

CAPITOLO II

LIMITI DI SUCCESSIONI

1. Definizione di limite per successioni

Definizione 1 Una successione di numeri reali è una applicazione avente come dominio $\mathbb{N}$ e come codominio $\mathbb{R}$. $\square$

Quindi, se chiamiamo a una successione, abbiamo che è $a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Quello che abbiamo definito è una successione di numeri reali: se il codominio dell'applicazione è un insieme di fagioli, avremo una successione di fagioli. Noi ci occuperemo quasi esclusivamente di successioni di numeri reali.

Dato un numero naturale n , è consuetudine indicare il valore che la successione a assume in n con a_n , anziché con $a(n)$, come di solito si fa con le applicazioni. Dato $n \in \mathbb{N}$, a_n viene detto "termine n -esimo della successione a ". Vale la pena di notare che l'insieme dei termini della successione a non è altro che l'immagine di a , cioè $a(\mathbb{N})$. Tale insieme è importante, tanto è vero che diremo che una successione a è limitata (o che ha massimo, o che il suo estremo superiore è λ , etc.) se $a(\mathbb{N})$ è limitato (o ha massimo, o il suo estremo superiore è λ , etc.).

Una nozione che non possiamo invece definire usando solo $a(\mathbb{N})$ è l'idea di successione crescente e decrescente. Guardando solo ad $a(\mathbb{N})$ non possiamo capire come stanno le cose a questo riguardo. Ad esempio, $a_n = 1/n$ è decrescente, mentre $b_n = \begin{cases} 1/(2k-1) & \text{per } n=2k, k \in \mathbb{N} \\ 1/2k & \text{per } n=2k-1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$, cioè $b_1 = 1/2$, $b_2 = 1$, $b_3 = 1/4$, $b_4 = 1/3$, $b_5 = 1/6$, $b_6 = 1/5$, ..., non è decrescente. Eppure, $a(\mathbb{N}) = b(\mathbb{N})$. Abbiamo pertanto bisogno della seguente:

Definizione 2 Una successione $a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice debolmente crescente (rispettivamente: debolmente decrescente, strettamente crescente, strettamente decrescente) se per ogni $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq a_{n+1}$ (rispettivamente: $a_n \geq a_{n+1}$, $a_n <$

$\langle a_{n+1}, a_n \rangle_{a_{n+1}}$). Una successione si dice monotona se è debolmente crescente o debolmente decrescente; si dice strettamente monotona se è strettamente crescente o strettamente decrescente. $\square$

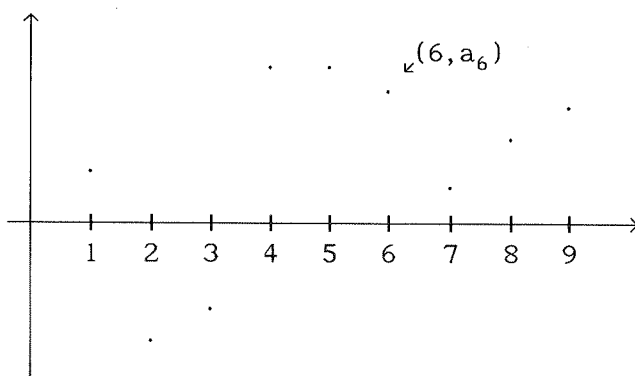
Esercizio 1 Fare un esempio di successione non monotona. $\square$

Un altro concetto importante è quello di grafico di una successione¹. Una successione a , essendo una applicazione, ha come tutte le applicazioni il suo grafico che è:

$$\text{gph}(a) = \{ (n, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \text{ e } y = a(n) \}.$$

Naturalmente, essendo $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, $\text{gph}(a) \subseteq \mathbb{R}^2$.

Come per tutte le applicazioni, la conoscenza del grafico di una successione è equivalente alla conoscenza della successione stessa. Pertanto, un modo sensato di "rappresentare" una successione è quello di "tracciarne il grafico" nel piano cartesiano.



Molto spesso, tuttavia, una successione viene individuata tramite l'insieme dei suoi termini. Tale rappresentazione può essere utile, anche più comoda di quella mediante il grafico, però può dare luogo a gravi malintesi. Occorre tenere presente che l'insieme dei termini di una successione non è altro che l'immagine della applicazione a : è ben noto che applicazioni tra di loro diverse possono avere la stessa immagine. Per esempio, la successione $a_n = (-1)^n$ e la successione b così definita:
$$b_n = \begin{cases} -1 & \text{per } n=1 \\ 1 & \text{per } n>1 \end{cases}$$
 hanno la stessa immagine. Uno si potrebbe anzi chiedere perché venga così tanto utilizzata questa rappresentazione

¹ Dedicherò il paragrafo III.2 ad un approfondimento di alcune questioni concernenti la rappresentazione dei grafici.

per le successioni: la ragione è che tale rappresentazione sottintende spesso una "dinamica" che non si può riprodurre su un mezzo di comunicazione statico come un foglio di carta. Per essere più esplicito, di solito succede che chi spiega (per esempio) indichi sulla lavagna via via i termini della successione. In tal modo si riesce a notare se i termini della successione si avvicinano (con lo scorrere del tempo) verso un numero reale ℓ . Oppure si nota se si vanno a sovrapporre l'uno all'altro, ed in quale modo (per esempio con la successione $a_n = (-1)^n$ il gesso saltella sempre tra -1 e 1 , mentre con la successione b_n sopra definita il gesso, a parte la prima volta, va poi sempre a cadere nel punto 1). Quindi, riflettendo un po', abbiamo che il modo in cui concretamente si usa la rappresentazione di una successione mediante l'insieme dei suoi termini, usa in effetti uno schema bidimensionale: oltre alla retta reale sulla quale si posizioniano i termini della successione, c'è anche l'altra dimensione che è il tempo.

Fatte queste premesse, possiamo passare senza indugi al "cuore" di questo capitolo: la definizione di limite per successioni.

Prima serve però una convenzione "stenografica": useremo il simbolo $\forall$ come sinonimo di "per ogni" e il simbolo $\exists$ come sinonimo di "esiste". Questa convenzione, anche se probabilmente nota a tutti, non è stata utilizzata nel primo capitolo, tranne che per la tabella degli assiomi di $\mathbb{R}$. E' evidentemente servita in quella tabella per ragioni di spazio e di sinteticità: sono queste le stesse ragioni che mi inducono ad introdurla a questo punto. Userò anche il simbolo $\Rightarrow$ come sinonimo di "se ... allora".

Definizione 3 Sia data una successione $a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ ed un numero reale ℓ . Diremo che ℓ è il limite della successione per "n tendente a infinito" se è soddisfatta la seguente condizione:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon) . \square$$

Terribile, vero? A parte la crudeltà di avere introdotto i simboli $\forall$ ed $\exists$ proprio allo scopo di far apparire più criptica di quanto non sia questa definizione, non è che dopo averla tradotta in un linguaggio un po' più simile all'italiano uno è molto più soddisfatto. E allora ricominciamo daccapo.

Proviamo a chiederci cosa voglia dire limite di una successione, facciamo un po' di esempi, cerchiamo di precisare la nostra intuizione: ci accorgeremo che è ragionevole giungere alla definizione che ho dato così "ex abrupto", anche se non

è banale.

In prima approssimazione, l'intuizione che vogliamo rendere precisa con una definizione è che i termini a_n si avvicinano sempre più ad un certo numero reale ℓ , via via che n diventa grande.

Ciò può essere espresso dicendo che la "distanza" tra a_n ed ℓ tende a diventare sempre più piccola al crescere di n . La "distanza" tra a_n ed ℓ la misuriamo con $|a_n - \ell|$ e quindi potremmo dire che

$$(*) \quad |a_{n+1} - \ell| \leq |a_n - \ell| \quad \text{per ogni } n$$

il che esprime l'idea che tale distanza tende a diminuire. Ma questo chiaramente non basta: noi vogliamo che la suddetta distanza diventi sempre più piccola. Fac-

ciamo un esempio: consideriamo $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ ed $\ell = 0$.

Allora $|a_{n+1} - \ell| = 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n} = |a_n - \ell|$, quindi la condizione sopra indicata è soddisfatta. Ma $|a_n - \ell| = 1 + \frac{1}{n}$ non diventa "piccola" al crescere di n : resta sempre maggiore di 1.

Quindi occorre qualcos'altro: dobbiamo riuscire ad esprimere il fatto che $|a_n - \ell|$ diventa "piccola". Occorre trovare un modo per esprimere questa idea dinamica nel contesto dei numeri reali, che di per sé non hanno alcun aspetto dinamico. Ci vuole poco, però: basta fare una specie di gioco a due mosse. Con la prima mossa si fissa una "soglia" ε e con la seconda si trova un indice n tale che sia $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

La chiave di tutto sta qui: prima si sceglie un ε e poi si cerca l'indice n . La dinamica dell'idea di limite si è spostata fuori dai numeri reali, è stata incorporata nella peculiare struttura della frase che usiamo per cercare di tradurre tale idea. Voglio sottolineare che capire questo punto significa capire il nocciolo della definizione di limite.

A questo punto, superato lo scoglio più arduo, possiamo occuparci di precisare meglio le cose.

