T x \\ s.t. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

dove b rappresenta il vettore delle risorse, x il vettore dei beni prodotti, A la matrice tecnologica che esprime le unità di risorsa necessarie per unità di bene prodotto e c il vettore dei valori unitari dei beni prodotti, allora la funzione obiettivo esprime il valore complessivo dei beni prodotti, di cui si cerca il massimo e i vincoli indicano che le quantità di beni prodotti devono essere non negative e che per produrre i vari beni non si possono utilizzare più risorse di quelle disponibili.

Dimensionalmente si ha:

$$[A] = \frac{unità\ di\ risorsa}{unità\ di\ bene}$$
$$[c] = \frac{denaro}{unità\ di\ bene}$$

per cui dalla relazione $[A][u] = [c]$ si ricava:

$$[u] = \frac{denaro}{unità\ di\ risorsa}$$

E' necessario fare attenzione a non affermare che le variabili duali rappresentano il valore unitario delle risorse perchè il valore delle risorse è un dato e non una variabile, inoltre alcune risorse risultebbero avere valore nullo.

Alle variabili duali si assegna il significato di costo-ombra delle risorse, cioè di valore di una ulteriore unità di risorsa in quel processo produttivo; la funzione obiettivo rappresenta il costo-ombra globale delle risorse o valore-ombra del processo produttivo, di cui si cerca il minimo e i vincoli indicano che i costi-ombra non possono essere negativi e che i costi-ombra unitari dei beni prodotti non possono essere inferiori ai valori corrispondenti.

Il termine costo-ombra è dato dal fatto che non è legato al valore effettivo della risorsa, ma a quello che ha in quello specifico processo produttivo, cioè con quella data matrice tecnologica e quelle date risorse.

Le condizioni di complementarietà dicono che se una risorsa non viene completamente utilizzata il costo-ombra è nullo, mentre se una risorsa viene completamente utilizzata il costo-ombra può essere positivo o nullo e che un bene non viene prodotto se il costo-ombra è superiore al suo valore, mentre se è uguale può essere prodotto o meno.

In altre parole se una risorsa non è completamente utilizzata non vi è nessun vantaggio ad averne una maggiore disponibilità; se invece è completamente utilizzata il valore dei beni prodotti può essere incrementato disponendo di una ulteriore unità di risorsa (variabile duale non nulla) o può restare invariato (variabile duale nulla). Analogamente se il costo-ombra delle risorse necessarie a produrre un bene è superiore al suo valore è svantaggioso produrlo; se invece è uguale al suo valore può essere svantaggioso produrlo (variabile primale nulla) o può non esserlo (variabile primale non nulla).

Una ulteriore interpretazione del problema duale del problema di produzione può essere la seguente. Si supponga che una ditta decida di voler acquistare tutte le risorse e debba conseguentemente determinare il vettore dei prezzi u da offrire per ogni unità di risorsa in modo da ottenere il miglior risultato possibile; la ditta cercherà di minimizzare la spesa di acquisto ($b^T u$), facendo in modo che il possessore delle risorse sia “interessato” a vendere le sue risorse, cioè stabilendo i prezzi in modo tale che il valore che pagherebbe per la quantità delle risorse necessarie a produrre una unità di bene sia non inferiore al suo valore unitario ($A^T u \geq c$) e fissando dei prezzi non negativi ($u \geq 0$).

Capitolo 3

Teoria dei giochi e utilità

3.1 Esempio preliminare (da Young, 1994)

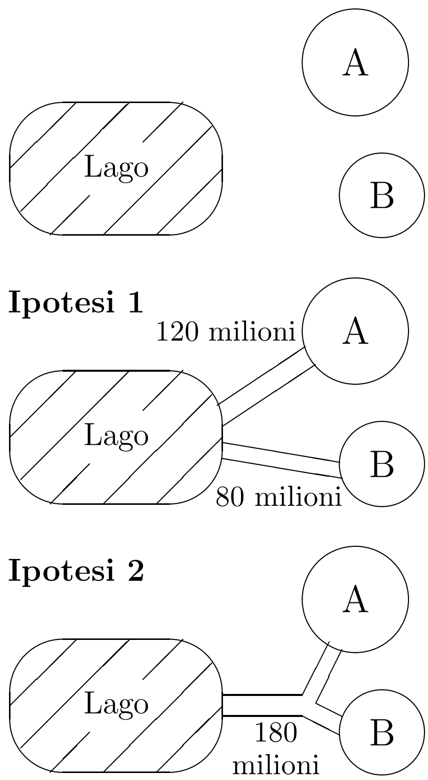
Due paesi A e B, aventi rispettivamente 3.600 e 1.200 abitanti, vogliono costruire un acquedotto attingendo allo stesso lago. Il problema può essere risolto utilizzando i metodi della programmazione matematica, tramite un modello del tipo seguente:

min *Spesa di costruzione*
s.t. *Collegare A al lago*
Rispettare le specifiche di A
Collegare B al lago
Rispettare le specifiche di B

Le soluzioni ammissibili possono essere raggruppate in due sottoinsiemi che corrispondono alle ipotesi 1 e 2 raffigurate a lato. La soluzione ottimale è:

$x^* \;=\;$ *ipotesi 2*
$z^* \;=\;$ *180 milioni*

Affinchè la soluzione sia attuabile deve esserci la disponibilità dei paesi ad accordarsi per una realizzazione in comune.



Se questa disponibilità esiste è necessario stabilire con quale criterio ripartire la spesa. Alcuni dei criteri possibili e i relativi costi per i due paesi sono i seguenti:

	Criterio	*A*	*B*
1	*Uguale divisione dei costi tra i paesi*	*90*	*90*
2	*Uguale divisione dei costi tra gli abitanti*	*135*	*45*
3	*Uguale divisione del risparmio tra i paesi*	*110*	*70*
4	*Uguale divisione del risparmio tra gli abitanti*	*105*	*75*
5	*Divisione dei costi (e del risparmio) in proporzione all'acquedotto singolo*	*108*	*72*

Si può osservare che il criterio 1 è il più vantaggioso per il paese A ma è rifiutato dal paese B, il criterio 2 è il più vantaggioso per il paese B ma è rifiutato dal paese A mentre gli altri criteri risultano più o meno vantaggiosi per i due paesi ma nessuno dei due può rifiutarne a priori qualcuno, anche se il paese A preferisce il criterio 4 e il paese B preferisce il criterio 3.

Serve quindi una metodologia di scelta. In altre parole la programmazione matematica risulta insufficiente a descrivere, e quindi risolvere, il problema dato.

La Teoria dei Giochi fornisce gli strumenti matematici per analizzare il problema e non fornisce "la" soluzione, ma propone una soluzione (*solution concept*).

3.2 Introduzione

La Ricerca Operativa classica suppone che le decisioni relative ad un problema siano prese da un unico decisore che può operare in totale autonomia e con completa libertà.

La Teoria dei Giochi tratta le situazioni in cui il risultato dipende dalle scelte fatte da più persone, dette *giocatori*, che operano perseguendo obiettivi che possono risultare comuni, ma non identici, differenti ed eventualmente contrastanti; possono essere presenti anche aspetti aleatori.

Il nome deriva dal libro *Theory of Games and Economic Behavior* di von Neumann e Morgenstern (1944).

Esempio 3.2.1 (Dilemma del prigioniero) *È uno dei problemi più noti della Teoria dei Giochi; è stato introdotto nel 1950 da Dresher e Flood (Flood, 1958); la "storiellina" seguente è dovuta a Tucker (1953). Due individui I e II sono stati arrestati per lo stesso reato e vengono interrogati separatamente dal giudice; ognuno può scegliere indipendentemente dall'altro di confessare (C) o non confessare (NC).*
Se entrambi non confessano vengono condannati per reati minori a due anni ciascuno; se entrambi confessano vengono condannati a cinque anni ciascuno; se uno confessa e l'altro no quello che confessa ha uno sconto di pena e viene condannato a un anno, mentre l'altro ha un'aggravante e viene condannato a sei anni. Le pene sono riportate nella tabella come coppia (I, II).

I/II	C	NC
C	$-5, -5$	$-1, -6$
NC	$-6, -1$	$-2, -2$

Ragionevolmente I sceglie C poichè consegue una condanna minore qualunque sia la scelta di II ($-5 > -6; -1 > -2$) *e analogamente II sceglie C. La decisione attesa è quindi (C, C), con una condanna a 5 anni per ciascuno (equilibrio in strategie dominanti), mentre per entrambi sarebbe più vantaggiosa la scelta (NC, NC) con 2 anni per ciascuno.* ♢

Esempio 3.2.2 (Battaglia dei sessi) *Due fidanzati devono scegliere tra andare al teatro (T) o alla partita (P). Lei (I) preferisce il teatro mentre lui (II) preferisce la partita, ma entrambi non hanno interesse a restare da soli, come riportato nella tabella. In questo caso non esiste una strategia dominante per nessun giocatore (ad esempio per I scegliendo T si ha che* $2 > 0$ *ma* $0 < 1$*).*

I/II	T	P
T	$2, 1$	$0, 0$
P	$0, 0$	$1, 2$

$\diamondsuit$

Esempio 3.2.3 (Puro coordinamento) *È una significativa variante in cui entrambi i giocatori hanno le stesse preferenze.*

I/II	T	P
T	$1, 1$	$0, 0$
P	$0, 0$	$1, 1$

$\diamondsuit$

Si possono fare alcune considerazioni.

Nell'Esempio 3.2.2 (e soprattutto nel 3.2.3) una telefonata per conoscere la decisione dell'altro giocatore, o un accordo al 50 per cento, o una strategia correlata possono risolvere facilmente il problema. Nell'Esempio 3.2.1 invece questo non succede in quanto la possibilità di comunicare renderebbe probabile un accordo per la strategia NC, ma al momento della decisione sia I che II risceglierebbero C, poichè $-1 > -2$.

Secondo la classificazione di Harsanyi (1966) si distinguono due classi di giochi:

Giochi non cooperativi	Non sono possibili accordi vincolanti tra i giocatori.
Giochi cooperativi	Sono possibili accordi vincolanti tra i giocatori.

Osservazione 3.2.1

- *Attualmente si preferisce assumere, più restrittivamente, che in un gioco non cooperativo i giocatori non possano nemmeno comunicare in quanto ciò potrebbe alterare il risultato.*

- *I giochi cooperativi sono divisi in due sottoclassi: giochi a utilità non trasferibile (NTU) o senza pagamenti laterali, e giochi a utilità trasferibile (TU) o a pagamenti laterali, che costituiscono un caso particolare dei giochi NTU.*

3.3 Rappresentazione di un gioco

Un gioco può essere presentato principalmente in tre forme: la forma estesa, introdotta da von Neumann (1928) e formalizzata da Kuhn (1953); la forma strategica, così chiamata da Shubik (1982), ma già definita forma normale da von Neumann e Morgenstern (1944); la forma caratteristica dovuta a von Neumann e Morgenstern (1944), usata per i giochi cooperativi.

Definizione 3.3.1

- *Si chiama funzione dei pagamenti (payoff) una funzione f che assegna ad ogni giocatore la sua vincita per ogni possibile terminazione del gioco.*
- *Si chiama strategia del giocatore i una funzione σ_i che assegna al giocatore i una mossa per ogni possibile situazione del gioco.*

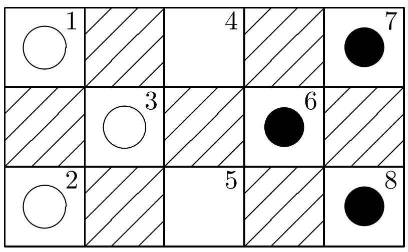
In altre parole la strategia può essere vista come un "piano di azione" che individua in ogni situazione del gioco una "azione" tra le tante possibili.

3.3.1 Forma estesa

È una descrizione puntuale del gioco, delle mosse e delle relative probabilità, della situazione dopo ogni mossa, delle strategie, degli insiemi di informazione (insiemi di nodi che globalmente rappresentano la situazione di un giocatore), ecc.; risulta molto ricca ma poco maneggevole.

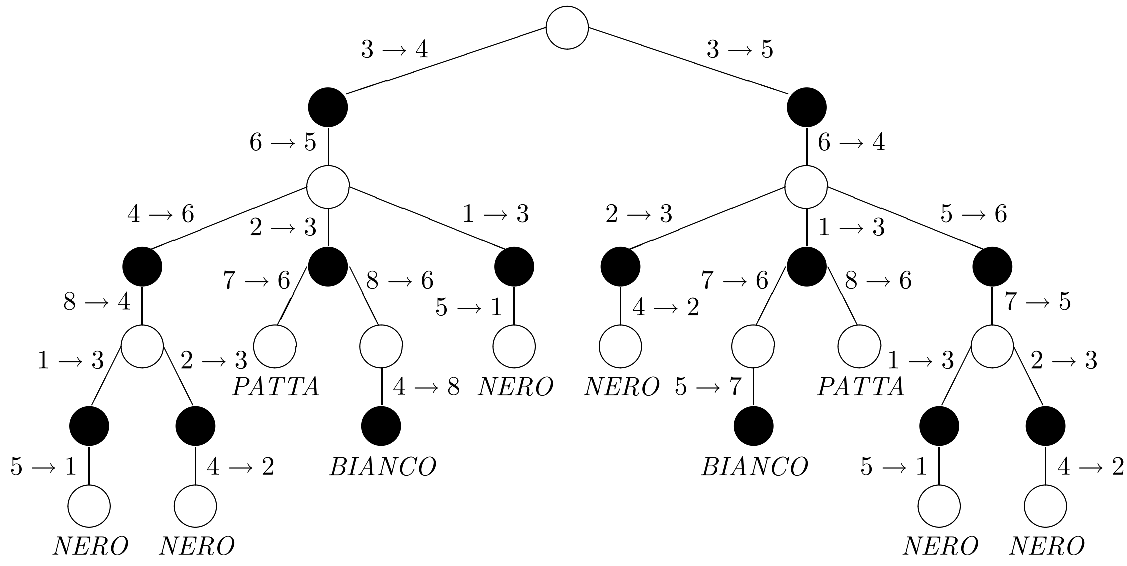
In generale si utilizza una rappresentazione ad albero in cui ad ogni nodo si associa una possibile situazione del gioco, agli archi uscenti da ciascun nodo si associano le possibili mosse del giocatore che è chiamato a muovere in quella situazione e ai nodi terminali si associano i valori delle vincite (payoff) di ciascun giocatore.

Esempio 3.3.1 (Dama semplificata) *Si consideri una dama giocata su una scacchiera costituita da 15 caselle (3×5) 8 bianche e 7 nere.*
Ogni giocatore ha tre pedine che muove sulle caselle bianche numerate da 1 a 8 (il bianco muove verso destra e il nero verso sinistra); se può "mangiare" una pedina dell'avversario deve farlo.



La partita termina con la vittoria del giocatore che riesce a portare per primo una sua pedina sull'ultima colonna, o viene considerata conclusa in parità se un giocatore non può muovere.

In questo caso non sono assegnate probabilità alle mosse, le strategie sono le sequenze di mosse (una per ogni possibile nodo), i payoff sono espressi come risultato della partita e gli insiemi di informazione contengono un solo nodo.
Il gioco può essere rappresentato in forma estesa dal seguente albero:



◇

3.3.2 Forma strategica

Se ci sono n giocatori si utilizza una $2n$-upla $(\sum_1, \sum_2, \ldots, \sum_n, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ dove:

- $\sum_1, \sum_2, \ldots, \sum_n$ sono insiemi non vuoti contenenti le possibili strategie o scelte di ogni giocatore.
- $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sono funzioni reali definite sul prodotto cartesiano degli insiemi $\sum_i$ cioè:

$$f_i : \prod_{k=1,\ldots,n} \Sigma_k \to \mathbb{R} \qquad i = 1, .., n$$

Una possibile interpretazione è che tutti i giocatori scelgono contemporaneamente la loro strategia e la f_i dice quale è il guadagno del giocatore i determinato dalle scelte fatte.