Tanto per cominciare, abbiamo fatto una richiesta eccessiva. Perché mai $|a_n - \ell|$, per diventare sempre più piccola, deve soddisfare la condizione (*)? Facciamo un esempio. Consideriamo una pallina che rimbalza sul pavimento. Per attrito ed altri motivi, l'energia meccanica si trasforma in calore e quindi la pallina saltellerà sempre meno. Se immaginiamo di fotografare la pallina ad istanti suc-

cessivi, e su ogni foto misuriamo la distanza tra pallina e pavimento, otteniamo una successione la quale si avvicina sì a zero, ma non ci aspettiamo che in ogni fotogramma la distanza tra pallina e pavimento sia minore della distanza nel fotogramma precedente.

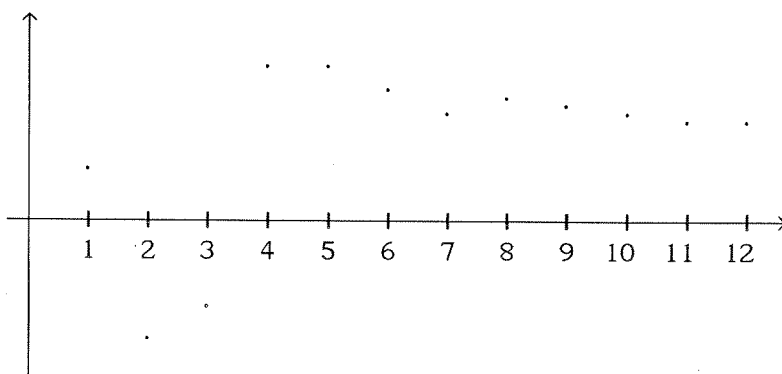
Quindi la condizione (*) si presenta come una condizione accessoria, non indispensabile per rendere l'idea di limite. Sarà quindi opportuno scartarla. Perché? Perché quando si vuole precisare un concetto, è opportuno depurarlo di tutti gli elementi estranei, di modo che si abbia una maggiore chiarezza.

Avendo tolto di mezzo la condizione (*), ci si presenta però una difficoltà. E cioè: la condizione che ci sembrava di avere enucleato per rendere l'idea di limite non va più bene. Non è sufficiente. Per capirlo, possiamo fare il seguente esempio. Supponiamo di avere una successione che quando n è pari vale 1 e quando n è dispari vale $1/n$. E' evidente che, fissato $\varepsilon > 0$, ci sarà n t.c. $1/n$ è più piccolo di ε . Quindi la condizione che avevamo trovato è soddisfatta con $\ell = 0$. Ma non penso che si possa dire che tale successione tende a zero (solo i termini dispari tendono a zero). E allora? Come possiamo rimediare?

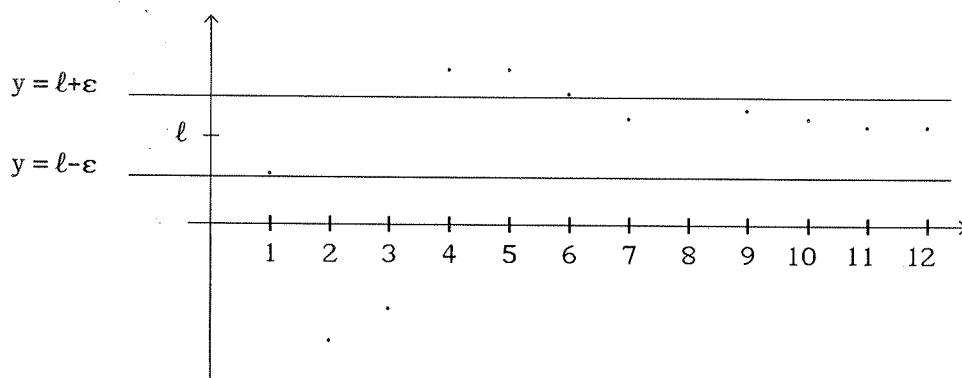
Credo che di idee ce ne possano essere molte, ma non è mia intenzione fare una disamina di tutto quel che può passare per la testa a chi voglia risolvere questo problema. E allora presenterò subito l'idea "buona". Tutto sommato, non è poi tanto strana. Prima avevamo detto che, dato un numero reale ε positivo, bisognava riuscire a trovare un indice n t.c. $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Bene, si tratta di richiedere che non solo si abbia $|a_n - \ell| < \varepsilon$, ma anche $|a_m - \ell| < \varepsilon$ per tutti gli indici m successivi ad n .

Spero che sia chiara la differenza tra le due formulazioni. Prima ci accontentavamo di trovare un indice n t.c. $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Ora pretendiamo ben di più: vogliamo trovare un indice n t.c. da quell'indice in poi, cioè per ogni indice m più grande di n , sia soddisfatta la condizione $|a_m - \ell| < \varepsilon$.

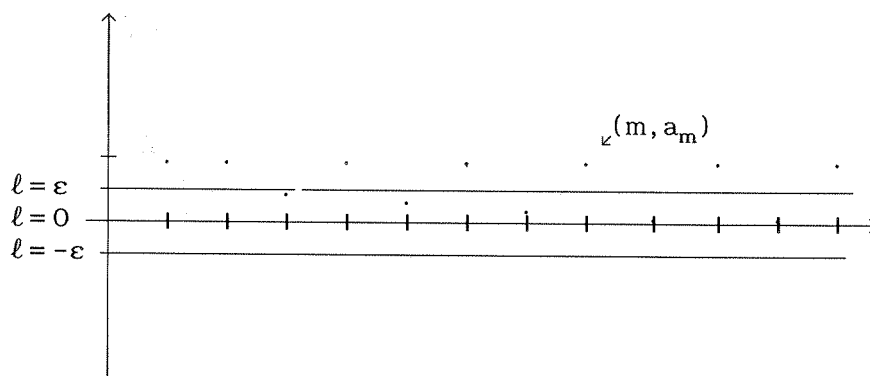
Graficamente, l'idea è questa. Esaminiamo il grafico di una successione.



Per poter affermare che ℓ è il limite, noi fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo la striscia di piano compresa tra le due rette di equazione $y = \ell - \varepsilon$ ed $y = \ell + \varepsilon$. Avere che il punto (n, a_n) del grafico della successione a sta nella striscia, è equivalente ad affermare che $|a_n - \ell| < \varepsilon$.



La condizione precedente ci chiedeva di riuscire a trovare, per ogni prefissata striscia di ampiezza 2ε , un punto del grafico nella striscia. Cosa soddisfatta evidentemente dalla successione $a_n = 1$ per n pari ed $a_n = 1/n$ per n dispari:



La richiesta che facciamo è ben più impegnativa. Vogliamo trovare un indice n t.c. ogni punto (m, a_m) del grafico di a stia nella striscia, purché

$m > n$. Dall'ultimo disegno dovrebbe essere chiaro che, per quanto proviamo a prendere grande n , ci sono sempre punti (m, a_m) che "scappano" fuori dalla striscia: non diremo pertanto che questa successione tende a 1.

Ebbene, la condizione che abbiamo individuato e che abbiamo anche visto rappresentata graficamente è proprio la definizione di limite.

Ricapitolando, la condizione si può esprimere così. Data una successione a ed un numero reale ℓ , possiamo affermare che a_n tende ad ℓ quando n diventa grande se è vero quanto segue:

"per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ fissato, si può trovare un indice n t.c., per ogni indice m , la condizione $m > n$ garantisce che $|a_m - \ell| < \varepsilon$ "

Togliendo un po' di fronzoli:

"per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $m \in \mathbb{N}$, se $m > n$ allora $|a_m - \ell| < \varepsilon$ ".

E questa è proprio la definizione 3, che si differenzia da quanto scritto sopra solo per l'uso delle abbreviazioni stenografiche. Anzi, vale la pena di ritrascriverla qui:

Definizione 3 Sia data una successione $a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ ed un numero reale ℓ . Diremo che ℓ è il "limite della successione per n tendente a infinito" se è soddisfatta la seguente condizione:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon) . \square$$

Se una successione a e un numero reale ℓ soddisfano la definizione 3, diremo che ℓ è il "limite di a_n per n che tende all'infinito", cosa che verrà riassunta nella notazione $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$. Un'altra notazione, anche più comoda, è $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$. Anzi, addirittura a volte si scrive solo $a_n \longrightarrow \ell$, senza stare a ricordare che $n \longrightarrow \infty$ (tanto, dove può tendere, se non a ∞ ?).

Avendo a disposizione la definizione di limite, vediamo subito un paio di esempi.

Esempio 1 E' $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$. $\square$

Dettaglio Questo fatto era già stato notato, ma in un contesto di discussione informale. In realtà, là era stato dato per scontato un fatto per nulla banale. E cioè che, dato $\varepsilon > 0$, ci sia $n \in \mathbb{N}$ t.c. $1/n < \varepsilon$. Chi ci autorizza a fare questa affermazione? In quale assioma di $\mathbb{R}$ sta scritto? Direttamente in nessuno.

In realtà tale affermazione è corretta grazie al principio di Archimede: in effetti, dire che $1/n < \varepsilon$ è equivalente a dire che $1/\varepsilon < n$. E' proprio il principio di Archimede che ci garantisce che, dato il numero reale $x = 1/\varepsilon$, c'è un $n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > 1/\varepsilon$. Qui sta il nocciolo del discorso. Il resto è facile. Vediamo quindi che $1/n \longrightarrow 0$. Sia $\varepsilon > 0$. Dobbiamo trovare $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n > \nu$ si abbia $|a_n - 0| < \varepsilon$, cioè $|(1/n) - 0| < \varepsilon$, cioè $1/n < \varepsilon$. Per Archimede, $\exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $1/\nu < \varepsilon$. Se poi prendiamo $n > \nu$, è $1/n < 1/\nu$ e quindi $1/n < 1/\nu < \varepsilon$, cioè $1/n < \varepsilon$, come volevamo. $\square$

Esempio 2 Sia $a_n = 1$ per n pari ed $a_n = 1/n$ per n dispari. E' falso che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. $\square$

Dettaglio Basta fissare $\varepsilon = 1/2$. Se il limite fosse 0, dovremmo essere in grado di trovare $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n > \nu$ si abbia $a_n < 1/2$. Ma questo ovviamente non è possibile, perché $\forall \nu \in \mathbb{N}$ ci sarà sempre un n pari maggiore di ν ² e quindi, visto che $a_n = 1$ se n è pari, non è possibile soddisfare la richiesta che sia $a_n < 1/2$ per ogni indice $n > \nu$. $\square$

² Questa affermazione mi permette di ribadire una cosa. Ho detto che assumerò per note le proprietà dei numeri naturali (e razionali): questo vale anche per il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che abbiamo visto poter identificare con l'insieme dei naturali.

2. Unicità del limite e successioni convergenti

E' giunta l'ora di dimostrare uno dei risultati più importanti: il limite di una successione, se esiste, è unico. Penso che possa essere di per sé evidente l'utilità di un tale risultato, per cui non mi dilungo in chiacchiere e passo subito al teorema.

Teorema 1 Una successione non può avere più di un limite. $\square$

Dimostrazione L'affermazione del teorema può essere tradotta così: se ℓ è il limite di una successione a , ed abbiamo $\ell \neq \ell'$, allora non è vero che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell'$. Detto altrimenti, dati ℓ ed ℓ' con $\ell \neq \ell'$, non può essere vero sia $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell'$. Ancora, equivalentemente: data una successione a e dati $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell'$, allora $\ell = \ell'$.

Si tratta di tre affermazioni non identiche ma tra loro equivalenti. Sta a noi scegliere quella che più ci ispira per la dimostrazione. Userò la seconda affermazione, che suggerisce implicitamente di tentare una dimostrazione per assurdo.

Siano quindi dati $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ed $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ con $\ell \neq \ell'$. Supponiamo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell'$. Vediamo di ricavare da ciò una contraddizione. Se $\ell \neq \ell'$, allora $|\ell - \ell'| > 0$. Dalla definizione di limite abbiamo, scelto $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{2}$:

$$\exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \in \mathbb{N} (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon)$$

$$\exists \nu' \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n' \in \mathbb{N} (n' > \nu' \Rightarrow |a_{n'} - \ell'| < \varepsilon)$$

Osserviamo il fatto seguente. Chiamato $\nu'' = \max \{ \nu, \nu' \}$ ³, se $p > \nu''$, allora $p > \nu$ e $p > \nu'$.

Ma allora abbiamo che per $p > \nu''$ si ha $|a_p - \ell| < \varepsilon$ sia $|a_p - \ell'| < \varepsilon$. Sommando membro a membro:

$$|a_p - \ell| + |a_p - \ell'| < 2\varepsilon$$

Ma allora:

$$|\ell - \ell'| = \quad \text{per come abbiamo scelto } \varepsilon$$

³ La notazione dovrebbe essere chiara di per sé. Non essendo però consueta, può provocare qualche dubbio. Bene: ν'' indica l'elemento massimo nell'insieme i cui elementi sono ν e ν' . Quindi se $\nu > \nu'$ allora $\nu'' = \nu$, se $\nu' > \nu$ allora $\nu'' = \nu'$, se $\nu = \nu'$ allora $\nu'' = \nu = \nu'$.

$$\begin{aligned}
&= 2\varepsilon > && \text{per la disuguaglianza appena provata} \\
&> |a_p - \ell| + |a_p - \ell'| = && \text{perché } |x| = |-x| \quad \forall x \in \mathbb{R} \\
&= |\ell - a_p| + |a_p - \ell'| \geq && \text{per la disuguaglianza triangolare} \\
&\geq |(\ell - a_p) + (a_p - \ell')| = && \text{semplificando} \\
&= |\ell - \ell'|
\end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto $|\ell - \ell'| > |\ell - \ell'|$, una contraddizione. $\square$

Una volta provata l'unicità del limite, possiamo vedere un punto che di solito risulta essere un po' delicato, e cioè che cosa significa dire che una successione è convergente. La definizione è semplice.

Definizione 1 Data una successione a , diremo che essa è convergente se $\exists \ell \in \mathbb{R}$ t.c. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$. $\square$

Apparentemente, niente di particolare. Per così dire, una successione è convergente se converge da qualche parte. In realtà, le difficoltà nascono quando si vuole dimostrare che una successione non è convergente. Per farlo, cominciamo a scrivere cosa vuol dire che una successione è convergente:

$$(\bullet) \quad \exists \ell \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \in \mathbb{N} (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon)$$

Come si fa a negare questa proposizione? Facile. Questa proposizione ci dice che $\exists \ell \in \mathbb{R}$ che gode della proprietà seguente:

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \in \mathbb{N} (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon).$$

Negare questo fatto, cioè dire che non c'è alcun $\ell \in \mathbb{R}$ che gode della proprietà (*), è come dire che qualunque sia $\ell \in \mathbb{R}$ che noi scegliamo, esso non gode della proprietà (*). Cioè, $\forall \ell \in \mathbb{R}$ la proprietà (*) è falsa. Si tratta di una cosa ovvia: negare che a Genova vivano marziani è equivalente a dire che ogni persona vivente a Genova non è marziana.

Quindi abbiamo la equivalenza tra:

$$\text{non } (\exists \ell \in \mathbb{R} \text{ t.c. } (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \in \mathbb{N} (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon)))$$

e

$$\forall \ell \in \mathbb{R} (\text{non } (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \in \mathbb{N} (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon)))$$

Se si guarda all'aspetto formale della faccenda, abbiamo utilizzato il fatto che "non $\exists \ell \in \mathbb{R}$ t.c." è equivalente a " $\forall \ell \in \mathbb{R}$, non".

Similmente, dire che "non $\forall \varepsilon > 0$ " è equivalente a dire " $\exists \varepsilon > 0$ t.c. non", e possiamo applicare questo fatto per riscrivere ($\bullet$) così:

$$\forall \ell \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. non } (\exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \in \mathbb{N} (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon))$$

E possiamo proseguire, ottenendo:

$$\forall \ell \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } \forall \nu \in \mathbb{N} \text{ non } (\forall n \in \mathbb{N} (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon))$$

E ancora, sempre equivalentemente:

$$\forall \ell \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } \forall \nu \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. non } (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon)$$

E qui viene il bello. Si tratta di trovare una proposizione che sia equivalente a:

$$(\blacktriangleright) \quad \text{non } (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon)$$

A questo punto chi legge è invitato a riflettere su come si possa riscrivere. Per invogliare il lettore pigro a farlo, il testo prosegue nella pagina seguente, dove sono elencate una serie di proposizioni che non sono equivalenti a quella data. Anticipo che la risposta

$$(n > \nu \not\Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon)$$

non è accettabile, perchè è solo un modo diverso di riscrivere la stessa cosa di $(\blacktriangleright)$.

Le seguenti proposizioni sono tutte sbagliate come negazione della proposizione $(n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon)$

$$n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| \geq \varepsilon$$

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \Rightarrow n > \nu$$

$$n > \nu \text{ e } |a_n - \ell| > \varepsilon$$

$$|a_n - \ell| \geq \varepsilon \Rightarrow n \leq \nu$$

La corretta negazione di $(\blacktriangleright)$ è:

$$(n > \nu \text{ e } (\text{non } |a_n - \ell| < \varepsilon))$$

ovverossia

$$(n > \nu \text{ e } |a_n - \ell| \geq \varepsilon)$$

Perché? Perché la corretta negazione di " $p \Rightarrow q$ " è " p e non q ". Di solito si usa il simbolo " $\neg$ " per indicare "non". Pertanto la negazione di $p \Rightarrow q$ la scriveremo così: p e $\neg q$. Un'altra convenzione usata è quella di indicare con " $\wedge$ " la congiunzione "e" e con " $\vee$ " la "o" nel suo significato non esclusivo ("or", ovvero "vel"). E quindi potremmo scrivere $p \wedge \neg q$ come negazione di $p \Rightarrow q$. Non userò molto spesso, comunque, i simboli " $\wedge$ " e " $\vee$ ", perché dal punto di vista "stenografico" e da quello della chiarezza di scrittura non ci si guadagna molto rispetto all'uso di "e" ed "o".

Riassumendo, ricordo che il problema era quello di esprimere cosa voglia dire che una successione non è convergente. Bene: dire che una successione non è convergente equivale ad affermare che:

$$\forall \ell \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } \forall \nu \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } (n > \nu \text{ e } |a_n - \ell| \geq \varepsilon)$$

Esempio 1 Provare che $(-1)^n$ non è convergente. $\square$

Dettaglio Dobbiamo dimostrare che $\forall \ell \in \mathbb{R}$ vale una certa cosa. Ci conviene verificarlo facendo una distinzione di casi. E cioè per $\ell = -1$, $\ell = 1$ ed $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Naturalmente i casi esaminati devono essere esaustivi, il che è ovvio, essendo $\{1\} \cup \{-1\} \cup (\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}) = \mathbb{R}$.