Da quanto detto a proposito di strategie nella forma estesa, si può intuire la possibilità (e il modo) di passare dalla forma estesa a quella strategica (il passaggio inverso risulta più complesso).

Gli elementi della forma strategica possono essere riassunti in una tabella come negli esempi precedenti.

Se il gioco è a due giocatori si parla anche di *gioco a matrice doppia*, o *bimatrice*, in quanto i payoff dei giocatori possono essere rappresentati tramite due matrici.

3.3.3 Forma caratteristica

Questa forma può essere usata solo per i giochi cooperativi in quanto fa riferimento alla nozione di *coalizione*.

Definizione 3.3.2

- *Detto N l'insieme dei giocatori, ogni sottoinsieme S di N è detto coalizione. Se $S = N$ si ha la grande coalizione.*
- *Si dice funzione caratteristica di un gioco ad n giocatori una funzione indicata con v (se il gioco è senza pagamenti laterali si usa V ed è più complessa) per cui si ha:*

$$v : \wp(N) \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } v(\emptyset) = 0$$

- *Se per ogni coppia di coalizioni disgiunte S e T si ha $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$ la funzione v è detta additiva; se si ha $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ la funzione v è detta superadditiva; se si ha $v(S \cup T) \leq v(s) + v(T)$ la funzione v è detta subadditiva.*

In altre parole v assegna ad S la massima vincita possibile indipendentemente dal comportamento degli altri giocatori.

Osservazione 3.3.1

- *In generale la funzione caratteristica è sufficiente a descrivere il gioco, per cui possono essere identificati.*

Un gioco descritto tramite la funzione caratteristica è detto in *forma caratteristica* o *coalizionale*. Se la funzione caratteristica è additiva o superadditiva o subadditiva anche il gioco è detto *additivo* o *superadditivo* o *subadditivo*. Se per ogni coalizione S si ha $v(S) + v(N \setminus S) = v(N)$ il gioco è detto *a somma costante*.

Esempio 3.3.2 (Maggioranza semplice) *Tre giocatori vogliono conseguire un risultato; se almeno due di essi si uniscono raggiungono il loro obiettivo. Questa situazione può essere rappresentata dal seguente gioco:*

$N = \{1, 2, 3\}$

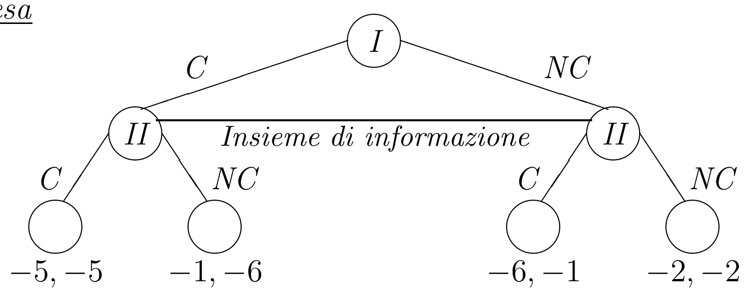
$v(\emptyset) = v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1$

Il modello è molto semplice, ma anche limitato (ad esempio non è detto come si realizza l'accordo tra i giocatori). ♢

La forma caratteristica costituisce una descrizione molto "povera" del gioco, in quanto non permette di definire la vincita di ogni singolo giocatore della coalizione, ma solo la vincita complessiva.

Esempio 3.3.3 (Rappresentazioni del dilemma del prigioniero)

Forma estesa



Forma strategica

$\Sigma_I = \{C, NC\}; \Sigma_{II} = \{C, NC\}$

$f_I(C, C) = -5; f_I(C, NC) = -1; f_I(NC, C) = -6; f_I(NC, NC) = -2$

$f_{II}(C, C) = -5; f_{II}(C, NC) = -6; f_{II}(NC, C) = -1; f_{II}(NC, NC) = -2$

Forma caratteristica

$N = \{I, II\}$

$v(\emptyset) = 0; v(I) = v(II) = -5; v(I, II) = -4$ ♢

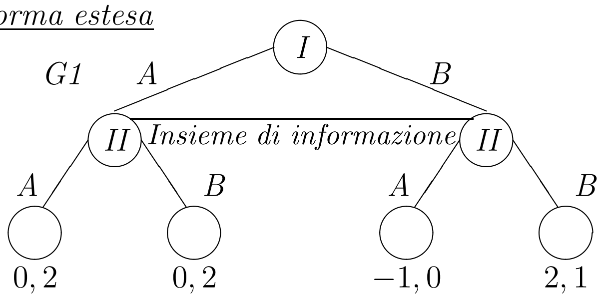
In generale la forma estesa contiene più informazione sul gioco rispetto alla forma strategica, che risulta comunque sufficiente a rappresentare un gioco.

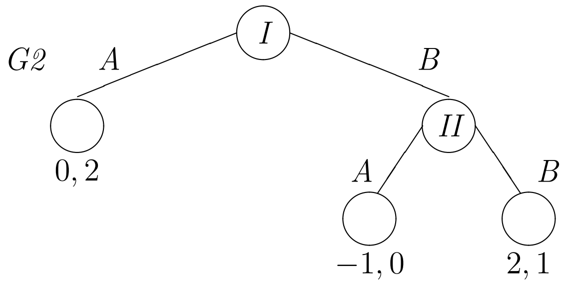
Esempio 3.3.4 (Rappresentazioni in forma estesa e in forma strategica) *Si considerino i due seguenti giochi:*

G1 *Due giocatori I e II scelgono contemporaneamente tra due possibili strategie A e B; se giocano (A, A) oppure (A, B) i payoff sono $(0, 2)$, se giocano (B, A) i payoff sono $(-1, 0)$, se giocano (B, B) i payoff sono $(2, 1)$.*

G2 *Due giocatori I e II scelgono successivamente tra due possibili strategie A e B; se il giocatore I gioca A il gioco termina con payoff $(0, 2)$, se gioca B il turno passa al giocatore II; se II gioca A il gioco termina con payoff $(-1, 0)$, se gioca B il gioco termina con payoff $(2, 1)$.*

Forma estesa





Forma strategica

G1 - G2

I/II	A	B
A	$0, 2$	$0, 2$
B	$-1, 0$	$2, 1$

La forma strategica è unica, ma ovviamente è sufficiente a descrivere i giochi in quanto non esiste una differenza sostanziale. $\diamondsuit$

3.4 Teoria dell'utilità

Negli esempi fatti era ovvio quale potesse essere lo scopo dei giocatori, ma in generale è necessario essere più precisi. In questo paragrafo si definiscono i concetti di *preferenza* e di *utilità di von Neumann-Morgenstern* che permettono di assegnare e interpretare i valori numerici utilizzati nelle rappresentazioni dei giochi.
I giocatori cercano di adottare una strategia che permetta loro di giungere al risultato che preferiscono, cioè vogliono massimizzare la loro utilità; al fine di identificare quale risultato si vuole perseguire è necessario prendere in considerazione valori differenti: economico, sentimentale, sociale, ecc. Ad esempio se un giocatore deve decidere se donare una somma di denaro senza ricevere nulla in cambio, considerando solo i valori monetari la decisione sarebbe sempre non donare.

Definizione 3.4.1

- *Dati due eventi A e B si dice che A è preferibile a B per un giocatore se egli cerca di conseguire A invece di B e si indica con ApB.*
- *Dati due eventi A e B si dice che A è indifferente a B per un giocatore se nessuno è preferibile all'altro e si indica con AiB.*

Assiomi
A1 *Dati due eventi A e B allora ApB oppure BpA oppure AiB.*
A2 AiA.
A3 $AiB \Rightarrow BiA$.
A4 $AiB, BiC \Rightarrow AiC$.
A5 $ApB, BpC \Rightarrow ApC$.
A6 $ApB, BiC \Rightarrow ApC$.
A7 $AiB, BpC \Rightarrow ApC$.

Osservazione 3.4.1

- *La relazione di preferenza è solo qualitativa e non quantitativa, per cui non si adatta a definire quanto si può ottenere in più a fronte di un rischio maggiore. Inoltre nessun bene soddisfa l'ipotesi di linearità, tranne al più in brevi intervalli.*

Gli eventi possono essere certi oppure incerti secondo una probabilità nota; tale situazione viene rappresentata tramite il concetto di lotteria.

Definizione 3.4.2 *Dati due eventi A e B si chiama lotteria l'evento $rA + (1-r)B, 0 \leq r \leq 1$, in cui A si verifica con probabilità r e l'evento B con probabilità $1-r$.*

Osservazione 3.4.2

- *La lotteria non è una combinazione lineare di eventi, in quanto il risultato può essere solo A o B e non qualcosa di intermedio; la lotteria permette di valutare l'evento "esce A o esce B".*

Proprietà
P1 $AiC \Rightarrow \{rA + (1-r)B\}i\{rC + (1-r)B\} \quad \forall r,\ \forall B$
P2 $ApC \Rightarrow \{rA + (1-r)B\}p\{rC + (1-r)B\} \quad r > 0, \forall B$
P3 $ApCpB \Rightarrow \exists! r, 0 < r < 1$ *t.c.* $\{rA + (1-r)B\}iC$

Osservazione 3.4.3

- *Se un decisore soddisfa gli assiomi A1 - A7 e le proprietà P1 - P3 viene considerato "razionale".*

Esempio 3.4.1 (Preferenze) *Siano date le lotterie:*

$$\begin{aligned} E_1 &= \{0, 100 \quad con \quad \boldsymbol{P}(0) = 1/2, \boldsymbol{P}(100) = 1/2\} \\ E_2 &= \{40, 60 \quad con \quad \boldsymbol{P}(40) = 3/4, \boldsymbol{P}(60) = 1/4\} \\ E_3 &= \{0, 100, 40, 60 \quad con \quad \boldsymbol{P}(0) = 1/4, \boldsymbol{P}(100) = 1/4, \boldsymbol{P}(40) = 3/8, \boldsymbol{P}(60) = 1/8\} \end{aligned}$$

Il guadagno atteso di E_1 è 50, quello di E_2 è 45 e quello di E_3 è 47.5, ma questo non impone una preferenza tra i tre eventi, nel senso che E_1 permette guadagni maggiori, E_2 garantisce rischi minori ed E_3 è intermedio; le uniche relazioni da soddisfare sono:

$$\begin{array}{l} E_1 i E_2 \Rightarrow E_1 i E_3, E_2 i E_3 \\ oppure \\ E_1 p E_2 \Rightarrow E_1 p E_3, E_3 p E_2 \\ oppure \\ E_2 p E_1 \Rightarrow E_2 p E_3, E_3 p E_1 \end{array}$$

$\diamondsuit$

Dato un insieme di eventi E, una relazione di preferenza su E può essere rappresentata con una funzione di utilità $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ tale che per ogni coppia di eventi $E_1, E_2 \in E$ si ha:

$$\begin{array}{l} E_1 p E_2 \Leftrightarrow u(E_1) > u(E_2) \\ u(rE_1 + (1-r)E_2) = ru(E_1) + (1-r)u(E_2) \end{array}$$

Osservazione 3.4.4

- *La funzione di utilità permette di quantificare le preferenze.*

- *L'utilità di von Neumann-Morgenstern impone la linearità sulle lotterie.*

La funzione u è unica a meno di trasformazioni affini, cioè u è una funzione di utilità se e solo se lo è anche:

$$\hat{u} = \alpha u + \beta \quad \text{con} \quad \alpha > 0$$

Esempio 3.4.2 (Funzioni di utilità) *Il dilemma del prigioniero può essere rappresentato con una qualunque delle seguenti matrici:*

I/II	C	NC
C	$-5,-5$	$-1,-6$
NC	$-6,-1$	$-2,-2$

I/II	C	NC
C	$1,1$	$5,0$
NC	$0,5$	$4,4$

I/II	C	NC
C	$-4,0$	$0,-10$
NC	$-5,40$	$-1,30$

Le tre matrici sono legate dalle relazioni affini:

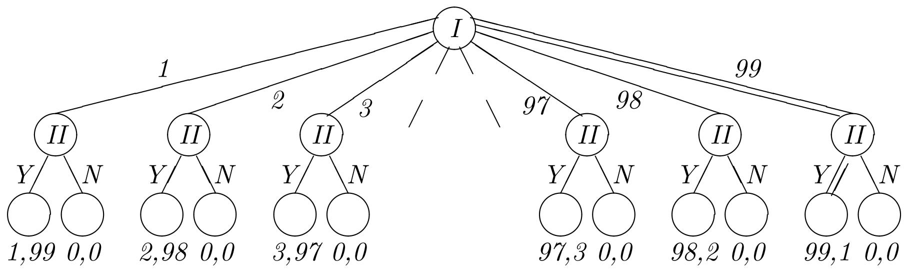
$$\begin{array}{ll} u'_I = u_I + 6 & u''_I = u_I + 1 \\ u'_{II} = u_{II} + 6 & u''_{II} = 10u_{II} + 50 \end{array}$$ ♢

Per evidenziare la differenza tra guadagno e utilità può essere interessante il seguente esempio.

Esempio 3.4.3 (Ultimatum game) *Due persone devono dividersi la cifra di 100 euro con le seguenti regole:*

- *I propone una divisione (numeri interi, lasciando almeno 1 euro a ciascuno)*
- *se II accetta la divisione proposta, la divisione ha luogo*
- *se II non accetta la divisione proposta, non si assegna alcuna cifra*
- *entrambe le persone non sanno e non sapranno mai chi è l'altra.*

Quale cifra conviene proporre a I?
La scelta ottimale del secondo giocatore è accettare sempre. In conseguenza la scelta ottimale del primo giocatore è proporre il massimo.



Nelle sperimentazioni, questa soluzione non si realizza quasi mai, poichè l'utilità reale dei giocatori tiene conto di altri fattori, ad esempio l'equità, e quindi una funzione di utilità che dipende solo dalla quantità di denaro non rappresenta le preferenze dei giocatori. ♢

3.5 Soluzione di un gioco (Solution concept)

Una volta detto cosa è un gioco e come lo si può rappresentare è necessario specificare cosa vuol dire risolverlo o determinare una soluzione.

Innanzitutto poichè le variabili decisionali non dipendono da un unico giocatore, non è possibile dare una soluzione nel senso della ricerca operativa classica; risolvere un gioco consiste nel fornire delle indicazioni ad uno o più giocatori, eventualmente tutti, sulle strategie da adottare se il gioco è non cooperativo o cooperativo ad utilità non trasferibile, oppure sulla suddivisione della vincita se il gioco è cooperativo ad utilità trasferibile. Ovviamente tali indicazioni non possono essere assolute in quanto bisogna tenere conto di altri fattori alcuni aleatori, altri legati a preferenze e sensazioni del singolo giocatore.

Nell'esempio della battaglia dei sessi se entrambi sono "egoisti" o "altruisti" l'esito è una serata solitaria per entrambi, quindi è necessario che uno sia "egoista" e l'altro "altruista"; d'altra parte è sufficiente che nelle situazioni precedenti sia stata scelta più volte la partita per far si che sia probabile la scelta teatro (o viceversa), senza quindi coinvolgere "egoismo" e "altruismo", ma solo un sentimento di "parità".

In altre parole il termine "concetto di soluzione" indica quella che secondo alcuni criteri assoluti è una scelta che può risultare accettabile a tutti i giocatori secondo i loro criteri soggettivi.

Esempio 3.5.1 (Divisione di una torta tra due giocatori) *È uno dei problemi più significativi, in quanto molto semplice, molto comune e molto complesso. La soluzione più usuale in cui uno taglia e l'altro sceglie in realtà non è assolutamente equa in quanto può favorire chi sceglie se chi taglia non è preciso, o chi taglia se è a conoscenza di qualche preferenza o "punto debole" di chi sceglie.* ♢

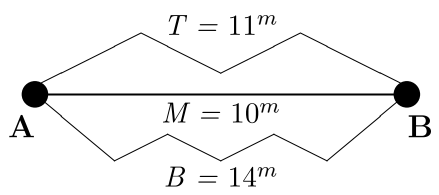
Capitolo 4

Giochi non cooperativi

4.1 Introduzione

In questa classe di giochi, introdotta da von Neumann e Morgenstern (1944), i giocatori non possono stipulare accordi vincolanti (o comunicare), indipendentemente dal fatto che i loro obiettivi siano contrastanti o comuni e possano quindi avere interesse ad accordarsi.