Se $\ell = -1$, dobbiamo provare (come per ogni $\ell \in \mathbb{R}$) che

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } \forall \nu \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. non } (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon)$$

Prendiamo $\varepsilon = 1$. Osserviamo che $\forall \nu \in \mathbb{N}$, $2\nu > \nu$ e perciò possiamo prendere $n = 2\nu$, ottenendo $|a_n - \ell| = |a_{2\nu} - \ell| = |1 - (-1)| = 2 \geq \varepsilon$.

Se $\ell = 1$, la strada da seguire è simile (useremo $2\nu + 1$ anziché 2ν).

Se $\ell \neq -1, 1$, allora prendiamo $\varepsilon = \min \{ |\ell - (-1)|, |\ell - 1| \}$. Allora, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ scegliamo $n = \nu + 1$ e abbiamo $|a_n - \ell| \geq \varepsilon$ proprio per come abbiamo definito ε . $\square$

Esercizio 1 Dimostrare che la successione $a_n = \begin{cases} 1 & \text{per } n \text{ pari} \\ 1/n & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$ non è convergente. $\square$

3. Microcorso di logica

L'aspetto più semplice della logica sta nel cosiddetto "calcolo proposizionale" in cui non si va a vedere il contenuto delle proposizioni, ma ci si limita all'esame delle relazioni "logiche" tra loro.

Ad esempio: la proposizione composta $p \Rightarrow q$ è equivalente alla proposizione $\neg q \Rightarrow \neg p$ indipendentemente da quanto viene affermato nelle due proposizioni p e q .

Le proposizioni composte si ottengono, a partire da quelle "di base" o "atomiche" (nel senso di atomi, ovverossia non più ulteriormente "divisibili"⁴) legando le proposizioni atomiche tra loro mediante dei "connettivi". Essi sono: " $\neg$ ", " $\vee$ ", " $\wedge$ ", " $\Rightarrow$ " e " $\Leftrightarrow$ " (ovverossia, rispettivamente: "non", "o", "e", "implica" e "se e solo se").

Il significato dei connettivi è completamente racchiuso dalle "tavole di verità" qui appresso descritte.

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Si tratta di tabelle dal significato evidente: dalla seconda riga della terza tabella si evince, ad esempio, che la proposizione composta $p \wedge q$ è falsa quando la proposizione p è falsa e la proposizione q è vera. Più in generale, la terza tabella ci dice che la proposizione $p \wedge q$ è vera solo quando sono vere sia p che q .

La seconda tabella mostra che stiamo considerando "o" nel suo significato non esclusivo: infatti consideriamo vera la proposizione $p \vee q$ anche nel caso in cui sia p che q siano entrambe vere. Se fossimo interessati al significato esclusivo, ovverossia ad "aut", avremmo la tabella seguente:

⁴ La terminologia richiederebbe un certo aggiornamento...

p	q	p aut q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

come si può notare agevolmente, la tabella di "aut" è la tabella di " $\oplus$ " rovesciata. Possiamo quindi sostituire la proposizione $p \text{ aut } q$ con la equivalente $\neg(p \oplus q)$.

La tabella più interessante è quella di $\Rightarrow$ per la presenza della discutibile e inquietante terza riga. Perché mai deve essere vero che $p \Rightarrow q$ quando p è falsa e q è vera? Forse il modo più drastico per esporre queste perplessità è di effettuare il seguente ragionamento: "se da una premessa p falsa sono riuscito ad ottenere una conseguenza q vera, devo aver per forza sbagliato qualcosa nel mio ragionamento, per cui la deduzione è di sicuro falsa". In realtà l'argomentazione tra virgolette è completamente fuori tema: non stiamo parlando affatto di deduzione (o di dimostrazione, per usare un termine più consueto). A noi non interessa minimamente la presenza o meno di una qualche connessione tra le proposizioni p e q . Tanto per fare un esempio, p può essere "oggi piove" e q "questa rosa è rossa".

Il modo in cui il simbolo di implicazione è usato costantemente nella matematica è proprio quello corrispondente alla tabella di verità sopra riportata.

Per quanto elementare, la "logica delle proposizioni" permette già di fare tutta una serie di interessanti considerazioni.

Tanto per cominciare, vi sono una serie di "tautologie", ovverossia proposizioni sempre vere, indipendentemente dal fatto che le proposizioni componenti siano vere o false (e indipendentemente dai loro "contenuti!"). Ad esempio:

$p \vee (\neg p)$	"terzo escluso"
$\neg(p \wedge (\neg p))$	"principio di non contraddizione"
$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q))$	"leggi di De Morgan"
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$	
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$	l'equivalenza logica è logicamente equivalente alla doppia implicazione ("se e solo se")

Altre tautologie interessanti sono le seguenti: su di esse sono fondati dei metodi di dimostrazione frequentemente usati.

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$	è alla base della dimostrazione per
---	-------------------------------------

"contrapposta" o "contronominale", talvolta confusa con la dimostrazione per assurdo.

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge (\neg q)) \Rightarrow ((r \wedge (\neg r))))$ è la dimostrazione per assurdo: si nega la tesi e da questa si ricava una contraddizione.

Esempio 1 Verificare che $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge (\neg q)) \Rightarrow ((r \wedge (\neg r))))$ è una tautologia. $\square$

Dettaglio Basta costruire la "tavola di verità" di questa proposizione. Dato che sono coinvolte tre proposizioni "atomiche", p, q, r , vi saranno otto diverse possibili combinazioni dei loro valori di verità. Abbiamo quindi:

p	$\Rightarrow$	q	$\Leftrightarrow$	p	$\wedge$	$\neg$	q	$\Rightarrow$	r	$\wedge$	$\neg$	r
V	V	V	V	V	F	F	V	V	V	F	F	V
V	V	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	F	F	V	V	V	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F	V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V	F	V	F	F	V	F
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Le colonne sono state riempite nell'ordine seguente. Dapprima le colonne 1,3,5,8,10,13, corrispondenti alle proposizioni atomiche. Poi le colonne 7 e 12; poi le colonne 2,6,11. Infine la colonna 9 e, per ultima, la colonna 4. Come si vede la colonna 4 contiene solo V, il che significa che la proposizione composta risulta essere sempre vera, indipendentemente dal valore di verità delle proposizioni atomiche; è quindi una tautologia. $\square$

$(p \Leftrightarrow (q \vee r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow s) \Leftrightarrow ((q \Rightarrow s) \wedge (r \Rightarrow s)))$ è la dimostrazione per distinzione dei casi.

Esercizio 1 (obbligatorio) Provare che $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg(p \wedge (\neg q)))$. $\square$

Esercizio 2 C'è qualche legame tra il precedente esercizio e il fatto che in Turbo Pascal sono presenti solo i connettivi NOT, OR e AND per variabili booleane? $\square$

A un livello meno elevato di astrazione, vi è la logica dei predicati. Qui si entra un pò più nel merito delle proposizioni. Tipico esempio è la frase: "ogni uomo è mortale", equivalente a "nessun uomo è immortale". Che le due frasi siano tra di loro equivalenti spero sia accolto da tutti; non solo: le due frasi sono

"logicamente" equivalenti tra di loro. Infatti, il nocciolo sta nel fatto che asserire che ogni tizio goda di una certa proprietà, è equivalente ad asserire che nessun tizio non gode di tale proprietà. Ritroviamo insomma l'equivalenza tra "per ogni x è ..." e "non esiste x t.c. non ...". Tale equivalenza non è esprimibile a livello di logica delle proposizioni: anzi, le due proposizioni stesse sono ricavate l'una dall'altra attraverso delle manipolazioni per così dire interne.

Non posso dilungarmi troppo sulla logica dei predicati. Essa tipicamente si occupa di proposizioni del tipo " $\forall x Px$ " e " $\exists x Px$ ", dove con Px intendo esprimere il fatto che x goda della proprietà P .

A volte viene specificato l'"universo" da dove si prendono le x : " $\forall x \in U Px$ ". Esempi: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2n \geq n$. Qui l'universo è $\mathbb{N}$ e la proprietà di cui si parla a proposito di n è che $2n \geq n$. Poiché tale proprietà è vera per ogni x nell'universo considerato, la proposizione $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2n \geq n$ è vera. Sono poi anche diffuse notazioni sintetiche, quali " $\forall \varepsilon > 0 \quad P\varepsilon$ ". Questo può essere inteso così: " $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \quad P\varepsilon$ ". Cioè, l'universo nell'ambito del quale può variare ε viene specificato in modo non ultraortodosso (ovverossia, invece di specificare direttamente l'universo, esso viene individuato mediante una proprietà che lo individua).

Nell'ambito della logica dei predicati, mi limito ad indicare che sono valide le seguenti tautologie, che abbiamo già usato nel precedente paragrafo:

$$\neg(\forall x Px) \Leftrightarrow \exists x (\neg Px)$$

$$\neg(\exists x Px) \Leftrightarrow \forall x (\neg Px) .$$

Concludo segnalando un errore che è facile commettere: la frase $(\forall x Px \Rightarrow \exists x Px)$ non è una tautologia! Può infatti essere falsa; si pensi ad esempio alla seguente affermazione: "Se ogni marziano ha la pelle verde, allora c'è un marziano con la pelle verde". E' evidente dove sta l'inghippo: l'universo dove prendono valore le x può essere vuoto.