Esempio 4.1.1 (Congestione) *Per andare da A a B sono possibili tre strade con differenti tempi di percorrenza, che dipendono dalla lunghezza e da altri fattori, in particolare dal traffico, per cui se più persone scelgono la stessa strada il corrispondente tempo aumenta.*
Si considerino tre utenti e si supponga che l'aumento sia di due minuti se una strada è scelta da due utenti e di cinque minuti se è scelta dai tre utenti. Il gioco può essere rappresentato in forma strategica dalle tabelle seguenti.



III = T			
I/II	*T*	*M*	*B*
T	16, 16, 16	13, 10, 13	13, 14, 13
M	10, 13, 13	12, 12, 11	10, 14, 11
B	14, 13, 13	14, 10, 11	16, 16, 11

III = M			
I/II	*T*	*M*	*B*
T	13, 13, 10	11, 12, 12	11, 14, 10
M	12, 11, 12	15, 15, 15	12, 14, 12
B	14, 11, 10	14, 12, 12	16, 16, 10

III = B			
I/II	*T*	*M*	*B*
T	13, 13, 14	11, 10, 14	11, 16, 16
M	10, 11, 14	12, 12, 14	10, 16, 16
B	16, 11, 16	16, 10, 16	19, 19, 19

In questo caso l'obiettivo dei giocatori è comune (ma non è identico, in quanto ognuno vuole minimizzare il proprio tempo di percorrenza), ma la cooperazione, nella realtà, è impossibile per la difficoltà di accordarsi su chi percorre le strade più lente. $\diamondsuit$

4.2 Equilibrio di Nash

Il più semplice e importante concetto di soluzione per un gioco non cooperativo è l'equilibrio di Nash (1950).

Definizione 4.2.1 *Dato un gioco G si dice che la n-upla di strategie* $(\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ *con* $\sigma_i^* \in \Sigma_i$ *costituisce un equilibrio, o è in equilibrio, se nessun giocatore ha interesse ad essere l'unico che cambia strategia, cioè se:*

$$f_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_i^*, \ldots, \sigma_n^*) \geq f_i(\sigma_1^*, \ldots, \sigma_i, \ldots, \sigma_n^*), \qquad \forall\ \sigma_i \in \Sigma_i, \forall\ i \in N$$

Ovviamente possono esistere differenti strategie per uno o più giocatori a cui corrispondono payoff migliori, come nel caso del dilemma del prigioniero in cui l'equilibrio risulta inefficiente e il risultato più ovvio per un "supervisore" non è di equilibrio.

Un gioco può avere più equilibri come nell'Esempio 3.2.2 in cui le soluzioni (T, T) e (P, P) sono di equilibrio.

4.3 Giochi a somma zero

Definizione 4.3.1 *Un gioco G si dice a somma zero se per ogni terminazione del gioco la somma dei payoff è nulla.*

In altre parole tutto quello che viene guadagnato da qualche giocatore viene perso da qualche altro giocatore.

Nel caso più semplice a due giocatori la matrice dei pagamenti può essere espressa indicando la vincita, positiva o negativa, del primo giocatore poichè la vincita del secondo è in ogni caso l'opposto. Si può utilizzare una matrice A in cui la riga i è associata alla strategia σ_i del giocatore I, la colonna j alla strategia σ_j del giocatore II e l'elemento a_{ij} rappresenta quanto il primo giocatore riceve dal secondo se giocano la coppia di strategie (σ_i, σ_j).

Definizione 4.3.2 *La rappresentazione tramite la matrice A è detta forma normale.*

4.3.1 Gioco a due giocatori a somma zero in forma normale

Un equilibrio di Nash è rappresentato da una coppia di strategie $\sigma_i \in \Sigma_1$ e $\sigma_j \in \Sigma_2$ tali che l'elemento a_{ij} risulta essere il più grande della colonna j e il più piccolo della riga i; l'equilibrio viene detto anche *punto di sella.*

Esempio 4.3.1 (Punto di sella)
Nel gioco in forma normale rappresentato a lato la strategia (σ_1, σ_2) *costituisce un equilibrio anche se entrambi i giocatori hanno a disposizione dei payoff migliori.*

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \diamondsuit$$

L'esistenza di un punto di sella o equilibrio di Nash non impone ai giocatori la scelta delle corrispondenti strategie; nell'esempio precedente il giocatore I sa di poter ottenere payoff superiori a 3 unità e il giocatore II sa di poter pagare payoff inferiori a 3 unità; d'altra parte il giocatore I sa che scegliendo la terza strategia può ottenere 7 unità ma può pagarne 1 se il giocatore II sceglie la seconda strategia e il giocatore II sa che scegliendo la terza strategia può ottenere 2 unità ma può pagarne 4 se il giocatore I sceglie la prima strategia.

Teorema 4.3.1 *In un gioco a due persone a somma zero se* (σ_i, σ_j) *e* (σ_h, σ_k) *sono equilibri di Nash, allora lo sono anche* (σ_i, σ_k) *e* (σ_h, σ_j).

Esempio 4.3.2 (Equilibri multipli)
Nel gioco in forma normale rappresentato a lato le strategie (σ_1, σ_2) *e* (σ_2, σ_3) *sono equilibri di Nash e lo sono anche* (σ_1, σ_3) *e* (σ_2, σ_2).

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \diamondsuit$$

Osservazione 4.3.1

- *Nel caso in cui il gioco non sia a somma zero il precedente teorema non sussiste, come nel caso della battaglia dei sessi.*

L'obiettivo dei giocatori è massimizzare il proprio payoff, cioè massimizzare la vincita o minimizzare la perdita; se i giocatori scelgono σ_i e σ_j, con payoff a_{ij} il giocatore I cerca di massimizzarlo intervenendo solo sulla scelta di σ_i e il giocatore II cerca di minimizzarlo intervenendo solo sulla scelta di σ_j. La non conoscenza della strategia scelta dall'altro giocatore impedisce di poter raggiungere con certezza l'obiettivo, ma l'esistenza di un punto di sella fa si che ragionevolmente entrambi scelgano quella coppia di strategie.

4.3.2 Gioco a due giocatori a somma zero senza equilibri di Nash

La maggior parte dei giochi non ha punti di sella, come il gioco a lato; in questo caso il primo giocatore con la prima strategia si garantisce una vincita minima 2 (*gain-floor*) e il secondo giocatore con la seconda strategia si garantisce una perdita massima 3 (*loss-ceiling*).

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La vincita minima per il giocatore I si indica con v'_I e si ha:

$$v'_I = \max_i \ \min_j \quad \{a_{ij}\}$$

La perdita massima per il giocatore II si indica con $v'_I I$ e si ha:

$$v''_I = \min_j \ \max_i \quad \{a_{ij}\}$$

È facile verificare che $v'_I \leq v'_{II}$; se $v'_I = v'_{II}$ allora esiste un punto di sella.

In generale un comportamento “razionale” fa si che il giocatore I vinca almeno v'_I e il giocatore II perda al più $v'_I I$ e il risultato è il peggiore se l’altro giocatore può sfruttare la “razionalità” e prevedere la mossa. Pertanto per migliorare il risultato è necessario non giocare “razionalmente”, cioè non giocare solo la strategia di vincita minima o di perdita massima.

Esempio 4.3.3 (Pari e dispari modificato) *I due giocatori possono lanciare 1, 2, 3; il giocatore I vince se la somma dei numeri è pari, altrimenti vince il giocatore II.*

I/II	*1*	*2*	*3*
1	*P*	*D*	*P*
2	*D*	*P*	*D*
3	*P*	*D*	*P*

Apparentemente il gioco è favorevole al giocatore I che può vincere in 5 casi su 9. D’altra parte il giocatore II potrebbe giocare 2 e quindi avrebbe 2 risultati vincenti su 3; ma a questo punto il giocatore I giocando 2 è “sicuro” di vincere. Analogamente il giocatore I potrebbe giocare 1 (o 3) per avere 2 risultati vincenti su 3 e a questo punto il giocatore II giocando 2 è “sicuro” di vincere. ♢

Cercare di aumentare le proprie possibilità di vincere porta alla sconfitta “sicura”.

Osservazione 4.3.2

- *Si possono evidenziare alcuni limiti dell’equilibrio di Nash (in strategie pure):*
  - *inefficienza (dilemma del prigioniero);*
  - *non unicità (battaglia dei sessi);*
  - *non esistenza (pari e dispari).*

4.4 Strategie miste

Definizione 4.4.1 *Si chiama strategia mista per un giocatore una distribuzione di probabilità sull’insieme delle sue strategie pure.*

Nell’Esempio 4.3.3 il giocatore II che parte svantaggiato può riequilibrare le sue possibilità giocando a caso, con probabilità 0.5 sia 1 che 2 (o altre strategie equivalenti); in questo modo il primo giocatore non può in alcun modo avere maggiori probabilità di vincere.

Se l'insieme delle strategie pure è formato da n elementi una strategia mista si può indicare con un vettore $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $x_i \geq 0$ e $\sum_{i=1,\ldots,n} x_i = 1$.

L'insieme delle strategie miste del giocatore I si indica con X e l'insieme delle strategie miste del giocatore II si indica con Y.

Definizione 4.4.2 *Dato un gioco G a due giocatori a somma zero in forma normale con matrice A è detta vincita attesa se il giocatore I gioca la strategia mista $x \in X$ e il giocatore II gioca la strategia mista $y \in Y$ la quantità:*

$$A(x, y) = \sum_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1,\ldots,m} x_i a_{ij} y_j = x^T A y$$

È possibile definire la vincita minima per il giocatore I se sceglie la strategia mista $x \in X$ come:

$$v(x) = \min_{y \in Y} \quad \{x^T A y\} = \min_{j} \quad \{x^T A_{.j}\}$$

e la perdita massima per il giocatore II se sceglie la strategia mista $y \in Y$ come:

$$v(y) = \max_{x \in X} \quad \{x^T A y\} = \max_{i} \quad \{A_{i.} y\}$$

dove $A_{.j}$ e $A_{i.}$ sono la colonna j e la riga i di A e le seconde uguaglianze derivano dal fatto che il minimo e il massimo cercati si ottengono con strategie pure.

L'obiettivo del giocatore I è massimizzare $v(x)$ ottenendo la quantità:

$$v_I = \max_{x \in X} \min_{j} \quad \{x^T A_{.j}\}$$

e quello del giocatore II è minimizzare $v(y)$ ottenendo la quantità:

$$v_{II} = \min_{y \in Y} \max_{i} \quad \{A_{i.} y\}$$

Definizione 4.4.3 *La strategia mista x che permette al giocatore I di ottenere v_I è detta maximin; la strategia mista y che permette al giocatore II di ottenere v_{II} è detta minimax.*

v_I e v_{II} sono detti *valore del gioco* per i giocatori I e II.

Teorema 4.4.1 (Teorema del minmax (von Neumann, 1928))
$v_I = v_{II}$.

Osservazione 4.4.1

- *Nel caso in cui il gioco non sia a somma zero il precedente teorema non sussiste.*

4.5 Dominanza

Talvolta le dimensioni del problema, cioè il numero di strategie, possono essere ridotte eliminando alcune strategie.

Definizione 4.5.1 *Dato un gioco G a due giocatori a somma zero in forma normale, con matrice A, si dice che la strategia σ_i domina la strategia σ_h per il giocatore I se $a_{ij} \geq a_{hj}$, $j = 1, \ldots, m$ e $a_{ij} > a_{hj}$ per almeno un indice j e la strategia σ_j domina la strategia σ_k per il giocatore II se $a_{ij} \leq a_{ik}, i = 1, \ldots, n$ e $a_{ij} < a_{ik}$ per almeno un indice i.*

Teorema 4.5.1 *Se una strategia è dominata, esiste una strategia mista ottimale che non utilizza la strategia dominata; inoltre una strategia mista ottimale per il gioco senza la riga (o colonna) i è ottimale anche per il gioco dato.*

La definizione e il teorema precedenti si possono estendere al caso di giochi a più giocatori non a somma zero.

Definizione 4.5.2 *La strategia σ_h domina la strategia σ_k per il giocatore i se $f_i(\sigma_h, \sigma_{-i}) \geq f_i(\sigma_k, \sigma_{-i})$, per ogni $(n-1)$-upla di strategie $\sigma_{-i} \in \prod_{k \neq i} \Sigma_k$ e $f_i(\sigma_h, \sigma_{-i}) > (\sigma_k, \sigma{-i})$ per almeno una $(n-1)$-upla di strategie σ_{-i}.*

Osservazione 4.5.1

- *A volte si distingue tra dominanza debole, quelle che sono state definite in precedenza e forte, quando si hanno tutte disuguaglianze strette. Ai fini dell'applicazione del teorema di riduzione del gioco la distinzione è irrilevante; tale riduzione è possibile anche nel caso in cui si abbiano tutte uguaglianze (indifferenza).*

- *Il concetto di dominanza può essere applicato anche al gioco ridotto, indipendentemente dalle caratteristiche del gioco dato (dominanza iterata). In questo caso se si applicano eliminazioni per dominanza debole o indifferenza si può perdere qualche equilibrio di Nash. Questo fatto è irrilevante se si vuol determinare se esistono equilibri di Nash, o almeno un equilibio di Nash.*

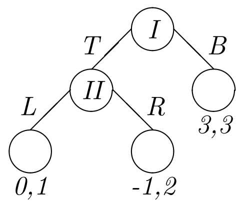
4.6 Raffinamenti dell'equilibrio di Nash

Come si è detto uno dei limiti dell'equilibrio di Nash è la non unicità. Per ovviare a questo sono stati proposti numerosi raffinamenti dell'equilibrio di Nash, tra i quali l'*equilibrio perfetto nei sottogiochi* (applicabile alla forma estesa, in cui si definisce sottogioco un qualunque sottoalbero), che si ricollega alla programmazione dinamica di Bellman (Selten, 1965), l'*equilibrio correlato* che incorpora aspetti di comunicazione tra i giocatori

(Aumann, 1974) e l'*equilibrio perfetto* o "della mano tremante" che considera le perturbazioni (Selten, 1975). Nessuno di questi ha risolto il problema, né da un punto di vista quantitativo (unicità), né da quello qualitativo (scelta di un "buon" equilibrio).

Esempio 4.6.1 (Equilibrio perfetto nei sottogiochi) *Il gioco seguente ha due equilibri di Nash (B, L) e (B, R), tra loro indifferenti.*

I/II	L	R
T	$0,1$	$-1,2$
B	$3,3$	$3,3$



Se il gioco dovesse iniziare dalla mossa di II la scelta R è preferibile alla scelta L (per il giocatore II), per cui l'equilibrio (B, R) è perfetto nei sottogiochi. ♢

Esempio 4.6.2 (Equilibrio perfetto) *Il gioco rappresentato dalla tabella seguente ha due equilibri di Nash (T, L) e (B, R). Il primo sembrerebbe più vantaggioso, ma è più rischioso in caso di perturbazioni. Nel primo caso un "errore" non danneggia chi lo commette, ma danneggia fortemente l'altro. Nel secondo caso si ha un danno solo nel caso di un proprio errore.*

I/II	L	R
T	$10,10$	$0,10$
B	$10,0$	$1,1$

♢

4.6.1 Strategie correlate

In precedenza si è accennato alle strategie correlate. Il seguente esempio permette di chiarire qualche aspetto.

Esempio 4.6.3 (Gioco dell'incrocio) *Due automobilisti ad un incrocio possono scegliere se passare (P) o fermarsi (F). Passare se l'altro si ferma permette di guadagnare 5, fermarsi entrambi comporta una perdita 1, ma se passano entrambi la perdita è maggiore ...*

I/II	P	F
P	$-10,-10$	$5,0$
F	$0,5$	$-1,-1$

È facile verificare che esistono due equilibri di Nash in strategie pure (P, F) e (F, P) e un equilibrio in strategie miste $((\frac{3}{8}, \frac{5}{8}), (\frac{3}{8}, \frac{5}{8}))$. Le soluzioni di Nash in strategie pure hanno un valore atteso 5 per chi passa e 0 per chi si ferma (quindi la somma è 5), mentre la soluzione di Nash in strategie miste ha un valore atteso negativo per entrambi $-\frac{5}{8}$ ma soprattutto non garantiscono di evitare l'incidente; la scelta di fermarsi comunque è la più sicura ma ha un valore atteso negativo, salvo nel caso improbabile che l'altro passi comunque. Si può allora correlare la strategia ad un evento esterno: il semaforo. Utilizzando un ciclo *semaforico che fa passare le auto provenienti dalle due direzioni al 50 per cento, si ottiene un valore atteso 2.5 per entrambi (e la somma è ancora 5) e una notevole sicurezza se i giocatori accettano la strategia correlata, cioè rispettano il codice della strada.* ♢

4.6.2 Equilibrio correlato

Il risultato precedente può essere interpretato come miglior risposta e quindi generalizzato come equilibrio correlato.

Definizione 4.6.1

- *Si dice strategia mista correlata per un gioco a due giocatori, una distribuzione di probabilità sul prodotto cartesiano di strategie, cioè una matrice P tale che:*

$$\begin{array}{ll} \sum_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1,\dots,m} p_{ij} = 1 & \\ p_{ij} \geq 0 & \forall i, \forall j \end{array}$$

- *Si dice equilibrio correlato per un gioco a due giocatori a matrice doppia (A, B) una strategia mista correlata P tale che:*

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\sum_{j=1,\dots,m} a_{ij}p_{ij}}{\sum_{j=1,\dots,m} p_{ij}} \geq \dfrac{\sum_{j=1,\dots,m} a_{hj}p_{ij}}{\sum_{j=1,\dots,m} p_{ij}} & \forall h \\ \dfrac{\sum_{i=1,\dots,n} b_{ij}p_{ij}}{\sum_{i=1,\dots,n} p_{ij}} \geq \dfrac{\sum_{i=1,\dots,n} b_{ik}p_{ij}}{\sum_{i=1,\dots,n} p_{ij}} & \forall k \end{array}$$

dove $\frac{\sum_{j=1,\dots,m} a_{sj}p_{ij}}{\sum_{j=1,\dots,m} p_{ij}}$ *è l'utilità attesa dal primo giocatore se gioca la strategia σ_s quando gli viene "indicata" la strategia σ_i e il secondo giocatore "accetta" l'indicazione e analogamente* $\frac{\sum_{i=1,\dots,n} b_{it}p_{ij}}{\sum_{i=1,\dots,n} p_{ij}}$ *è l'utilità attesa dal secondo giocatore se gioca la strategia σ_t quando gli viene "indicata" la strategia σ_j e il primo giocatore "accetta" l'indicazione.*

In altre parole P suggerisce in ogni situazione le strategie σ_i e σ_j da utilizzare e ogni altra strategia σ_h e σ_k è non migliore di quella suggerita se l'altro giocatore "accetta" il suggerimento.

Capitolo 5

Soluzione numerica di un gioco non cooperativo

5.1 Calcolo dell'equilibrio di Nash in strategie pure

Gli equilibri di Nash in strategie pure non vengono calcolati applicando la definizione, ma il concetto di *miglior risposta*, cioè si analizza quale strategia massimizza il payoff di un giocatore, per ogni insieme fissato di strategie degli altri giocatori (la miglior risposta può non essere unica). Le n-uple di strategie formate solo da reciproche migliori risposte sono equilibri di Nash.

5.2 Calcolo dell'equilibrio di Nash in strategie miste

Nel caso di un gioco a due giocatori esiste un modo relativamente semplice per determinare gli equilibri di Nash in strategie miste.

Si consideri l'Esempio 3.2.2. Se il giocatore I gioca la strategia mista $(p, 1-p)$ e il giocatore II gioca la strategia mista $(q, 1-q)$ la vincita attesa del giocatore I è data da:

$$v_I(p) = 2pq + 0(1-p)q + 0p(1-q) + 1(1-p)(1-q) = 3pq - p - q + 1 = (3q-1)p - (q-1)$$

Il secondo termine non dipende da p, cioè dal giocatore I; si hanno quindi tre casi:

$3q - 1 > 0 \Rightarrow p = 1$ (strategia pura)

$3q - 1 = 0 \Rightarrow p$ (qualsiasi)

$3q - 1 < 0 \Rightarrow p = 0$ (strategia pura)

Analogamente la vincita attesa del giocatore II è data da:

$$v_{II}(q) = 1pq + 0(1-p)q + 0p(1-q) + 2(1-p)(1-q) = 3pq - 2p - 2q + 2 = (3p-2)q - 2(p-1)$$

a cui corrispondono i tre casi:

$3p - 2 > 0 \Rightarrow q = 1$ (strategia pura)
$3p - 2 = 0 \Rightarrow q$ (qualsiasi)
$3p - 2 < 0 \Rightarrow q = 0$ (strategia pura)

Quindi, oltre agli equilibri di Nash in strategie pure (T, T) e (P, P), si ha un equilibrio in strategie miste se:

$$3q - 1 = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$
$$3p - 2 = 0 \Rightarrow p = \frac{2}{3}$$

cioè $\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$.

Osservazione 5.2.1

- *La vincita attesa è* $v_I = v_{II} = \frac{2}{3}$, *cioè inferiore alla vincita minima derivante da un accordo (non vincolante) per una strategia pura.*

5.3 Soluzione per dominanza

Esempio 5.3.1 (Gioco a due giocatori a somma zero) *Sia dato il gioco in forma normale:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La prima colonna è dominata (debolmente) dalla terza:

$$\begin{pmatrix} - & 6 & 1 & 0 \\ - & 0 & 1 & -1 \\ - & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

A questo punto la seconda riga è dominata (debolmente) dalla prima (e dalla terza):

$$\begin{pmatrix} - & 6 & 1 & 0 \\ - & - & - & - \\ - & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

A questo punto la seconda colonna è dominata (fortemente) dalla terza:

$$\begin{pmatrix} - & - & 1 & 0 \\ - & - & - & - \\ - & - & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

A questo punto la prima riga è dominata (debolmente) dalla terza:

$$\begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Infine poichè la quarta colonna è dominata (fortemente) dalla terza:

$$\begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & 1 & - \end{pmatrix}$$

la cui soluzione è (3, 3). Si può osservare che la soluzione è un punto di sella. ♢

Esempio 5.3.2 (Gioco a tre giocatori) *Sia dato il gioco in forma strategica:*

III = S		
I/II	L	R
T	$1, 0, 1$	$2, 1, 5$
B	$-1, 1, 1$	$3, 0, 1$

III = D		
I/II	L	R
T	$-3, 0, 4$	$2, 1, 5$
B	$-1, 1, 1$	$3, 1, 2$

Per il giocatore III la strategia D domina (debolmente) la strategia S, per cui si ha:

III = D		
I/II	L	R
T	$-3, 0, 4$	$2, 1, 5$
B	$-1, 1, 1$	$3, 1, 2$

Per il giocatore I la strategia B domina (fortemente) la strategia T, per cui si ha:

III = D		
I/II	L	R
B	$-1, 1, 1$	$3, 1, 2$

A questo punto per il giocatore II le strategie L ed R sono indifferenti, per cui si hanno due equilibri di Nash (B, L, D) e (B, R, D). $\diamondsuit$

Osservazione 5.3.1

- *Si noti che alla seconda iterazione si poteva applicare la dominanza (debole) della strategia R rispetto alla strategia L per il giocatore II e successivamente la dominanza (forte) della strategia B rispetto alla strategia T, ottenendo solo l'equilibrio (B, R, D).*

5.4 Soluzione con la programmazione lineare

Un gioco a due giocatori a somma zero senza punti di sella può essere risolto tramite la programmazione lineare.

Supponendo che il giocatore I utilizzi la strategia $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ricordando che:

$$v(x) = \min_j \{x^T A_{.j}\}$$

si ha:

$$v(x) \leq \sum_{i=1,\ldots,n} a_{ij} x_i \qquad j = 1, \ldots, m$$

Poichè il valore del gioco è:

$$v_I = \max_{x \in X} v(x)$$

si ha il programma lineare:

$$\begin{array}{lll} max & v_I & \\ s.t. & \sum_{i=1,\ldots,n} a_{ij}x_i - v_I \geq 0 & j = 1,\ldots,m \\ & \sum_{i=1,\ldots,n} x_i = 1 & \\ & x_i \geq 0 & i = 1,\ldots,n \end{array}$$

In modo analogo per il giocatore II si ha il programma lineare:

$$\begin{array}{lll} min & v_{II} & \\ s.t. & \sum_{j=1,\ldots,m} a_{ij}y_j - v_{II} \leq 0 & i = 1,\ldots,n \\ & \sum_{j=1,\ldots,m} y_j = 1 & \\ & y_i \geq 0 & j = 1,\ldots,m \end{array}$$

I due programmi risultano tra loro duali e quindi è facile determinare le strategie miste ottimali e il valore del gioco.

Osservazione 5.4.1

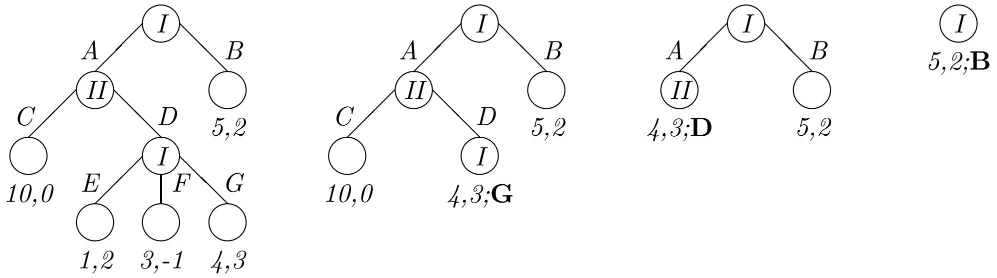
- *In realtà la soluzione tramite un problema lineare è possibile anche nel caso di un gioco non a somma zero, ma in questo caso il risultato è meno elegante in quanto non sussiste la relazione di dualità.*

5.5 Soluzione a ritroso (Backward Induction)

Sia G un gioco non cooperativo finito, rappresentato in forma estesa. Per semplificare la trattazione si può supporre che il gioco sia ad informazione perfetta. Se tutti i giocatori hanno preferenze razionali, cioè preferiscono un payoff non minore, allora è possibile determinare una soluzione del gioco, cioè una strategia ottimale dei giocatori, applicando una semplice metodologia, detta *induzione a ritroso*. L'idea di base è che la razionalità dei giocatori permette di "prevedere" il loro comportamento, per cui è possibile decidere la scelta di un giocatore sulla base delle scelte dei suoi successori e quindi iniziare l'analisi del gioco dalla fine, cioè dalle ultime mosse fino alla prima.

Formalmente si considerano le situazioni in cui le mosse disponibili portano comunque alla conclusione del gioco, dette *nodi pre-terminali* (se il gioco è finito esiste certamente almeno una tale situazione); in questo caso il giocatore sceglierà "certamente" la mossa che gli assicura il miglior payoff. Questo permette di dire che tutte le volte che il gioco giunge in quella situazione, allora anche la terminazione è "decisa" e quindi si può sostituire il nodo pre-terminale con un nodo terminale al quale si associa il vettore payoff corrispondente alla mossa fatta. Procedendo a ritroso in questo modo tutti i nodi diventano (prima o poi) nodi terminali e l'insieme delle mosse fatte identificano un profilo di strategie per i giocatori.

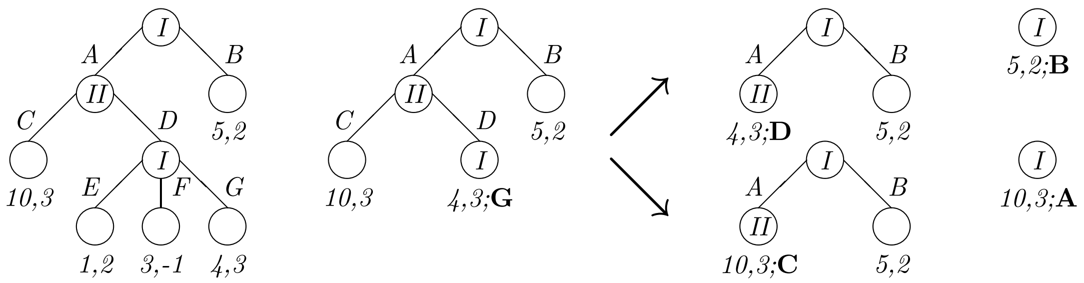
Esempio 5.5.1 (Payoff distinti) *Applicando l'induzione a ritroso al seguente gioco il forma estesa si ha:*



La procedura identifica il profilo di strategie ((B, G), D) con payoff (5, 2). ♢

La procedura è più complessa se ad una determinata situazione corrispondono più nodi terminali con lo stesso payoff per il giocatore chiamato a muovere, ma differenti per gli altri. In questo caso a seconda della scelta fatta l'iterazione successiva può avere risultati molto diversi. Operativamente si considera una continuazione del procedimento per ogni scelta massimizzante possibile, applicando successivamente altre considerazioni risolutive (giochi ad informazione incompleta).

Esempio 5.5.2 (Payoff non distinti) *Modificando il payoff del giocatore II in corrispondenza della sua scelta C come indicato si ottiene:*



La procedura identifica due terminazioni:

- *il profilo di strategie ((A, G), C) con payoff (10, 3)*
- *il profilo di strategie ((B, G), D) con payoff (5, 2)*

ma trascura il profilo di strategie ((A, G), D) con payoff (4, 3). La scelta dipende dal modello decisionale adottato. ♢

Osservazione 5.5.1

- *La procedura può dare risultati discutibili se il gioco non è ad informazione perfetta.*
- *Se il giocatore II scegliesse D invece di C, danneggiando il giocatore I, questo potrebbe scegliere F invece di G, con una piccola perdita per sé, danneggiando il giocatore II (strategia di minaccia).*

Se ad un gioco in forma estesa ad informazione perfetta si associa la corrispondente forma strategica questa può essere risolta per dominanza (debole) iterata eliminando iterativamente le strategie "scartate" in ciascuna iterazione dell'eliminazione a ritroso.

Esempio 5.5.3 (Induzione a ritroso e dominanza iterata) *Riprendendo l'Esempio 5.5.1 si ha:*

I/II	C	D
AE	$10,0$	$1,2$
AF	$10,0$	$3,-1$
AG	$10,0$	$4,3$
BE	$5,2$	$5,2$
BF	$5,2$	$5,2$
BG	$5,2$	$5,2$

La strategia AG domina (debolmente) le strategie AE e AF e la strategia BG domina (debolmente) le strategie BE e BF:

I/II	C	D
AG	$10,0$	$4,3$
BG	$5,2$	$5,2$

La strategia D domina (debolmente) la strategia C:

I/II	D
AG	$4,3$
BG	$5,2$

Infine la strategia BG domina (fortemente) la strategia AG; quindi si ottiene la stessa soluzione trovata in precedenza, cioè il profilo (BG, D) con payoff (5, 2). ♢

5.6 Soluzione di Maxmin

Se il gioco è rappresentato in forma strategica potrebbe non essere applicabile la soluzione per dominanza e potrebbe non essere facile risalire alla forma estesa. In questi casi una buona soluzione può essere la ricerca della *strategia di maxmin*, cioè quella strategia che garantisce il miglior risultato qualsiasi sia la scelta degli altri giocatori. Questo approccio è valido per i giocatori avversi al rischio.

Si analizza quale è il peggior payoff che il giocatore può conseguire una volta fissata la sua strategia, cioè supponendo che gli altri giocatori giochino "contro" di lui (minimo payoff). A questo punto il giocatore sceglie la strategia per lui più vantaggiosa (massimo dei minimi payoff).