4. Bastano gli epsilon piccoli

In questo paragrafo darò spazio ad una osservazione interessante, in quanto esplicita un'idea che si ha in testa quando si introduce la definizione di limite. E cioè: bastano gli ε piccoli. Ma come rendere in modo preciso tale idea? Nella definizione di limite non c'è, anzi è coinvolto ogni numero reale positivo, anche se "molto grande" (infatti, si dice solo " $\forall \varepsilon > 0$ "). D'altronde ho messo tra virgolette l'espressione "molto grande", in quanto non è chiaro cosa significhi dire che un numero reale è piccolo o grande e tanto meno cosa significhi essere molto grande. In effetti, 10^{20} , che si potrebbe essere inclini a considerare molto grande, è piccolo rispetto a 10^{40} . E così via, naturalmente.

Nel linguaggio comune, "molto grande" o "molto piccolo" fa riferimento ad un certo contesto esplicitamente o implicitamente presente. Noi però nella definizione di limite non abbiamo un contesto di questo genere: l'unico contesto esplicito⁵ presente è quello dei numeri reali positivi, dove non ha senso l'idea di "molto piccolo".

Eppure un modo c'è per esprimere questa idea. Almeno la sua essenza. Consideriamo un numero fissato $\sigma > 0$, scelto da noi a piacere. Ebbene, se nella definizione di limite noi consideriamo solo gli $\varepsilon < \sigma$, non cambia nulla.

Cioè, dato $\sigma > 0$, dire che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ è equivalente a:

$$(*) \quad \forall \varepsilon' \in]0, \sigma[\quad \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon')$$

E si noti che σ lo possiamo scegliere noi, "piccolo" quanto ci fa comodo.

La dimostrazione di questo fatto è semplice. Che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ implichi (*) è ovvio (in (*) richiediamo che la proprietà che sappiamo essere vera $\forall \varepsilon > 0$ valga per gli $\varepsilon' \in]0, \sigma[$). Ma anche il viceversa è facile da ottenere: se ho tra le mani un $\varepsilon \geq \sigma$ e voglio provare che

$$(\blacktriangleright) \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon)$$

scelgo $\varepsilon' = \sigma/2$ in (*) ed ottengo

$$\exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon')$$

ma è $|a_n - \ell| < \varepsilon' = \sigma/2 < \sigma \leq \varepsilon$, quindi posso affermare ($\blacktriangleright$).

Abbiamo così provato che possiamo limitare la scelta degli ε a quelli minori di un σ scelto da noi a piacere (purché positivo): questo è il modo che abbiamo per esprimere in termini precisi l'intuizione che gli unici ε che con-

⁵ E contesti impliciti non ce ne devono essere in matematica.

tano nella definizione di limite sono quelli piccoli.

Già che siamo in argomento, osserviamo che sono equivalenti le seguenti affermazioni:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq \nu \Rightarrow |a_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

Esercizio 1 Provare la precedente affermazione. $\square$

Quindi le disuguaglianze le possiamo mettere strette o larghe, fa lo stesso. Ma non quella che riguarda ε : non possiamo sostituire $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon \geq 0$.

Esercizio 2 Provare che solo le successioni costanti da un certo indice in poi sono convergenti secondo la definizione seguente:

$$\forall \varepsilon \geq 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon) . \square$$

5. Le successioni convergenti sono limitate

In questo paragrafo vedremo di ottenere una conseguenza molto facile della convergenza di una successione.

Teorema 1 Una successione convergente è limitata. $\square$

Dimostrazione Data una successione a , ricordiamo che essa è limitata se la sua immagine è limitata, cioè se $a(\mathbb{N})$ è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$. Cioè se esistono $H, K \in \mathbb{R}$ t.c. $H \leq a_n \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Osserviamo che questa proprietà può essere descritta graficamente: significa che il grafico della successione è contenuto nella striscia di piano compresa tra le rette di equazione $y=H$ ed $y=K$. Questa terminologia dovrebbe far venire in mente, per le notevoli analogie, l'interpretazione grafica di cosa sia una successione convergente: invito il lettore a ricordarla prima di continuare (vedi paragrafo 1).

Dunque, se la successione converge ad ℓ , i punti del grafico di a stanno nella striscia individuata da $y=\ell-\varepsilon$ ed $y=\ell+\varepsilon$, per lo meno a partire da un certo indice ν .

Ci siamo quasi. Resta solo da risolvere un piccolo problema. E' che solo dall'indice ν in poi i termini della successione soddisfano $\ell-\varepsilon < a_n < \ell+\varepsilon$. D'altronde i termini fino a ν sono in numero finito. Cioè, l'insieme $\{a_1, \dots, a_\nu\}$ è finito (ha un numero di elementi minore o uguale a ν): allora avrà minimo e massimo che possiamo chiamare H_1 e K_1 . Abbiamo quindi:

$$a_n \in [H_1, K_1] \quad \text{per } n \in \{1, \dots, \nu\}$$

$$a_n \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[\quad \text{per } n > \nu.$$

Basta prendere $H = \min \{H_1, \ell-\varepsilon\}$ e $K = \max \{K_1, \ell+\varepsilon\}$ per ottenere il risultato desiderato. $\square$

6. Sottosuccessioni

Se uno considera la successione già usata più volte, così definita: $a_n = \begin{cases} 1 & \text{per } n \text{ pari} \\ 1/n & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$, può agevolmente notare un fatto. E cioè che, se considerassimo solo i termini di indice pari, avremmo una successione costante e quindi convergente. Abbiamo quindi che, per così dire, "dentro" la successione data è "nascosta" una successione convergente. Questa semplice osservazione ci porterà

molto lontano, ad uno dei risultati fondamentali di questo capitolo, che proveremo nel § 12.

Il mio obiettivo, per ora, è molto meno ambizioso. Si tratta di riuscire a capire per bene che cosa intendiamo dicendo che "dentro" ad una successione ce n'è "nascosta" un'altra; ovverossia, dobbiamo capire che cosa vuol dire "sottosuccessione", che è il termine specialistico usato per indicare una successione "nascosta" dentro un'altra. Cos'è una sottosuccessione? E' quello che ci resta se togliamo via un certo numero di indici, magari anche infiniti indici, avendo però cura che ne restino sempre infiniti: tanto per fare un esempio, se buttiamo via tutti gli indici dopo 37, quello che ci resta è troppo poco. Infatti, quello che vogliamo ci rimanga è qualcosa che sia ancora interpretabile come una successione.

Ricordo che una successione a è una applicazione $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, e pertanto quanto detto sopra equivale a considerare una restrizione della funzione a ad un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$. Nell'esempio da cui sono partito, vorrebbe dire restringere a all'insieme dei numeri pari. Questa è l'idea di sottosuccessione.

E' però più conveniente vederla in altro modo, per ragioni per così dire tecniche. Cioè definiremo una sottosuccessione come una composizione di funzioni, privilegiando l'altra idea di carattere intuitivo che sta dietro alla definizione di sottosuccessione, e cioè che si estraggano dei numeri naturali successivi e si considerino i termini ad essi corrispondenti. Ovvero, sempre nel solito esempio, dato n , "estraiamo" $2n$ e consideriamo il termine a_{2n} . Introduciamo pertanto una applicazione crescente $k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ e consideriamo la funzione composta $a \circ k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Questa nuova funzione ottenuta è, come si vede, una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ e pertanto è una successione anch'essa: la chiameremo sottosuccessione estratta da a mediante la regola di estrazione k (se non ci sono rischi di confusione, diremo semplicemente che è una sottosuccessione di a).

A livello elementare, il risultato più interessante che possiamo ottenere è il seguente.

Teorema 1 $(a_n \longrightarrow \ell) \Rightarrow (a_{k_n} \longrightarrow \ell) . \square$

Per dimostrare questo teorema ci serve il seguente

Lemma 1 Sia $k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescente. Allora è $k(n) \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Dimostrazione Per induzione.

(BASE) La tesi è vera per $n=1$, in quanto $k(1) \in \mathbb{N}$ e ogni numero naturale è maggiore o uguale di 1.

(PASSO INDUTTIVO) Sia $n \in \mathbb{N}$: proviamo che $k(n) \geq n \Rightarrow k(n+1) \geq n+1$. Per ipotesi sappiamo che $k(n+1) > k(n)$, ma poiché siamo in $\mathbb{N}$, ciò significa che $k(n+1) \geq k(n)+1$. Pertanto $k(n) \geq n \Rightarrow k(n+1) \geq k(n)+1 \geq n+1$. $\square$

Dimostrazione (del teorema) Indicando con b la successione $a \circ k$, dobbiamo dimostrare che:

$$\forall \sigma > 0 \quad \exists \mu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (m > \mu \Rightarrow |b_m - \ell| < \sigma).$$

Ovverossia, ricordando che $b_m = b(m) = (a \circ k)(m) = a(k(m)) = a_{k(m)} = a_{k_m}$, che:

$$(\blacktriangleright) \quad \forall \sigma > 0 \quad \exists \mu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (m > \mu \Rightarrow |a_{k_m} - \ell| < \sigma).$$

Noi sappiamo che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon).$$

Sia dunque $\sigma > 0$. Fissiamo $\varepsilon = \sigma$. Allora abbiamo che

$$(*) \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \sigma).$$

Scegliamo $\mu = \nu$, dove ν è un numero naturale tra quelli la cui esistenza è garantita da (*). Otteniamo che

$$(**) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \mu \Rightarrow |a_n - \ell| < \sigma).$$

Osserviamo poi che, se $m > \mu$, allora $k(m) > \mu$ (in quanto $k(m) \geq m$ per il lemma), cioè $k_m > \mu$. E quindi, grazie a (**), possiamo dire che

$$(***) \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (m > \mu \Rightarrow |a_{k_m} - \ell| < \sigma).$$

E con ciò abbiamo ottenuto quanto volevamo. Infatti abbiamo visto che, dato $\sigma > 0$, abbiamo trovato $\mu \in \mathbb{N}$ t.c. valga (***), il che è appunto quel che si voleva dimostrare, cioè la validità di $(\blacktriangleright)$. $\square$

Esercizio 1 Si considerino le successioni i cui primi elementi sono:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1/5, \quad a_3 = 2/5, \quad a_4 = 3/5, \quad a_5 = 4/5, \quad a_6 = 1, \quad a_7 = 0, \quad a_8 = 1/5, \quad \dots$$

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = 1, \quad \dots$$

Questi primi elementi suggeriscono che vi siano semplici espressioni "compatte" per indicare a_n e b_n per ogni $n \in \mathbb{N}$. Trovarle.