Esempio 5.6.1 (Maxmin) *Si consideri il seguente gioco in forma strategica:*

I/II	L	C	R
T	$1,4$	$3,2$	$-2,-1$
M	$-2,-2$	$1,3$	$0,4$
B	$2,3$	$-1,4$	$4,2$

Non esistono relazioni di dominanza tra le strategie di entrambi i giocatori, per cui ha senso cercare la strategia di maxmin.
Se il giocatore I sceglie T il minimo payoff è -2; se sceglie M il minimo payoff è -2; se sceglie B il minimo payoff è -1; quindi la sua strategia di maxmin è B. Se il giocatore II sceglie L il minimo payoff è -2; se sceglie C il minimo payoff è 2; se sceglie R il minimo payoff è -1; quindi la sua strategia di maxmin è C. Il payoff corrispondente al profilo di strategie di maxmin (B, C) è (-1, 4), cioè il giocatore I consegue il risultato minimo atteso, mentre il giocatore II riceve un payoff superiore. ♢

La soluzione di maxmin è un concetto di soluzione generale, a differenza di altri. Parte dall'ipotesi che gli altri giocatori trascurino completamente il loro payoff e giochino solo per danneggiare il giocatore in oggetto, che è vera solo nel caso di giochi ad interessi contrastanti, ad esempio i giochi a somma nulla.

Capitolo 6

Informazione

6.1 Informazione perfetta e imperfetta

La Teoria dei Giochi suppone, generalmente, che tutte le informazioni siano *conoscenza comune*, cioè siano note a tutti i giocatori; in questo caso il gioco è detto a *informazione perfetta e completa*. Per evidenziare l'importanza della conoscenza comune si può fare l'esempio seguente:

Esempio 6.1.1 (Gioco della posta elettronica) *Due persone A e B devono incontrarsi, ma a causa dei numerosi impegni A invia una e-mail per essere certo della presenza di B; ma anche B è molto impegnato per cui oltre a rassicurare A della sua presenza, richiede una conferma della ricezione del messaggio. A questo punto anche A chiede una nuova conferma e così via.* ♢

Chiaramente questa ipotesi non è verificata in numerose situazioni, che verranno analizzate in questo capitolo.

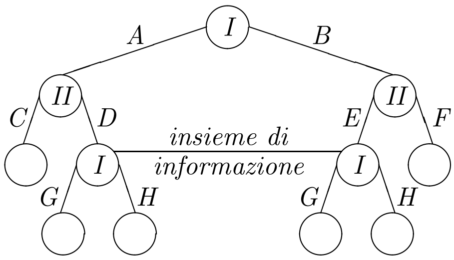
Definizione 6.1.1 *Un gioco G si dice a informazione imperfetta se esiste almeno un insieme di informazione contenente più di un elemento.*

Affinchè ci sia una reale situazione di informazione imperfetta è necessario che nei nodi facenti parte dello stesso insieme di informazione il giocatore chiamato a giocare sia nella stessa identica situazione; in altre parole non deve succedere che le possibili mosse del giocatore siano differenti e tanto più che siano in numero differente.

Nei seguenti esempi viene presentata una situazione leggermente diversa, detta *a ricordo imperfetto*.

Esempio 6.1.2 (Ricordo imperfetto) *Si consideri il seguente gioco in forma estesa in cui l'esistenza di un insieme di informazione non banale dipende dal fatto che il giocatore*

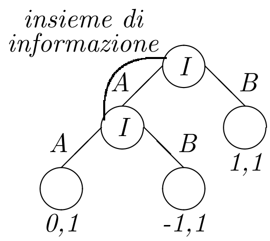
I non solo non conosce la mossa del giocatore II, cioè se quest'ultimo ha scelto D oppure E, ma anche dal fatto che non ricorda se lui ha scelto A oppure B.
Infatti se lui ricordasse la sua mossa precedente potrebbe dedurre con certezza anche la mossa del giocatore II.



◊

Esempio 6.1.3 (Ricordo imperfetto non standard) *Si consideri il seguente gioco in forma estesa in cui l'insieme di informazione comprende due nodi posti a differenti livelli, in contrasto con la definizione.*

In altre parole il giocatore I "immediatamente" dopo aver scelto non ricorda più né la sua mossa né se ha mosso; questo modello si può applicare a quei casi in cui in realtà i tempi della decisione sono sufficientemente lunghi.



I payoff sono stati scelti in modo da creare una situazione di indecisione; se invece il payoff del giocatore I dopo la seconda mossa A fosse 2, *il problema non sarebbe effettivo, in quanto la strategia migliore sarebbe di scegliere sempre A.* ◊

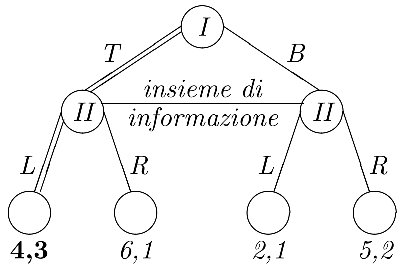
Ovviamente se un gioco è a ricordo imperfetto è anche a informazione imperfetta, mentre il viceversa non è vero.

L'informazione può essere anche indiretta, come mostra il seguente esempio.

Esempio 6.1.4 (Ruolo dell'informazione) *Si considerino le due situazioni seguenti:*

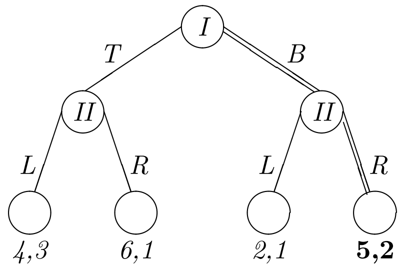
II gioca senza conoscere la scelta di I

T è la migliore strategia per I, qualunque sia la scelta di II (strategia dominante).
Quindi I gioca T e II gioca L; la vincita è 4 per I e 3 per II.



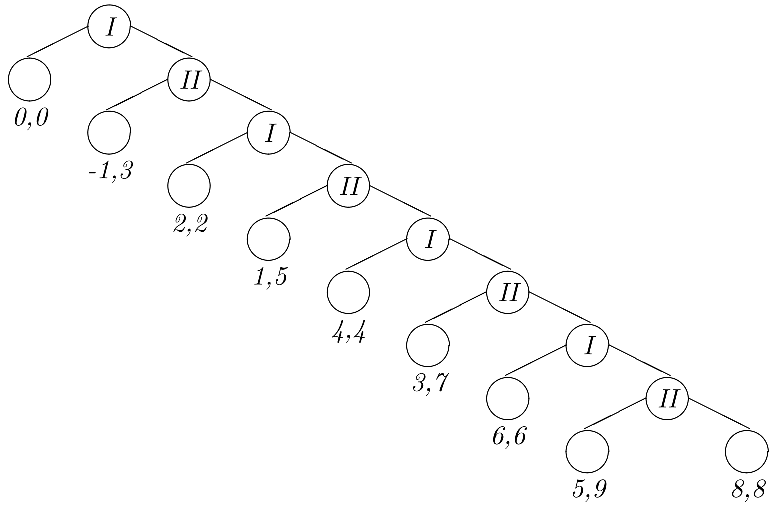
II gioca conoscendo la scelta di I

Se I gioca T II sceglie L con esito (4, 3).
Se I gioca B II sceglie R con esito (5, 2).
Quindi I gioca B e II gioca R; la vincita è 5 per I e 2 per II.
In realtà l'aumento di informazione è per entrambi e I lo può sfruttare meglio di II.



◊

Esempio 6.1.5 (Centipede Game (Gioco del Millepiedi)) *Si consideri il seguente gioco in forma estesa:*



Apparentemente il gioco dovrebbe terminare immediatamente con payoff (0, 0); d'altra parte "raggiungere" una determinata situazione, contiene una informazione di disponibilità a collaborare. ♢

6.2 Informazione incompleta

Un caso differente è quello in cui qualche giocatore non è a conoscenza di altri elementi del gioco.

Esempio 6.2.1 (Tipi di giocatori) *Si consideri un gioco a due giocatori in cui il giocatore I ha la possibilità di giocare contro due differenti tipi di avversari (giocatore II di tipo A o di tipo B) indicati come* II_A *e* II_B *i quali vengono selezionati, ad esempio, tramite un sorteggio del cui esito viene informata la coppia di giocatori* II_A *e* II_B*, ma non il giocatore I; tutti gli altri elementi sono invece noti a entrambi i giocatori.*
E' possibile rappresentare questa situazione in forma strategica tramite due differenti matrici di payoff. In altre parole esiste un'incertezza del giocatore I relativamente ai payoff, ma non sarebbe corretto dire che i payoff sono completamente ignoti al giocatore I.

I / II_A	L_A	R_A
T	a, b	c, d
B	e, f	g, h

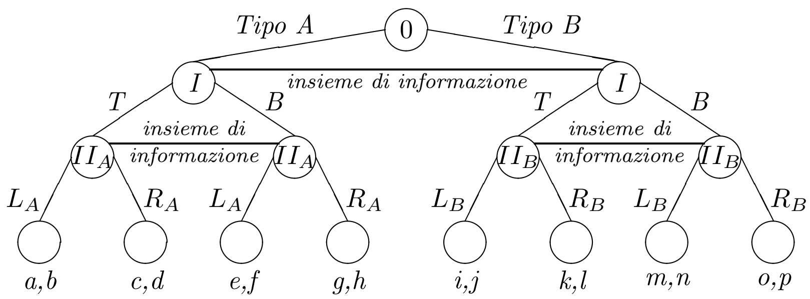
I / II_B	L_B	R_B
T	i, j	k,l
B	m,n	o,p

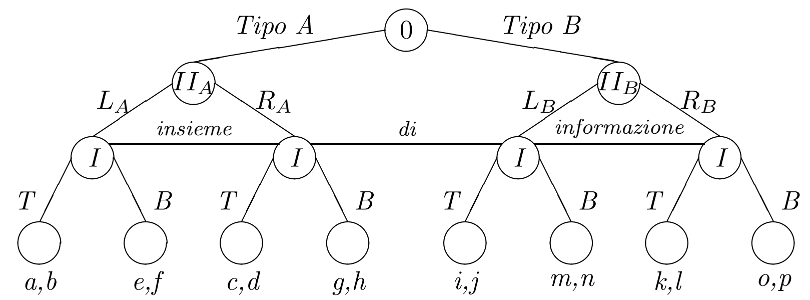
♢

A questa situazione, introdotta da Harsanyi (1967-68) come *giochi bayesiani*, possono essere ricondotte altre situazioni di informazione incompleta, quali la non conoscenza dei payoff, delle strategie, ecc.

Ovviamente questo approccio richiede la conoscenza della probabilità associata al tipo di giocatore, o corrispondentemente ai payoff, alle strategie, ecc. In un certo senso si può ipotizzare l'esistenza di un terzo giocatore (il caso), indicato con 0 che sceglie quale matrice utilizzare (o di quale tipo è il giocatore II) secondo una preassegnata probabilità e da questo punto in avanti il gioco continua in maniera usuale salvo il fatto che si è in presenza di un gioco a informazione imperfetta poichè il giocatore I non è a conoscenza di quale mossa è stata fatta dal caso, cioè quale matrice è stata scelta (si noti anche che l'imperfezione dell'informazione si può estendere alla non conoscenza delle mosse effettuate dall'altro giocatore. L'importanza dell'approccio di Harsanyi è legata alla semplicità della soluzione proposta.

La nuova situazione può essere rappresentata in forma estesa indifferentemente da uno dei due seguenti alberi:





Formalmente un gioco bayesiano può essere rappresentato come una quintupla:

$$G^b = (N, \{C_i\}_{i\in N}, \{T_i\}_{i\in N}, \{p_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N})$$

dove N è l'insieme dei giocatori;
C_i è l'insieme delle azioni possibili del giocatore i;
T_i è l'insieme dei tipi del giocatore i;
p_i sono le probabilità che il giocatore i assegna al tipo degli altri giocatori;
$u_i : \prod_{j\in N} C_j \times \prod_{j\in N} T_j \to \mathbb{R}$ è la funzione di utilità del giocatore i.

Gli elementi di C_i sono detti *azioni* e non strategie perchè le strategie devono tenere conto di ogni possibile tipo del giocatore i, quindi una strategia pura per il giocatore i è una funzione:

$$s_k^i : T_i \to C_i, \qquad s_k^i \in \Sigma_i$$

dove Σ_i è l'insieme delle strategie pure del giocatore i e una strategia mista è una funzione:

$$\sigma^i : C_i \times T_i \to [0,1],\ con \sum_{c\in C_i} \sigma^i(c,t) = 1, \forall\ t \in T_i$$

La soluzione del gioco, detta *equilibrio bayesiano* o *equilibrio Nash-bayesiano*, viene determinata come un normale equilibrio di Nash, tenendo conto che le mosse del caso non sono note a tutti i giocatori.

Esempio 6.2.2 (da Fudenberg - Tirole, 1991) *Un'impresa (giocatore I), già operante sul mercato, deve decidere se costruire una nuova fabbrica (C, NC); un'altra (giocatore II) deve decidere se entrare sul mercato (E, NE). Il giocatore II non sa se la costruzione della nuova fabbrica per I avrà costo 3 oppure 0 e assegna ai due eventi probabilità* p *e* $1-p$*, rispettivamente; il costo è invece noto a I; i payoff sono riportati nelle seguenti tabelle:*

I_3/II	E	NE
C	$0,-1$	$2,0$
NC	$2,1$	$3,0$

I_0/II	E	NE
C	$3,-1$	$5,0$
NC	$2,1$	$3,0$

Il gioco bayesiano è rappresentato dalla quintupla:

$$\begin{array}{ll}
N=\{I,II\} & \\
C_I=\{C,NC\}; C_{II}=\{E,NE\} & \\
T_I=\{I_3,I_0\}; T_{II}=\{II\} & \\
p_{I_3}(II)=p_{I_0}(II)=1; p_{II}(I_3)=p, p_{II}(I_0)=1-p & \\
u_I((C,E),(I_3,II))=0 & u_{II}((C,E),(I_3,II))=-1 \\
u_I((NC,E),(I_3,II))=2 & u_{II}((NC,E),(I_3,II))=1 \\
u_I((C,NE),(I_3,II))=2 & u_{II}((C,NE),(I_3,II))=0 \\
u_I((NC,NE),(I_3,II))=3 & u_{II}((NC,NE),(I_3,II))=0 \\
u_I((C,E),(I_0,II))=3 & u_{II}((C,E),(I_0,II))=-1 \\
u_I((NC,E),(I_0,II))=2 & u_{II}((NC,E),(I_0,II))=1 \\
u_I((C,NE),(I_0,II))=5 & u_{II}((C,NE),(I_0,II))=0 \\
u_I((NC,NE),(I_0,II))=3 & u_{II}((NC,NE),(I_0,II))=0
\end{array}$$

Le strategie pure sono:

$$\begin{array}{lll}
\Sigma_I=\{s_1^I,s_2^I,s_3^I,s_4^I\} \text{ con } & s_1^I(I_3)=C & s_1^I(I_0)=C \\
& s_2^I(I_3)=C & s_2^I(I_0)=NC \\
& s_3^I(I_3)=NC & s_3^I(I_0)=C \\
& s_4^I(I_3)=NC & s_4^I(I_0)=NC \\
\Sigma_{II}=\{s_1^{II},s_2^{II}\} \text{ con } & s_1^{II}(II)=E & \\
& s_2^{II}(II)=NE &
\end{array}$$

Si può osservare che la strategia NC è dominante per il giocatore I se il costo è 3 e quindi il giocatore II sceglierà E, mentre se il costo è 0 la strategia C è dominante per il giocatore I e quindi il giocatore II sceglierà NE. Si può allora dire che il giocatore II sceglierà E se $p > 0.5$ *e sceglierà NE se* $p < 0.5$*. Se* $p = 0.5$ *il payoff atteso del giocatore II è nullo, qualunque sia la sua strategia.*

Se i possibili costi di costruzione fossero 3 e 1.5; i nuovi payoff dei giocatori sono riportati nelle seguenti tabelle:

I_3/II	E	NE
C	$0,-1$	$2,0$
NC	$2,1$	$3,0$

$I_{1.5}/II$	E	NE
C	$1.5,-1$	$3.5,0$
NC	$2,1$	$3,0$

Se il costo del giocatore I è 3, la strategia NC è ancora dominante per I.