La successione $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una sottosuccessione estratta da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Trovare la "regola di estrazione" $k: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ t.c. $b = a \circ k$.

La regola di estrazione non è univocamente determinata. Trovarne un'altra $k': \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ diversa dalla k trovata prima. $\square$

7. Limiti infiniti

Abbiamo visto cosa vuol dire che una successione è convergente. Ci sono però anche altri "comportamenti di limite" che è interessante codificare. L'idea sottostante è che i termini di una successione tendano a diventare sempre più grandi. Cioè i termini a_n della successione superano ogni numero reale prefissato, pur di considerare indici n sufficientemente grandi. In tal caso diremo che la successione a tende a $+\infty$. Senza troppi giri di parole, vediamo subito la definizione.

Definizione 1 Sia data una successione a . Diciamo che si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow a_n > \varepsilon) . \square$$

Come già nel caso di successioni convergenti, useremo anche la notazione $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ o anche solo $a_n \longrightarrow +\infty$. Ovviamente possiamo modificare la definizione per adattarla al caso in cui i termini della successione "scendano sotto" ad ogni numero reale prefissato.

Definizione 2 Data una successione a , diciamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow a_n < -\varepsilon) . \square$$

Un'altra condizione interessante è la seguente:

Definizione 3 Data una successione a , diciamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |a_n| > \varepsilon) . \square$$

E' subito evidente, però, che la condizione espressa dalla definizione 3 è meno interessante delle precedenti. In effetti, si può facilmente provare che $a_n \longrightarrow \infty \Leftrightarrow |a_n| \longrightarrow +\infty$ (dove con $|a_n|$ intendiamo che stiamo considerando la successione il cui termine generale è, appunto, $|a_n|$). Per sottolineare ulteriormente questa condizione di inferiorità, a volte viene riservato il termine "regolare" alle successioni che sono convergenti o tendono a $+\infty$ oppure a $-\infty$. Non è insensata, questa discriminazione. In effetti, il teorema di unicità del limite può essere esteso dalle successioni convergenti alle successioni regolari, ma non a quelle che tendono a ∞ . La ragione è ovvia: se abbiamo $a_n \longrightarrow \infty$, non possiamo escludere che sia $a_n \longrightarrow +\infty$ oppure $a_n \longrightarrow -\infty$ (anche se non possiamo garantire che valga almeno una delle due condizioni: $a_n = (-1)^n \cdot n$ tende ad ∞ senza tendere né a $+\infty$ né a $-\infty$).

Teorema 1 (di unicità del limite in generale) Siano $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, con $\ell \neq \ell'$. Allora si può verificare al più una delle condizioni seguenti:

$$a_n \longrightarrow \ell \qquad a_n \longrightarrow \ell' \qquad a_n \longrightarrow +\infty \qquad a_n \longrightarrow -\infty \quad .\square$$

Dimostrazione Supponiamo $a_n \longrightarrow \ell$. Ovviamente, per il teorema 2.1 non può essere $a_n \longrightarrow \ell'$. D'altro canto, se $a_n \longrightarrow \ell$, a è limitata e quindi è evidente (lo provi il lettore!) che non può soddisfare né la condizione $a_n \longrightarrow +\infty$ né la condizione $a_n \longrightarrow -\infty$. Lascio al lettore la cura di completare la dimostrazione. $\square$

8. I limiti e le operazioni in $\mathbb{R}$

Questo paragrafo e il successivo sviluppano un tema molto importante e ricorrente, che cercherò di illustrare. Si tratta della "compatibilità" della definizione di limite rispetto alle operazioni (e, nel successivo paragrafo, la relazione d'ordine) che sono definite su $\mathbb{R}$.

Per spiegare cosa intendo, comincerò con un problema preciso. Supponiamo di avere due successioni, a e b . A partire da queste, possiamo costruire una terza successione usando l'operazione di somma. Cioè possiamo definire $c: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ così: $c_n = a_n + b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Supponiamo per un momento che tutte queste tre successioni abbiano limite: $a_n \longrightarrow \alpha$, $b_n \longrightarrow \beta$ e $c_n \longrightarrow \gamma$. Ci si può aspettare ragionevolmente che $\gamma = \alpha + \beta$. D'altronde, basta fare un po' di esempi per farsi venire questa opinione, se uno non l'avesse⁶.

E' importante naturalmente enunciare precisamente tale risultato, nonché dimostrarlo. Ma rinvio a dopo tale compito. Preferisco mettere in rilievo l'importanza di questo risultato.

Un primo punto di vista lo presenta come risultato utile: ci dà informazioni dirette sul limite di una successione a partire dal limite delle due successioni "addende". Detto così forse non risulta chiara l'utilità, però messo assieme ai risultati analoghi relativi al prodotto permette di sapere rapidamente quanto fa il limite di una successione anche "complicata", senza richiedere di ricorrere alla definizione e ai conti laboriosi che essa richiede.

Un altro punto di vista è quello ricorrente della compatibilità tra le strutture già presenti su $\mathbb{R}$ e questa nuova che è la struttura di tipo analitico, cioè di limite, che abbiamo introdotto. E' l'ennesima versione di un leitmotiv già evidenziato e che ricorrerà spesso. Il fatto di avere diverse strutture su un insieme diventa interessante solo nella misura in cui vi è una certa compatibilità tra di loro.

Infine, da un punto di vista "grafico-astratto", possiamo esprimere tale risultato come commutatività di un diagramma:

⁶ Va da sé che questa è una strategia del tutto generale: se non si ha idea di come vanno le cose, si cerca di farsela con qualche esempio.

$$\begin{array}{ccc}
 a_n, b_n & \xrightarrow{\text{LIM}} & \alpha, \beta \\
 \downarrow \text{SOMMA} & & \downarrow \text{SOMMA} \\
 a_n + b_n & \xrightarrow{\text{LIM}} & \alpha + \beta
 \end{array}$$

cioè per andare dall'angolo in alto a sinistra all'angolo in basso a destra abbiamo due strade equivalenti. Va da sé che è comodo sapere di poter scegliere tra due strade: si potrà usare la più comoda di volta in volta. In realtà, questo terzo punto di vista è in un certo senso la riproposizione del primo: entrambi si ricollegano ad un'idea di comodità, od economicità (di pensiero?) che dir si voglia.

Terminato lo "sproloquio" di carattere generale, passiamo ad enunciare il risultato preciso.

Teorema 1 Siano a, b due successioni, convergenti rispettivamente ad α, β . Allora la successione di termine generale $a_n + b_n$ è convergente e converge ad $\alpha + \beta$ □

Dimostrazione Abbiamo che:

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \nu' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n' \in \mathbb{N} \quad (n' > \nu' \Rightarrow |a_{n'} - \alpha| < \varepsilon')$$

$$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \nu'' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n'' \in \mathbb{N} \quad (n'' > \nu'' \Rightarrow |b_{n''} - \beta| < \varepsilon'')$$

vogliamo dimostrare che:

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon)$$

Sia dunque dato un numero reale positivo ε .

Scegliamo $\varepsilon' = \varepsilon/2$. Allora:

$$\exists \nu' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \underbrace{\forall n' \in \mathbb{N} \quad (n' > \nu' \Rightarrow |a_{n'} - \alpha| < \varepsilon/2)}_{(\cdot \cdot)}$$

Scegliamo $\varepsilon'' = \varepsilon/2$. Allora:

$$\exists \nu'' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \underbrace{\forall n'' \in \mathbb{N} \quad (n'' > \nu'' \Rightarrow |b_{n''} - \beta| < \varepsilon/2)}_{(\cdot \cdot \cdot)}$$

Scegliamo un ν' ed un ν'' soddisfacenti rispettivamente le condizioni $(\cdot \cdot)$ e $(\cdot \cdot \cdot)$. Consideriamo $\nu = \max \{\nu', \nu''\}$. Allora, se $n > \nu$, è anche $n > \nu'$ ed $n > \nu''$, pertanto:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left[n > \nu \Rightarrow \begin{cases} |a_n - \alpha| < \varepsilon/2 \\ |b_n - \beta| < \varepsilon/2 \end{cases} \right].$$

Ma da $\begin{cases} |a_n - \alpha| < \varepsilon/2 \\ |b_n - \beta| < \varepsilon/2 \end{cases}$ otteniamo, sommando membro a membro:

$|a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \varepsilon$. D'altronde:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &= && \text{riscrivendo in modo diverso} \\ = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| &\leq && \text{per la disuguaglianza triangolare} \\ \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| &< && \text{per quanto abbiamo appena visto} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Abbiamo pertanto ottenuto che, dato $\varepsilon > 0$, possiamo trovare $\nu \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni $n > \nu$ si ha $|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$. Abbiamo cioè provato (*). $\square$

Esercizio 1 Dimostrare che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ implica $\lim_{n \rightarrow \infty} -a_n = -\alpha$. $\square$

La "compatibilità" tra limite ed operazioni si ha anche con la moltiplicazione.