Se il costo del giocatore I è 1.5 non ci sono strategie dominanti per nessun giocatore.

Sia $(y, 1-y)$ *la strategia mista di II; il giocatore I (che è di tipo 1.5) confronta i payoff attesi delle strategie C e NC che sono rispettivamente* $1.5y + 3.5(1-y) = 3.5 - 2y$ *e* $2y + 3(1-y) = 3 - y$, *per cui sceglierà C se* $3.5 - 2y > 3 - y$, *cioè se* $y < 0.5$.
La strategia di II dipende dalla strategia e dal tipo di I; sia $(x, 1-x)$ *la strategia mista di I nel caso che il costo sia 1.5, mentre nel caso il costo sia 3 I sceglie NC; il payoff atteso di II se gioca NE è 0, mentre il payoff atteso di II se gioca E è dato da* $1(p) - 1(1-p)(x) + 1(1-p)(1-x) = 1 - 2(1-p)x$. *Il payoff atteso di E supera il payoff atteso di NE se* $1 - 2(1-p)x > 0$, *cioè se*

$$x < \frac{1}{2(1-p)}$$

Riassumendo le migliori risposte di I sono:

$$\begin{array}{ll} \textit{giocare C } (x=1) & \textit{se } y < 0.5 \\ \textit{indifferente} & \textit{se } y = 0.5 \\ \textit{giocare NC } (x=0) & \textit{se } y > 0.5 \end{array}$$

mentre le migliori risposte di II sono:

$$\begin{array}{ll} \textit{giocare E } (y=1) & \textit{se } x < \frac{1}{2(1-p)} \\ \textit{indifferente} & \textit{se } x = \frac{1}{2(1-p)} \\ \textit{giocare NE } (y=0) & \textit{se } x > \frac{1}{2(1-p)} \end{array}$$

- $x = 0, y = 1$ *costituisce un equilibrio qualunque sia* p
  infatti se II gioca E ($y = 1$) *la miglior risposta di I è NC* ($x = 0$, *perchè* $y > 0.5$) *e viceversa se I gioca NC* ($x = 0$) *la miglior risposta di II è giocare E* ($y = 1$, *perchè* $x < \frac{1}{2(1-p)}$);
- $x = 1, y = 0$ *costituisce un equilibrio se* $p \leq 0.5$
  infatti se II gioca NE ($y = 0$) *la miglior risposta di I è C* ($x = 1$, *perchè* $y < 0.5$) *e viceversa se I gioca C* ($x = 1$) *la miglior risposta di II è giocare NE* ($y = 0$) *solo quando* $p \leq 0.5$ *perchè* $x > \frac{1}{2(1-p)}$, *altrimenti quando* $p > 0.5$, $\frac{1}{2(1-p)} > 1$ *e quindi non è possibile* $x > 1$;
- $x = \frac{1}{2(1-p)}, y = 0.5$ *costituisce un equilibrio in strategie miste qualunque sia* p
  infatti se II gioca $y = 0.5$ *la risposta di I* $x = \frac{1}{2(1-p)}$ *è ottima (qualunque risposta di I è ottima) e se I gioca* $x = \frac{1}{2(1-p)}$ *la risposta di II* $y = 0.5$ *è ottima (qualunque risposta di II è ottima).* ♢

6.2.1 Consistenza

Nel caso in cui tutti i giocatori possono essere selezionati tra differenti tipi la trattazione è identica a quella vista negli esempi, salvo che si possono ipotizzare più mosse del caso, corrispondenti alla scelta di ciascun giocatore, o un'unica mossa in cui vengono scelti direttamente tutti i giocatori effettivi. In altre parole si può avere una situazione in cui i giocatori vengono selezionati tra distinte popolazioni tramite differenti distribuzioni di probabilità, una per ogni giocatore, oppure tramite un'unica probabilità definita sul prodotto cartesiano $\prod_{i\in N} T_i$.

Le probabilità che ciascun giocatore assegna al tipo degli altri giocatori prendono il nome di $belief$ (to belief = ritenere).

Le due ipotesi precedenti non sono equivalenti, nel senso che data una probabilità sul prodotto $\prod_{i\in N} T_i$ si possono ricavare sempre le probabilità di ogni giocatore, ma non è sempre vero il viceversa; se è possibile si dice che i belief sono *consistenti*.

Esempio 6.2.3 (Belief inconsistenti) *Siano dati due tipi di giocatori sia per il giocatore I che per il giocatore II, cioè I_A, I_B, II_A, II_B. Le probabilità riferite a ciascun giocatore sono:*

I_A ritiene di giocare contro II_A con probabilità 1 e contro II_B con probabilità 0
I_B ritiene di giocare contro II_A con probabilità 0 e contro II_B con probabilità 1
II_A ritiene di giocare contro I_A con probabilità 0 e contro I_B con probabilità 1
II_B ritiene di giocare contro I_A con probabilità 1 e contro I_B con probabilità 0

Si ha la consistenza se esistono 4 numeri non negativi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tali che $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 1$, che costituiscono la probabilità definita sul prodotto e che rappresentano rispettivamente:

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathbf{P}(I_A \ contro \ II_A) \\ \beta &= \mathbf{P}(I_A \ contro \ II_B) \\ \gamma &= \mathbf{P}(I_B \ contro \ II_A) \\ \delta &= \mathbf{P}(I_B \ contro \ II_B) \end{aligned}$$

D'altra parte devono valere:

$$\begin{cases} \mathbf{P}^{I_A}(I_A \ contro \ II_A) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = 1 \\ \mathbf{P}^{I_A}(I_A \ contro \ II_B) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{P}^{I_B}(I_B \ contro \ II_A) = \frac{\gamma}{\gamma+\delta} = 0 \\ \mathbf{P}^{I_B}(I_B \ contro \ II_B) = \frac{\delta}{\gamma+\delta} = 1 \end{cases}$$

da cui si ricava $\beta = 0, \gamma = 0$.
Analogamente si ha:

$$\begin{cases} \mathbf{P}^{II_A}(II_A \ contro \ I_A) = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} = 0 \\ \mathbf{P}^{II_A}(II_A \ contro \ I_B) = \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{P}^{II_B}(II_B \ contro \ I_A) = \frac{\beta}{\beta+\delta} = 1 \\ \mathbf{P}^{II_B}(II_B \ contro \ I_B) = \frac{\delta}{\beta+\delta} = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava $\alpha = 0, \delta = 0$. $\diamondsuit$

Capitolo 7

Fair Division

7.1 Proprietà

La divisione di uno o più beni tra i giocatori dell'insieme $N = \{1, ..., n\}$ presenta varie difficoltà, la prima delle quali è che in generale i giocatori hanno preferenze eterogenee, ossia non valutano allo stesso modo i beni da dividere.

In generale si considerano due tipi di problemi a seconda che gli oggetti siano perfettamente *divisibili*, o meno, cioè che perdano o meno valore nel caso vengano divisi; ad esempio il denaro è chiaramente un bene divisibile (forse è l'unico bene realmente divisibile), mentre un quadro è un bene indivisibile in quanto se viene "tagliato" non ha più alcun valore. Si noti che le compensazioni monetarie possono rendere divisibile anche un bene indivisibile.

Per valutare la bontà ($fairness$) di una divisione si possono utilizzare alcuni criteri di soddisfazione dei giocatori.

Definizione 7.1.1 *Ciascun giocatore i attribuisce alla parte ricevuta dal giocatore j un valore $P_{ij}, \forall\ i, j \in N$.*

- *EFFICIENZA SECONDO PARETO*
  Una divisione è efficiente se non esiste una differente divisione, con valutazioni Q tali che $Q_{ii} \geq P_{ii}, \forall\ i \in N$ ed esiste i^* tale che $Q_{i^*i^*} > P_{i^*i^*}$.

- *PROPORZIONALITA'*
  Una divisione è proporzionale se $P_{ii} \geq \frac{1}{n} \sum_{j \in N} P_{ij}, \forall\ i \in N$.

- *EQUITABILITA' (EQUITABILITY)*
  Una divisione è equitabile se $P_{ii} = P_{jj}, \forall\ i, j \in N$, cioè i due giocatori danno la stessa valutazione alle parti ricevute. Spesso ci si riconduce alle valutazioni percentuali invece di quelle assolute.

- *ASSENZA DI INVIDIA (ENVY FREENESS)*
  Una divisione è priva di invidia se non esiste un giocatore $i \in N$ *per cui* $P_{ij} > P_{ii}$ *per qualche* $j \in N$ *(si noti che* P_{ij} *e* P_{ii} *sono valutazioni del giocatore* i*).*

Osservazione 7.1.1

- *L'assenza di invidia implica la proporzionalità; infatti dato un giocatore* $i \in N, P_{ii} \geq P_{ij}, \forall\ j \in N$*; sommando su tutti gli indici* j *si ha* $nP_{ii} \geq \sum_{j \in N} P_{ij}$ *e quindi la tesi.*

- *Nel caso di due giocatori è vero anche il viceversa, cioè che una divisione proporzionale è priva di invidia; infatti se* $P_{11} \geq \frac{1}{2}(P_{11} + P_{12})$ *allora* $P_{12} \leq \frac{1}{2}(P_{11} + P_{12})$ *e analogamente per il giocatore 2.*

- *L'assenza di invidia e l'efficienza possono essere definite in termini di preferenze, senza introdurre le funzioni di utilità, mentre ciò non è possibile per proporzionalità ed equitabilità:*
  Una divisione è efficiente se non esiste una differente divisione che sia preferita debolmente da ogni giocatore e strettamente da almeno uno.
  Una divisione è priva di invidia se nessun giocatore preferisce la parte di un'altro alla propria.

La divisione di beni avviene utilizzando delle procedure, cioè una sequenza di operazioni (*step*) compiute dai giocatori.

Le precedenti proprietà di una divisione vengono attribuite ad una procedura se questa permette di ottenere una divisione per cui valgono le proprietà, semplicemente richiedendo che ogni giocatore esegua "correttamente" le operazioni che è chiamato a compiere, senza necessità che anche gli altri giocatori si comportino in modo da favorire il raggiungimento di una data proprietà.

Inoltre una procedura consente non solo di ottenere una divisione dei beni (o del bene) e le relative eventuali compensazioni, ma permette anche ai giocatori di rendersi conto, dal loro stesso operare, che le proprietà della divisione sono state effettivamente conseguite.

Esempio 7.1.1 (Divisione di una torta (bene divisibile)) *Si supponga di dover dividere tra due giocatori una torta eterogenea, ad esempio con più sapori e/o decorazioni; si supponga anche che i due giocatori abbiano gusti (preferenze) differenti. La procedura più semplice e comune di divisione è la seguente: uno taglia la torta in due parti e l'altro sceglie uno dei due pezzi. Si noti che:*

- *ognuno dei due può ottenere una parte che egli ritiene essere almeno metà della torta; basta che il primo giocatore divida la torta in due parti per lui indifferenti e il secondo scelga quella che considera essere per lui il pezzo preferito (proporzionalità);*

- *nessuno dei due pensa che l'altro abbia ricevuto un pezzo preferibile al suo (assenza di invidia);*
- *il primo giocatore ottiene esattamente metà della torta, mentre il secondo giocatore può ottenere più della metà se ritiene che il pezzo scelto sia più grande della metà della torta (assenza di equitabilità);*
- *una differente divisione della torta potrebbe soddisfare maggiormente i due giocatori (inefficienza).* ♢

Se tre persone si dividono una torta, anche se tutti e tre pensano di aver ricevuto almeno un terzo della torta (proporzionalità) può anche succedere che un giocatore ritenga che uno degli altri due abbia ottenuto più di un terzo della torta (invidia).

Si supponga che una torta sia stata divisa in tre parti assegnate a tre giocatori; se le valutazioni del primo sono $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$, quelle del secondo $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ e quelle del terzo $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, la divisione è proporzionale, ma il secondo invidia il primo.

7.2 Procedure per un bene divisibile

Si consideri un bene eterogeneo che deve essere diviso tra n giocatori; i giocatori non rendono note le proprie preferenze sulle possibili parti del bene.

Dividi e scegli per $n = 2$ (Dubins-Spanier, 1961)

Si supponga di avere una torta rettangolare.

1. un arbitro muove un coltello attraverso la torta, partendo dal margine sinistro, in modo che si mantenga parallelo al bordo di partenza;
2. ad un certo istante uno dei due giocatori chiama “taglio”;
3. il giocatore che ha chiamato il taglio riceve il pezzo a sinistra del coltello e l'altro giocatore riceve il pezzo a destra; STOP.

Se un giocatore chiama il taglio quando pensa che il coltello divida la torta in due parti per lui indifferenti riceve esattamente metà della torta; l'altro, invece, può ricevere un pezzo che considera preferibile alla parte ricevuta dall'altro giocatore, quindi la procedura è proporzionale, priva di invidia, ma non è equitabile; inoltre non è efficiente perchè un giocatore potrebbe preferire la parte in alto e l'altro la parte in basso.

Moving Knives per $n = 2$ (Austin, 1982)

Questa procedura è una variante della precedente, che soddisfa anche l'equitabilità, cioè ogni giocatore può ricevere, nella propria stima, esattamente metà della torta:

1. un arbitro muove un coltello lentamente attraverso la torta dal bordo sinistro a quello destro (come nella procedura di Dubins-Spanier);
2. ad un certo istante un giocatore, e sia I, dice “stop”;
3. un secondo coltello viene situato sul lato sinistro della torta e il giocatore I muove entrambi i coltelli attraverso la torta in modo parallelo; se il coltello di destra arriva al bordo destro della torta, il coltello di sinistra deve trovarsi nella stessa posizione in cui era il primo coltello quando I aveva detto “stop”;
4. mentre i due coltelli si muovono, il giocatore II può dire “stop” in ogni momento;
5. un arbitro (o il caso) decide chi deve scegliere una delle due parti; STOP.

Se il giocatore I fa in modo che il pezzo tra i due coltelli e il pezzo rimanente siano per lui indifferenti (variando la distanza fisica tra i coltelli), allora si garantisce metà della torta e se il giocatore II chiama “stop” quando la parte compresa tra i coltelli e la rimanente sono indifferenti si ottiene una divisione in cui i giocatori hanno ricevuto una uguale percentuale di torta; per motivi analoghi alla procedura precedente non è efficiente.

Dividi e scegli per $n \geq 3$ (Dubins-Spanier, 1961)

1. un arbitro muove un coltello attraverso la torta, partendo dal margine sinistro, in modo che si mantenga parallelo al bordo di partenza;
2. ad un certo instante uno dei giocatori chiama “taglio”;
3. il giocatore che ha chiamato il taglio riceve il pezzo a sinistra del coltello e viene “eliminato” dal gioco;
4. se ci sono almeno due giocatori, si torna al passo 1);
   altrimenti la torta viene assegnata al giocatore rimasto; STOP.

La procedura è solo proporzionale, perchè se un giocatore pensa che uno dei giocatori succesivi a scegliere abbia ricevuto una parte preferibile alla propria si ha invidia.

Last Diminisher per $n \geq 3$ (Banach-Knaster, 1949; Steinhaus, 1948)

1. un arbitro (o il caso) ordina i giocatori;
2. il primo giocatore taglia una fetta;
3. il successivo può tagliare o meno la fetta, riducendola;

4. se ci sono altri giocatori si torna al passo 3);
   altrimenti il giocatore che ha fatto l'ultimo taglio riceve la fetta (come lui l'ha tagliata) e viene "eliminato" dal gioco;

5. le rimanenti parti della torta vengono "riassemblate";

6. se ci sono almeno due giocatori, si torna al passo 2);
   altrimenti la torta viene assegnata al giocatore rimasto; STOP.

Analogamente alla precedente, anche questa procedura può non essere priva di invidia.