Teorema 2 Siano a, b due successioni, convergenti rispettivamente ad α, β . Allora la successione di termine generale $a_n \cdot b_n$ è convergente e converge ad $\alpha \cdot \beta$. $\square$

Dimostrazione Abbiamo che:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \nu' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n' \in \mathbb{N} \quad (n' > \nu' \Rightarrow |a_{n'} - \alpha| < \varepsilon') \\ \forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \nu'' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n'' \in \mathbb{N} \quad (n'' > \nu'' \Rightarrow |b_{n''} - \beta| < \varepsilon'') \end{aligned}$$

vogliamo dimostrare che:

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |(a_n \cdot b_n) - (\alpha \cdot \beta)| < \varepsilon)$$

La chiave di tutto sta nella disequazione

$$(**) \quad |(a_n \cdot b_n) - (\alpha \cdot \beta)| < \varepsilon$$

Nel caso della somma, la maggiorazione $|(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta|$ era talmente ovvia che non mi è parso il caso di spendere parole di troppo. Nel caso del prodotto, può non essere ovvia la strada da seguire. Procediamo così: aggiun-
giamo e togliamo $a_n \cdot \beta$. Otteniamo $|a_n \cdot b_n - a_n \cdot \beta + a_n \cdot \beta - \alpha \cdot \beta|$. Usiamo il "raccolli-
mento a fattore comune" e vediamo così apparire i "pezzi" che ci interessano: $|a_n \cdot (b_n - \beta) + \beta \cdot (a_n - \alpha)|$. Naturalmente useremo la disuguaglianza triangolare, per cui cercheremo di avere $|a_n \cdot (b_n - \beta)| + |\beta \cdot (a_n - \alpha)| < \varepsilon$. A tale scopo sarà sufficiente⁷ avere $|a_n| \cdot |b_n - \beta| < \varepsilon/2$ e $|\beta| \cdot |a_n - \alpha| < \varepsilon/2$. Per avere la seconda disuguaglianza ci occorre $|a_n - \alpha| < (\varepsilon/2 \cdot |\beta|)$. Per la prima, ricordiamo che a è convergente e

⁷ Mi auguro che chi legge si sia accorto che sto seguendo una linea di ragionamento simile a quella che ha concluso la dimostrazione del teorema 1.

quindi c'è A t.c. $|a_n| \leq A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, pertanto $|a_n| \cdot |b_n - \beta| \leq A \cdot |b_n - \beta|$ e quindi ci basterà $|b_n - \beta| < (\varepsilon/2 \cdot A)$.

Questi sono i pezzi principali, nuovi, che ci occorrono per provare il teorema: il resto consiste in una replica del teorema riguardante la somma. Vediamo comunque tutta la dimostrazione, dall'inizio alla fine.

Abbiamo che:

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \nu' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n' \in \mathbb{N} \quad (n' > \nu' \Rightarrow |a_{n'} - \alpha| < \varepsilon')$$

$$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \nu'' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n'' \in \mathbb{N} \quad (n'' > \nu'' \Rightarrow |b_{n''} - \beta| < \varepsilon'')$$

vogliamo dimostrare che:

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |(a_n \cdot b_n) - (\alpha \cdot \beta)| < \varepsilon)$$

Per quanto riguarda la relazione coinvolgente ε' , sia $B = \max \{|\beta|, 1\}$: questo piccolo trucco ci serve per avere che $B > 0$ e quindi poter dividere per B . Scegliamo $\varepsilon' = (\varepsilon/2 \cdot B)$. Abbiamo allora:

$$\exists \nu' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n' \in \mathbb{N} \quad (n' > \nu' \Rightarrow |a_{n'} - \alpha| < (\varepsilon/2 \cdot B))$$

e quindi possiamo affermare (si riguardino le considerazioni informali fatte prima) che:

$$(\blacktriangleright) \quad \exists \nu' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n' \in \mathbb{N} \quad (n' > \nu' \Rightarrow |\beta| \cdot |a_{n'} - \alpha| < \varepsilon/2)$$

Passiamo ora alla relazione riguardante ε'' . Osserviamo preliminarmente che, essendo la successione a convergente, $\exists C \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq C$. E quindi anche $|a_n| \geq A$, se scegliamo $A = \max \{C, 1\}$: anche in questo caso facciamo così per garantire che $A > 0$. Pertanto, scelto $\varepsilon'' = (\varepsilon/2 \cdot A)$, abbiamo che:

$$\exists \nu'' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n'' \in \mathbb{N} \quad (n'' > \nu'' \Rightarrow |b_{n''} - \beta| < (\varepsilon/2 \cdot A))$$

e quindi, per le considerazioni informali fatte in precedenza:

$$(\blacktriangleright\blacktriangleright) \quad \exists \nu'' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n'' \in \mathbb{N} \quad (n'' > \nu'' \Rightarrow |a_{n''}| \cdot |b_{n''} - \beta| < \varepsilon/2)$$

Scelto $\nu = \max \{\nu', \nu''\}$ (dove ν' e ν'' sono due numeri naturali che soddisfano le condizioni $(\blacktriangleright)$ e $(\blacktriangleright\blacktriangleright)$), abbiamo:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left[n > \nu \Rightarrow \begin{cases} |\beta| \cdot |a_n - \alpha| < \varepsilon/2 \\ |a_n| \cdot |b_n - \beta| < \varepsilon/2 \end{cases} \right].$$

Sommando membro a membro abbiamo:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left[n > \nu \Rightarrow |a_n \cdot (b_n - \beta)| + |\beta \cdot (a_n - \alpha)| < \varepsilon \right].$$

Abbiamo pertanto, dalla disuguaglianza triangolare:

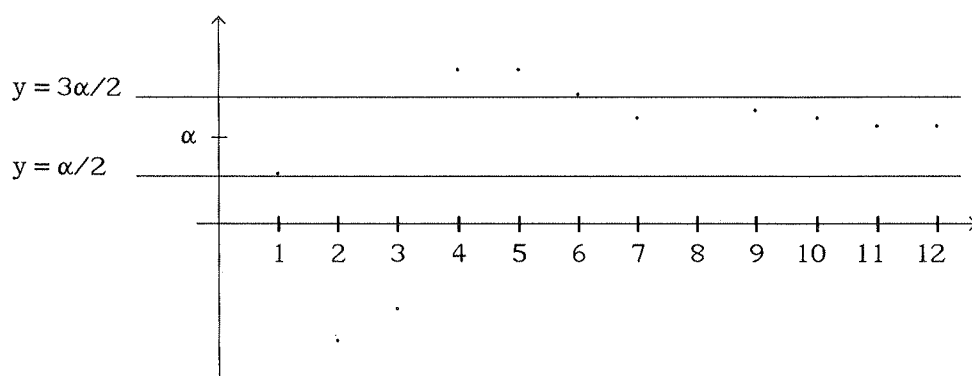
$$\forall n \in \mathbb{N} \left(n > \nu \Rightarrow |a_n \cdot (b_n - \beta) + \beta \cdot (a_n - \alpha)| < \varepsilon \right).$$

Possiamo quindi affermare che, dato $\varepsilon > 0$, $\exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $|(a_n \cdot b_n) - (\alpha \cdot \beta)| < \varepsilon$. $\square$

In un esercizio precedente si chiedeva di provare che $a_n \longrightarrow \alpha \Rightarrow -a_n \longrightarrow -\alpha$. Cosa si può dire per il reciproco? Cioè, se $a_n \longrightarrow \alpha$, possiamo dire che $1/a_n \longrightarrow 1/\alpha$? Si vede subito che c'è un problema, perché se $\alpha = 0$, allora $1/\alpha$ non ha senso. Siamo quindi obbligati ad escludere questo caso (anche se poi troveremo qualcosa da dire lo stesso: vedi § 10). Si potrebbe quindi pensare di enunciare il seguente:

"Teorema" Sia a successione convergente e sia $\alpha \in \mathbb{R}$ il suo limite. Se $\alpha \neq 0$, allora $1/a_n \longrightarrow 1/\alpha$. $\square$

In realtà, l'enunciato di questo "teorema" solleva un problema. Chi ci garantisce che $a_n \neq 0$ e quindi che abbia senso fare $1/a_n$? Possiamo fare delle semplici considerazioni di carattere grafico:



Basta prendere una striscia di ampiezza $\varepsilon = |\alpha|/2$! E allora da un certo ν in poi (n, a_n) è obbligato a stare dentro la striscia e quindi non può certo essere $a_n = 0$, proprio per come abbiamo scelto ε . Non possiamo però garantire che tutti i termini siano diversi da zero: solo ad un certo indice in poi.