7.3 Procedure per m beni indivisibili

Si supponga di dover dividere un insieme di beni indivisibili $M = \{b_1, ..., b_m\}$, tra un insieme di giocatori $N = \{1, ..., n\}$. Il valore dei beni è additivo, cioè è uguale alla somma dei valori dei singoli beni. Le procedure seguenti tengono conto delle valutazioni che ogni giocatore da dei beni da dividere, cioè ciascun giocatore $i \in N$ attribuisce a ciascun bene $b_k \in M$ il valore v_{ik}; se $B_j, j \in N$ indica l'insieme dei beni ricevuti dal giocatore j, il valore che il giocatore i assegna ai beni ricevuti dal giocatore j è $V_{ij} = \sum_{b_k \in B_j} v_{ik}$.

Ciascun bene verrà assegnato ad un solo giocatore, con una compensazione monetaria per gli altri giocatori.

Offerta segreta (Knaster-Steinhaus, 1948)

Come in un'asta ogni giocatore da una valutazione monetaria di ognuno dei beni.

1. ogni giocatore $i \in N$ assegna a ciascun bene $b_k \in M$ il valore v_{ik} e sia $E_i = \frac{1}{n} \sum_{b_k \in M} v_{ik}$ la quota proporzionale secondo i;

2. il bene b_k viene assegnato al giocatore $i(k)$ che ha dato la massima valutazione del bene, cioè $i(k) = argmax\ \{v_{ik}, i \in N\}$ e sia $v_k = v_{i(k),k}$ con $\sum_{b_k \in M} v_k = \sum_{i \in N} V_{ii}$;

3. sia $s = \sum_{i \in N} (V_{ii} - E_i)$ il surplus e sia $V_i = E_i + \frac{s}{n}$;

4. ogni giocatore $i \in N$, riceve, oltre ai beni già ricevuti, la quantità monetaria $V_i - V_{ii}$ se è positiva;
   altrimenti deve dare la quantità monetaria $V_{ii} - V_i$; STOP.

Osservazione 7.3.1

- *La divisione è proporzionale poichè ogni giocatore ritiene di aver ricevuto almeno un n-esimo della sua valutazione complessiva dei beni.*

- *La divisione è equitabile se e solo se tutti i giocatori danno la stessa valutazione della totalità dei beni.*

- *Il surplus s è non negativo, infatti:*

$$s = \sum_{i \in N}(V_{ii} - E_i) = \sum_{b_k \in M} v_k - \sum_{i \in N} \frac{1}{n} \sum_{b_k \in M} v_{ik} \geq \sum_{b_k \in M} v_k - \sum_{b_k \in M} \sum_{i \in N} \frac{1}{n} v_k = 0$$

- *La somma delle compensazioni è nulla, infatti:*

$$\sum_{i \in N}(V_{ii} - V_i) = \left(\sum_{i \in N} V_{ii} - \sum_{i \in N} E_i \right) - \sum_{i \in N} \frac{s}{n} = s - s = 0$$

Esempio 7.3.1 (Brams-Taylor, 1996) *Si devono dividere 4 oggetti (A, B, C, D) tra 3 giocatori (I, II, III). Le valutazioni monetarie e i passi della procedura sono indicate nella tabella seguente.*

	I	II	III
Valutazione di A	10000	4000	7000
Valutazione di B	2000	1000	4000
Valutazione di C	500	1500	2000
Valutazione di D	800	2000	1000
Valutazione totale	13300	8500	14000
Oggetti ricevuti	A	D	B, C
Valore ricevuto (V_{ii})	10000	2000	6000
Divisione iniziale equitabile (E_i)	4433	2833	4667
Differenza	5567	-833	1333
Divisione del surplus ($\frac{s}{n}$)	2022	2022	2022
Adattamento divisione equitabile (V_i)	6455	4855	6689
Situazione finale	$A - 3545$	$D + 2855$	$B, C + 689$

I valori monetari finali di I (6455)*, II* (4855) *e III* (6689) *danno ad ognuno rispettivamente il* 49%, 57%, 48% *della loro valutazione totale, per cui la divisione è proporzionale.* ♢

In generale la procedura di Knaster non produce una divisione priva di invidia. Infatti, se ci sono 3 giocatori che si devono dividere un solo oggetto e la valutazione di I è maggiore di quella di II che a sua volta è maggiore di quella di III, I riceve l'oggetto e deve risarcire II e III ma II riceverà più di III e allora III sarà invidioso di II che riceve più soldi.

Nell'Esempio 7.3.1 se le valutazioni del giocatore II del primo e del secondo oggetto, fossero rispettivamente 2000 e 3000, si otterrebbe una divisione non priva di invidia.

La procedura di Knaster fornisce sempre una divisione priva di invidia se ci sono 2 persone, essendo proporzionale.

7.4 Procedure per m beni divisibili

Si supponga di dover dividere un insieme di beni divisibili, con valore additivo, tra due giocatori I e II.

In questa situazione, i due giocatori indicano quanto valutano i diversi oggetti distribuendo 100 punti sui beni (con punteggi non nulli). Questa informazione diventa la base per una divisione equitabile. Successivamente per ogni oggetto si calcola il rapporto tra la valutazione del giocatore II e del giocatore I e si riordinano gli oggetti per valori non decrescenti del rapporto (nei casi di uguaglianza l'ordine è deciso dal caso). L'insieme degli oggetti così riordinati è indicato con $M = \{b_1, ..., b_m\}$ e le corrispondenti valutazioni di I con $x_1, ..., x_m$ e quelle di II con $y_1, ..., y_m$ con $\sum_{b_k \in M} x_k = \sum_{b_k \in M} y_k = 100$.

Adjusted Winner (AW) (Brams-Taylor, 1996)

Questa procedura determina una divisione dei beni, basata sull'annuncio delle valutazioni percentuali, che è priva di invidia (o equivalentemente proporzionale), efficiente e equitabile e in cui al più un bene viene diviso tra i giocatori.

1. ciascun giocatore assegna una valutazione percentuale agli oggetti e riceve gli oggetti a cui a dato una valutazione strettamente maggiore dell'altro giocatore (se un oggetto ha ricevuto la stessa valutazione dai due giocatori viene assegnato tirando una moneta);

2. se per i due giocatori la somma dei punti dei beni ricevuti è uguale STOP;
   altrimenti sia I il giocatore che ha ricevuto un punteggio maggiore;

3. siano $b_1, ..., b_r$ i beni ricevuti dal giocatore I, $X = \sum_{k=1,...,r} x_k$, $b_{r+1}, ..., b_m$ i beni ricevuti dal giocatore II, $Y = \sum_{k=r+1,...,m} y_k$ e si pone $h = r$;

4. se $X - x_h \geq Y + y_h$ l'oggetto b_h viene "trasferito" al giocatore II, si pone $X = X - x_h, Y = Y + y_h$ e $h = h - 1$ e si va al passo 5);
   altrimenti si determina α tale che $X - \alpha x_h = Y + \alpha y_h$ e la frazione α dell'oggetto b_h viene "trasferita" al giocatore II; STOP;

5. se X = Y STOP;
   altrimenti si torna al passo 4);

Proportional Allocation (PA) (Brams-Taylor, 1996)

Come nel caso precedente due giocatori devono dividersi un insieme di oggetti $M = \{b_1, ..., b_m\}$ su cui distribuiscono 100 punti, non assegnando mai entrambi allo stesso oggetto un punteggio nullo.

1. i giocatori I e II assegnano agli oggetti le valutazioni percentuali $x_1, ..., x_m$ e $y_1, ..., y_m$ con $\sum_{b_k \in M} x_k = \sum_{b_k \in M} x_k = 100$;

2. per ogni oggetto $b_k \in M$ si assegna al giocatore I la frazione $\dfrac{x_k}{x_k + y_k}$ e al giocatore II la frazione $\dfrac{y_k}{x_k + y_k}$;

La procedura produce una divisione dei beni, basata sull'annuncio delle valutazioni percentuali, che è priva di invidia (e quindi proporzionale), equitabile ma non efficiente; infatti se esistono due oggetti b_s e b_t tali che $\frac{x_s}{x_t} < \frac{y_s}{y_t}$ è possibile scambiare opportunamente una frazione α di b_s e β di b_t con $\frac{x_s}{x_t} < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{y_s}{y_t}$, in modo che lo scambio sia vantaggioso per entrambi i giocatori. Si consideri il seguente esempio:

Esempio 7.4.1 (Proportional Allocation) *Siano dati quattro oggetti A, B, C e D con le seguenti valutazioni:*

	A	B	C	D
I	10	20	70	0
II	30	40	0	30

la procedura assegna le seguenti frazioni e valutazione in punti degli oggetti:

	A		B		C		D		*Punti*
I	$\frac{1}{4}$	2.50	$\frac{1}{3}$	6.66	1	70	0	0	79.16
II	$\frac{3}{4}$	22.50	$\frac{2}{3}$	26.66	0	0	1	30	79.16

In questo caso la divisione non è efficiente (ma è equitabile), in quanto $\frac{x_A}{x_B} < \frac{y_A}{y_B}$ $\left(\frac{10}{20} < \frac{30}{40}\right)$ *per cui trasferendo* $\frac{1}{4}$ *di A da I a II e* $\frac{1}{6}$ *di B da II a I* $\left(\frac{10}{20} < \frac{1/6}{1/4} < \frac{30}{40}\right)$ *le nuove frazioni e valutazioni sono:*

	A		B		C		D		*Punti*
I	0	0	$\frac{1}{2}$	10	1	70	0	0	80
II	1	30	$\frac{1}{2}$	20	0	0	1	30	80

cioè entrambi i giocatori migliorano il proprio risultato. Si noti che entrambi gli oggetti A e B hanno ricevuto una valutazione maggiore dal giocatore II. $\diamondsuit$

7.4.1 Un caso reale di divorzio

Il caso analizzato (vedi Brams and Taylor, 1996), è relativo ad una coppia di coniugi statunitensi, con 41 anni di matrimonio, di cui 33 convissuti.

La moglie era una promettente cantante, che ha interrotto la carriera a causa del matrimonio e della nascita di quattro figli. Il marito era un mercante di diamanti operante tra New York e Parigi che in seguito ha abbandonato la moglie per un'altra donna e al momento della causa ricopriva il ruolo di presidente della “Diamond Distributor’s Inc.”, con un patrimonio di oltre 5 milioni di US$, due terzi dei quali in azioni della compagnia.

La prima parte del dibattito processuale ha riguardato la definizione del patrimonio da dividere, anche sulla base della situazione dei due coniugi; la seconda parte ha analizzato la divisione del patrimonio; infine la terza parte la definizione dell’assegno di mantenimento assegnato alla moglie. La causa di divorzio si concluse nel 1983.

In questo caso l’interesse è rivolto principalmente alla suddivisione del patrimonio.

Nella prima parte la corte eliminò tutti gli elementi di proprietà personale di uno dei coniugi o richiesti da uno solo di essi; questi vennero dichiarati “già assegnati” e “di valore quasi equivalente”. Inoltre venne assegnato alla moglie un assegno annuo di mantenimento di 65,000 US$.

Gli elementi oggetto della disputa giudiziaria e i loro valori monetari in US$ stimati dalla corte sono riportati nella seguente tabella:

Oggetto	Valore
1 - 90% dell’appartamento di Parigi (residenza)	642,856
2 - Monolocale di Parigi	42,850
3 - Appartamento di New York	103,079
4 - Fattoria nella contea di Duchess (quota)	119,200
5 - Liquidità e crediti	42,972
6 - Garanzie e cauzioni	176,705
7 - Utili pianificati	120,940
8 - Valore di riscatto dell’assicurazione sulla vita del marito	24,500
Totale	1,273,102

Sulla base delle dichiarazioni nella fase processuale, si possono stimare le seguenti valutazioni dei coniugi per ciascuno degli oggetti riportati nella precedente tabella:

Oggetto	Marito	Moglie
1 - Appartamento di Parigi	35	55
2 - Monolocale di Parigi	6	1
3 - Appartamento di New York	8	1
4 - Fattoria	8	1
5 - Liquidità e crediti	5	6
6 - Garanzie e cauzioni	18	17
7 - Utili pianificati	15	15
8 - Assicurazione	5	4
Totale	100	100

La procedura AW assegna inizialmente al marito gli oggetti 2, 3, 4, 6, e 8 e alla moglie gli oggetti 1, 5 e 7, per cui il marito ottiene 45 punti e la moglie 76. Trasferendo gli utili pianificati (rapporto 15/15) al marito i nuovi punteggi sono rispettivamente 60 e 61; trasferendo $\frac{1}{11}$ della liquidità e crediti al marito entrambi i coniugi ottengono 60.455 punti.

Osservazione 7.4.1

- *I valori monetari sono rispettivamente 591,180 US$ per il marito e 681,922 US$ per la moglie. Questo non altera l'equitabilità della procedura che si basa sulle valutazioni soggettive dei coniugi e non sui valori monetari oggettivi.*

- *Se i due coniugi avessero assegnato agli oggetti valori non veritieri questo non si tradurrebbe necessariamente in un vantaggio al termine della procedura. Si considerino i seguenti esempi:*
  Esempio 1
  Se il marito prevedendo di perdere l'oggetto 1 ripartisse i suoi 100 punti sugli oggetti secondo i valori 0, 10, 12, 12, 8, 28, 23 e 7 otterrebbe gli oggetti 2, 3, 4, 6, 8 e $\frac{7}{38}$ *dell'oggetto 7 corrispondenti a 73.237 punti fittizi e 47.763 punti reali.*
  Esempio 2
  Se invece cercasse di incrementare i punti assegnati all'oggetto 1, ma sbagliasse la valutazione della moglie, assegnando all'oggetto 1 un valore superiore a quello della moglie, ad esempio 56, 4, 6, 6, 3, 12, 10 e 3 otterrebbe gli oggetti 2, 3, 4 e $\frac{27}{37}$ *dell'oggetto 1 corrispondenti a 56,865 punti fittizi e 47.541 punti reali.*
  Ovviamente se assegnasse i valori 45, 2, 2, 2, 7, 20, 17 e 5 otterrebbe tutti gli oggetti tranne l'oggetto 1 corrispondenti a 55 punti fittizi e 65 punti reali.

7.4.2 Il caso del Canale di Panama

Nel Giugno 1974 il trattato del Canale di Panama è stato oggetto di una negoziazione tra gli Stati Uniti e la repubblica di Panama, a seguito della fine del controllo statunitense.

Sulla base di interviste ai negoziatori statunitensi, è stato possibile ricostruire le valutazioni delle due parti sugli elementi oggetto della trattativa, come riportato nella seguente tabella:

	US	Panama
Diritti di difesa US	22	9
Diritti di utilizzo	22	15
Territorio	15	15
Diritti di espansione	14	3
Durata	11	15
Direzioni di espansione	6	5
Compensazioni	4	11
Giurisdizione	2	7
Diritti militari US	2	7
Ruolo difensivo di Panama	2	13
Totale	100	100

(vedi The Art and Science of Negotiation, Howard Raiffa, Harvard University Press).

L'applicazione della procedura AW porta alla seguente soluzione:

	Elementi ricevuti	Valore
US	1, 2, 4, 6, $\frac{2}{15}3$	66
Panama	5, 7, 8, 9, 10, $\frac{13}{15}3$	66

Si noti che l'unico elemento diviso risulta essere il territorio, che è certamente quello più facilmente divisibile.

Capitolo 8

Aste

8.1 Introduzione

Il concetto di asta è piuttosto usuale, ad esempio tutti hanno sentito parlare di Sotheby's (1744) o Christie's (1766), per cui è considerato anche semplice; in realtà un'asta è un meccanismo molto complesso.

Il termine italiano "asta" deriva dall'usanza nell'antica Roma di piantare in terra un'asta nel luogo dove si teneva la vendita (e questo indica quanto è antico questo modo) e anche il termine inglese "auction" deriva dal latino augere (aumentare).

In un'asta possono essere venduti oggetti singoli, lotti oppure più oggetti identici o simili in sequenza; questo capitolo vuole analizzare non formalmente i *meccanismi* o *regole d'asta* più diffusi, limitandosi al caso di un solo oggetto.

In generale all'idea di asta viene associata una sala in cui qualcuno, il *banditore*, offre un oggetto di proprietà di un'altro, il *venditore*, e in cui altre persone ancora, gli *acquirenti* o *offerenti*, rilanciano l'offerta fino a che nessuno aumenta oltre, e al classico "e uno, e due, e tre" l'oggetto viene aggiudicato all'acquirente che ha fatto l'offerta più alta.

Un'asta permette di vendere un oggetto o una merce, del cui prezzo il venditore non è certo, all'acquirente che offre il prezzo più alto, in modo tale da ottenere un guadagno maggiore e spesso in modo molto più rapido rispetto ad una normale contrattazione.

Le aste sono comunemente utilizzate per titoli di Stato, prestiti con rischio incerto, vini, oggetti d'arte e in generale quelle situazioni in cui non esiste un prezzo di mercato o la qualità del bene non è verificabile o quelle trattative finanziarie di rischio non determinabile. I tre principali motivi della popolarità delle aste sono: il risultato è efficiente e stabile, un venditore in una posizione di contrattazione relativamente debole è tutelato, infine un venditore in una forte posizione di contrattazione può ottenere un risultato ottimale.

Infine una caratteristica che rende unico il meccanismo d'asta è che il prezzo viene stabilito dagli acquirenti e non dal venditore, il quale a sua volta ha la possibilità di scegliere il meccanismo per lui più favorevole, anche se la vendita viene condotta dal banditore e non dal venditore.

Questa caratteristica dell'asta riflette il fatto che gli acquirenti possono essere più informati sul valore dell'oggetto che lo stesso proprietario (venditore), il quale usa l'asta per ottenere informazioni sul valore del bene, temendo che il prezzo che lui ha in mente possa essere anche molto inferiore a quello che potrebbe ottenere.

Come esempio si può citare il caso di un oggetto d'arte posseduto da una persona che non ha alcun interesse artistico e quindi attribuisce un limitato valore al possesso dell'oggetto e non è in grado di stabilire in valore di vendita, mentre invece l'oggetto può essere pagato anche moltissimo da un appassionato collezionista.

Quale asta è la migliore? La risposta è abbastanza complessa. Innanzitutto il punto di vista del venditore è l'opposto dell'acquirente; per alcune merci (fiori, pesce, ecc.) è importante la rapidità; in alcuni casi è importante evitare accordi tra gli acquirenti; in altri casi non è necessaria la presenza degli acquirenti.

Un'asta ha anche degli aspetti negativi, il più noto dei quali è la *maledizione del vincitore* (*winner curse*) per cui il vincitore di un'asta si accorge che poteva pagare meno, o anche che il valore dell'oggetto è inferiore al prezzo pagato. Un esempio classico è costituito dall'acquisto di una concessione petrolifera.

Un altro aspetto negativo è la *collusione* (*ring*), cioè quando alcuni acquirenti si accordano per non far crescere troppo il prezzo. La collusione è un reato.

Per concludere si deve distinguere il caso in cui l'acquirente compra il bene per se stesso, basandosi quindi sulla propria valutazione, che tiene quindi conto di valori non quantificabili, per cui tale valutazione è privata e personale dal caso in cui l'oggetto viene acquistato allo scopo di essere rivenduto, nel qual caso tale valutazione potrebbe essere nota ad altri acquirenti o anche al venditore, per cui tale valutazione è comune.

Infine il venditore può decidere un *prezzo minimo di vendita* (*reservation price*) che può essere superiore al *prezzo base d'asta.*

8.2 Tipi di aste

Le aste possono essere divise in aste *aperte*, nelle quali gli acquirenti dichiarano pubblicamente le loro offerte, e in aste a *busta chiusa* o *offerta segreta* (*sealed bid*), nelle quali gli acquirenti non rendono note le loro offerte.

Generalmente si considerano quattro tipi di aste: *inglese* o *ascendente*, *olandese* o *discendente*, *busta chiusa al primo prezzo* e *busta chiusa al secondo prezzo* o *Vickrey*. Purtroppo nelle comunità finanziarie gli stessi nomi indicano differenti aste.

8.2.1 Asta inglese

Questo è il tipo di asta più comune ed è detta anche asta ascendente. E' usata per i vini e gli oggetti d'arte.

Il banditore comincia a chiedere il prezzo base e successivamente sollecita gli acquirenti ad offerte pubbliche crescenti, fino a che nessuno offre un prezzo superiore. L'oggetto viene venduto al miglior offerente, se la sua offerta supera il prezzo minimo e non vi sono altri impedimenti.

In questo tipo di asta la competizione e l'entusiasmo possono indurre gli acquirenti ad offerte molto elevate, portando alla maledizione del vincitore.

Esiste una variante in cui il prezzo sale costantemente e gli acquirenti annunciano pubblicamente il loro ritiro quando il prezzo è troppo alto. In altre varianti il ritiro è segreto oppure è possibile il rientro dopo il ritiro.

In questo tipo d'asta l'abilità del banditore può far salire molto il prezzo, utilizzando il tono della voce o proponendo le offerte.

Infine, in generale, quest'asta richiede la presenza dell'acquirente e sono possibili le collusioni.

8.2.2 Asta olandese

Questo tipo di asta è detto anche asta discendente. Il nome deriva dal fatto di essere usata in Olanda per i fiori.

Viene usata anche per il pesce fresco (Inghilterra e Israele) o per gli scambi con l'estero (Bolivia, Jamaica e Zambia) ed è stata usata per finanziare il credito pubblico in Romania.

In questo caso un contatore inizia con un valore molto alto e scende costantemente, fino a che un venditore accetta il prezzo indicato, ponendo fine all'asta. In generale in pochi secondi l'oggetto è venduto.

Anche in questo caso è richiesta la presenza dell'acquirente, che può facilmente essere rappresentato.

8.2.3 Asta in busta chiusa al primo prezzo

Questo terzo tipo di asta è usata per gli scambi con l'estero.

Ogni acquirente presenta una busta che contiene la sua offerta; dopo aver raccolto le offerte, le buste vengono aperte e chi ha offerto il prezzo più alto ottiene l'oggetto a quel prezzo.

In generale l'offerta non può essere rilanciata, per cui è necessario curare attentamente il valore; talvolta le offerte e il vincitore non vengono resi noti.

Un'offerta alta dà un'elevata probabilità di vincita, ma anche di incorrere nella maledizione del vincitore.

In questo caso non è necessaria la presenza dell'acquirente, ma i tempi possono essere anche dell'ordine di mesi.

8.2.4 Asta Vickrey o in busta chiusa al secondo prezzo

Quest'ultimo tipo di asta prende nome da William Vickrey, premio Nobel per l'economia nel 1996. Si differenzia dal caso precedente perchè il vincitore paga il secondo prezzo più alto offerto.

Viene usata per gli scambi con l'estero (Guinea, Nigeria e Uganda) ed è stata usata per finanziare il credito pubblico in Cecoslovacchia.

Sembrerebbe ovvio che un venditore preferisca l'asta al primo prezzo rispetto a quella al secondo prezzo, poichè il suo guadagno è maggiore, ma in realtà il diverso meccanismo può influenzare, a vantaggio del venditore, le offerte degli acquirenti.

L'idea del secondo prezzo non può essere applicata all'asta inglese, in quanto è sufficiente che la seconda offerta sia molto più alta del valore reale, per cui nessuno la rilancia e l'acquirente si garantisce il primo prezzo offerto.

8.3 Strategie di asta

Definire una strategia ottimale per le varie aste è complesso in quanto entrano in gioco numerosi aspetti: l'avversione al rischio, informazioni private, eventuale rivendita dell'oggetto.

In generale sia il venditore che gli acquirenti si basano su una stima del valore dell'oggetto e sulle stime degli altri agenti, per cui un buon risultato dipende molto da una buona previsione degli elementi in gioco.

Un altro aspetto molto importante è un buon utilizzo dell'asimmetria delle informazioni disponibili.

8.3.1 Strategie del venditore

Il venditore può rendere note informazioni relative all'oggetto, in generale se queste permettono di aumentare le valutazioni degli acquirenti, riducendo i loro dubbi e spingendoli ad alzare le offerte.

La possibilità di scegliere il meccanismo d'asta merita qualche parola in più. A livello teorico si può dimostrare che in presenza di valutazioni private i quattro tipi di asta portano allo stesso risultato per il venditore, per cui la scelta del meccanismo d'asta è irrilevante. Se però esiste una valutazione comune allora il risultato migliore può essere ottenuto con un'asta inglese, poi con un'asta Vickrey e infine l'asta olandese e l'asta in busta chiusa al primo prezzo portano allo stesso risultato. Il prezzo ottenibile rispecchia la capacità dell'asta di generare informazione. Infatti le ultime due non generano alcuna informazione utilizzabile dagli acquirenti, che devono scegliere sulla base della sola valutazione che essi danno dell'oggetto; nell'asta Vickrey invece l'acquirente può sfruttare il fatto che pagherà il secondo prezzo; infine nell'asta inglese l'acquirente vede come si evolvono le offerte.

8.3.2 Strategie dell'acquirente

- **Asta inglese**
  Nel caso di valutazione privata, la strategia migliore è offrire poco di più dell'ultima offerta, fino a raggiungere la propria valutazione e poi fermarsi.
  In generale l'asta termina quando si supera la seconda valutazione più alta.

- **Asta olandese**
  L'acquirente non ha possibilità di acquisire informazioni, in quanto l'unico segnale che riceve è lo stop di un altro acquirente che pone fine all'asta, per cui deve decidere in anticipo quale prezzo accettare, cioè quando chiamare lo stop.

- **Asta in busta chiusa al primo prezzo**
  La situazione di un acquirente è simile a quella dell'asta olandese.

- **Asta Vickrey**
  Per questo tipo di asta è facile verificare (Milgrom) che la scelta migliore (strategia debolmente dominante) di un acquirente è offrire esattamente la sua valutazione, perchè altrimenti rischia di pagare troppo l'oggetto, se offre di più, mentre se offre di meno può perdere l'oggetto che oltretutto può essere pagato meno di quanto lui lo valutava.

8.4 Collusioni e trucchi

Un modo per stabilire quale asta è migliore consiste nel vedere quale permette di limitare le collusioni e i trucchi. In questo paragrafo ne vengono analizzati alcuni.

8.4.1 Collusioni

Un sottoinsieme di acquirenti si accorda per non rilanciare l'offerta tra di loro, limitando il valore finale. Successivamente l'oggetto viene rimesso all'asta all'interno del gruppo, dividendo i profitti.

Se qualcuno decide di entrare in collusione, col solo scopo di partecipare alla divisione dei profitti viene presto estromesso dal gruppo.

Ovviamente all'interno di un gruppo di collusori, può formarsi una nuova collusione.

8.4.2 Trucchi degli acquirenti

Questi trucchi sono generalmente illegali, ma talvolta sono leciti.

Un collezionista o un esperto può non voler far sapere che partecipa ad un'asta per evitare di far salire troppo il prezzo; a tale scopo può utilizzare posti defilati o muoversi all'interno della sala.

Un trucco illegale consiste nell'accordarsi col banditore su segni convenzionali.

Talvolta un acquirente può diffondere informazioni false sull'oggetto in modo da svalutarlo agli occhi degli altri.

In un asta con più oggetti venduti a lotti si possono spostare alcuni oggetti da un lotto ad un altro di oggetti simili.

E' possibile asportare parte di un oggetto, ad esempio un accessorio e rivenderlo al vincitore successivamente.

8.4.3 Trucchi del banditore o del venditore

Il trucco più semplice è inserire un oggetto di scarso valore in un'asta di oggetti di grande valore e sfruttare l'enorme interesse dell'asta. Talvolta si autentica un oggetto falso.

Un altro trucco consiste nel fingere un'offerta che non c'è stata per far credere che l'oggetto abbia un elevato valore.

Altri trucchi si riferiscono al prezzo minimo di vendita; si può fingere che sia più alto per incentivare tutti gli acquirenti a fare offerte più alte o incentivarli a partecipare, oppure per spingere il vincitore ad alzare l'offerta.

In un'asta Vickrey si può falsificare la seconda offerta, per far crescere il prezzo pagato dal vincitore.

8.4.4 Evitare le collusioni

Ovviamente più elementi sono segreti meno è possibile una collusione; infatti le aste si prestano alle collusioni nel seguente ordine decrescente: inglese, Vickrey, primo prezzo, olandese.

In generale le aste a offerta segreta permettono manipolazioni da parte o con l'aiuto del banditore, ad esempio:

- il banditore può informare un acquirente dell'offerta più alta finora pervenuta;
- il banditore può dichiarare che un'offerta è arrivata in ritardo o accettare un'offerta tardiva.

Infine le aste elettroniche evidenziano il problema dell'affidabilità degli agenti coinvolti.

8.5 Altri tipi di aste

Quanto detto sulle aste è una semplice e rapida trattazione di un argomento molto complesso. Si possono citare altri tipi di aste:

- **Aste casuali**
  scritta, gestuale, sussurata.
- **Aste non casuali**
  a tempo, silenziosa, a rotazione, svizzera.
- **Aste multiple**
  Un'altra classe di aste comprende quelle in cui ci sono più oggetti da assegnare a più acquirenti nello stesso tempo. In questo caso gli acquirenti possono pagare lo stesso prezzo o prezzi differenti, generando strategie diverse. Un caso particolare di asta multipla è l'*asta combinatoria* in cui ciascun acquirente fa un'offerta su un sottoinsieme di oggetti e non su un singolo oggetto. Il problema dell'assegnazione di ciascun oggetto contiene aspetti teorici e pratici molto interessanti.

Capitolo 9

Bibliografia

Aumann RJ (1974) *Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies*, Journal of Mathematical Economics 1 : 67-96.

Austin AK (1982) *Sharing a Cake*, Mathematical Gazette 66 : 212-215.

Brams SJ, Taylor AD (1996) *Fair-Division*, Cambridge University Press, New York.

Dubins LE, Spanier EH (1961) *How to Cut a Cake Fairly*, American Mathematical Monthly 84 : 1-17.

Flood MA (1958) *Some Experimental Games*, Management Science 5 : 5-26.

Fudenberg D, Tirole J (1991) *Game Theory*, MIT Press, Cambridge.

Harsanyi JC (1966) *A General Theory of Rational Behavior in Game Situations*, Econometrica 34 : 613-634.

Harsanyi JC (1967-68) *Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players, Parts I, II and III*, Management Science 14 : 159-182, 320-334 e 486-502.

Knaster B (1946) *Sur le Problème du Partage Pragmatique de H Steinhaus*, Annales de la Societé Polonaise de Mathematique 19 : 228-230.

Kuhn HW (1953) *Extensive Games and the Problem of Information*, in Contributions to the Theory of Games, Volume II (Annals of Mathematics Studies 28) (Kuhn HW, Tucker AW eds.), Princeton University Press, Princeton : 193-216.

Nash JF (1950) *Equilibrium Points in N-Person Games*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 36 : 48-49.

von Neumann J (1928) *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Mathematische Annalen 100 : 295-320.

von Neumann J, Morgenstern O (1944) *Theory of Games and Economic Behavior (2nd ed. 1947, 3rd ed. 1953)*, Princeton University Press, Princeton.

Selten R (1965) *Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit*, Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 121 : 301-324 e 667-689.

Selten R (1975) *Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games*, International Journal of Game Theory 4 : 25-55.

Shubik M (1982) *Game Theory in Social Science: Concepts and Solutions*, MIT Press, Cambridge.

Smith W (1956) *Various Optimizer for Single-Stage Production*, Naval Research Logistics Quarterly 3 : 59-66.

Steinhaus H (1948) *The Problem of Fair Division*, Econometrica 16 : 101-104.

Tucker AW (1950) *Memorandum on The Prisoner's Dilemma.*

Young HP (1994) *Cost Allocation*, in Handbook of Game Theory (Aumann RJ, Hart S eds.) Vol. 2, North Holland, Amsterdam : 1193-1235.

Indice