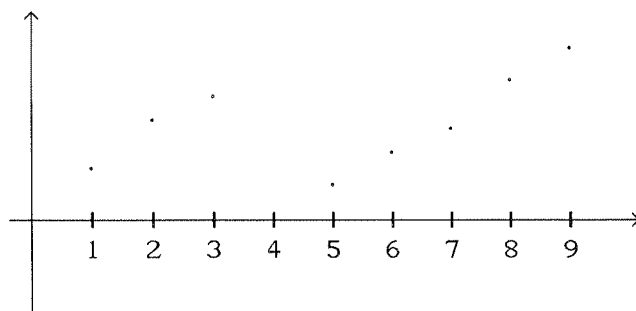
E allora?

Non possiamo far finta di niente. In matematica non si può nascondere la polvere sotto il tappeto. Occorre trovare una soluzione. La più semplice potrebbe essere quella di abbandonare il "teorema". Ma un tale risultato è troppo prezioso per lasciarlo cadere così. Potremmo cercare di trovare una buona idea per conservarlo, per riuscire cioè a dimostrarne una qualche utile (e vera!) versione.

C'è un modo molto drastico di procedere, ed è il seguente: ricominciare tutto

daccapo⁸. Addirittura dalla definizione stessa di successione. Perché? Perché nello svolgersi delle considerazioni è emerso che in fondo ci interessa poco cosa fanno i primi termini di una successione, per tutto quel che riguarda i limiti (ma non, per esempio, per trovare $\max a(n)$). Potremmo allora provare ad "allargare" la definizione di successione: richiedere che sia una applicazione definita su $\mathbb{N} \setminus F$, dove F è un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$.

Questo è l'approccio giusto. Ma offre delle difficoltà nuove. Per esempio, se ho una successione definita su $\mathbb{N} \setminus F'$ ed un'altra definita su $\mathbb{N} \setminus F''$, la loro somma sarebbe definita su $\mathbb{N} \setminus F$, dove $F = F' \cup F''$. Per dire che una successione è crescente, non v'è più bene dire che $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, e neanche $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus F$, come mostra l'esempio qui sotto (con $F = \{4\}$), ma occorre richiedere che $\forall n, m \in \mathbb{N} \setminus F \quad (n < m \Rightarrow a_n < a_m)$. E così via.



Quindi non adotterò questo punto di vista, ma continuerò a considerare una successione come una applicazione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$. Nel caso di $1/a_n$ (o in altri casi in cui si pongano problemi simili), definirò arbitrariamente $1/a_n = 0$ per $n \in F$. Naturalmente questo sarà lecito solo se questa operazione di maquillage non creerà problemi rispetto al contesto cui siamo interessati.

⁸ E' una delle cose che sono avvenute più di frequente nella storia della matematica (l'esempio più noto è quello delle geometrie non euclidee) e che capitano spesso nella ricerca matematica.

9. I limiti e la relazione d'ordine su $\mathbb{R}$

Il teorema più importante tra quelli di carattere elementare che riguardano la relazione tra limiti e $\leq$ è il teorema di permanenza del segno.

Teorema 1 (di permanenza del segno) Sia $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, convergente ad $\alpha > 0$ (rispettivamente $\alpha < 0$). Allora $\exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n > \nu$ è $a_n > 0$ (rispettivamente $a_n < 0$). $\square$

Dimostrazione E' una conseguenza diretta della definizione di limite. Abbiamo infatti:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon)$$

se scegliamo $\varepsilon = \alpha/2$, abbiamo che:

$$\exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |a_n - \alpha| < \alpha/2)$$

ma $|a_n - \alpha| < \alpha/2 \Leftrightarrow -(\alpha/2) < a_n - \alpha < \alpha/2 \Leftrightarrow \alpha/2 < a_n < (3\alpha/2) \Rightarrow a_n > \alpha/2 > 0$. Quindi abbiamo ottenuto quello che volevamo. $\square$

Corollario 1 Sia $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, con $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che $a_n \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$. Allora $\alpha \geq 0$. $\square$

Dimostrazione E' una conseguenza del risultato precedente. Dimostro la contronominale. Supponiamo $\alpha < 0$. Allora per il teorema di permanenza del segno si ha che $\exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n > \nu \quad a_n < 0$. Questo è ovviamente in contraddizione con l'ipotesi. $\square$

Corollario 2 Sia $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo $\exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n > \nu \quad a_n \geq 0$. Se $a_n \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$, è $\alpha \geq 0$. $\square$

Dimostrazione In realtà, dimostrando il corollario 1, abbiamo dimostrato il corollario 2. $\square$

Ulteriore risultato che esprime il legame tra $\leq$ e limiti è il teorema seguente.

Teorema 2 (del confronto, o dei due carabinieri) Siano date tre successioni a, b, c e supponiamo che sia $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Se $a_n \rightarrow \ell$ e $c_n \rightarrow \ell$, allora $b_n \rightarrow \ell$. $\square$

Dimostrazione Basta scrivere la definizione di limite. Abbiamo:

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \nu' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n' \in \mathbb{N} \quad (n' > \nu' \Rightarrow |a_{n'} - \ell| < \varepsilon')$$

$$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \nu'' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n'' \in \mathbb{N} \quad (n'' > \nu'' \Rightarrow |c_{n''} - \ell| < \varepsilon'')$$

e da qui vogliamo ottenere:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |b_n - \ell| < \varepsilon) .$$

Sia quindi dato, come al solito, $\varepsilon > 0$. Prendiamo $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon$. E consideriamo $\nu = \max \{ \nu', \nu'' \}$. Per $n > \nu$ abbiamo a disposizione: $|a_n - \ell| < \varepsilon$ e $|c_n - \ell| < \varepsilon$. Cioè:

$$\begin{cases} \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \\ \ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon \end{cases} . \quad \text{Ovverossia,} \quad a_n \quad \text{e} \quad c_n \quad \text{appartengono all'intervallo}$$

$] \ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon [$. Ma allora anche b_n ci sta. $\square$

10. Miscellanea di risultati sui limiti di successioni

Proverò un paio di risultati che riguardano la relazione tra limiti e la struttura di $\mathbb{R}$, ma che non si collocano bene nello schema nitido dei due precedenti paragrafi. Sono anche dei risultati che richiedono uno sguardo più da vicino su quella che è la definizione di limite.

Teorema 1 Siano $a, b: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ due successioni. Supponiamo che $a_n \longrightarrow +\infty$ e che b sia inferiormente limitata. Allora $a_n + b_n \longrightarrow +\infty$. $\square$

Dimostrazione Sappiamo che:

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow a_n > \varepsilon)$$

$$\exists H \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad b_m \geq H$$

Naturalmente possiamo supporre che $H \leq 0$.

Dobbiamo dimostrare che:

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \nu' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n' \in \mathbb{N} \quad (n' > \nu' \Rightarrow a_{n'} + b_{n'} > \varepsilon')$$

L'idea è ovvia: dato ε' , prendiamo $\varepsilon = \varepsilon' - H$ (osserviamo che, avendo preso $H \leq 0$, è garantito che $\varepsilon > 0$). Ovviamente si prende $\nu' = \nu$ (più precisamente si dovrebbe dire che si sceglie come ν' uno degli indici ν la cui esistenza è garantita da (*)). E il gioco è fatto. $\square$

Corollario 1 $a_n \longrightarrow +\infty$ e $b_n \longrightarrow \ell \Rightarrow a_n + b_n \longrightarrow +\infty$. $\square$

Per introdurre il prossimo risultato dobbiamo introdurre prima una definizione. E' quella di limite " ℓ^+ " o " ℓ^- ".

Definizione 1 Data $a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ e dato $\ell \in \mathbb{R}$, diciamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell^+$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow \ell \leq a_n < \ell + \varepsilon) \quad .\square$$

Cosa vuol dire che $a_n \longrightarrow \ell^+$? Vuol dire due cose:

- 1) $a_n \longrightarrow \ell$
- 2) $a_n \geq \ell$ tranne che per un numero finito di indici.

Quindi dire che $a_n \longrightarrow \ell^+$ ci dà qualche informazione in più rispetto a sapere che $a_n \longrightarrow \ell$. Cioè ci dice che i termini della successione si avvicinano a ℓ "da destra" o, facendo riferimento al grafico, che la striscia compresa tra le rette $y = \ell - \varepsilon$ e $y = \ell$ contiene al più solo un numero finito di termini. Si noti, comunque, che $a_n \longrightarrow \ell^+$ non implica che a_n sia anche debolmente decrescente: l'esempio fatto nel primo paragrafo della pallina che viene fotografata

mentre rimbalza è un esempio di successione che tende a 0^+ senza essere decrescente.

Esercizio 1 Dare la definizione di $a_n \longrightarrow \ell^-$. $\square$

Teorema 2 Sia $a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $a_n \longrightarrow 0^+$, con $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Allora $(1/a_n) \longrightarrow +\infty$. $\square$

Dimostrazione L'idea della dimostrazione è questa: la relazione $0 < a_n < \varepsilon$ è equivalente a $(1/a_n) > (1/\varepsilon)$. Invito il lettore a provare a fare da solo la dimostrazione, prima di guardare le righe seguenti.

Dobbiamo passare da

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow 0 \leq a_n < 0 + \varepsilon)$$

a:

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \nu' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n' \in \mathbb{N} \quad (n' > \nu' \Rightarrow (1/a_{n'}) > \varepsilon)$$

Pertanto, dato $\varepsilon' > 0$, basta prendere $\varepsilon = 1/\varepsilon'$ in (*): si ottiene (almeno) un ν t.c.:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow 0 \leq a_n < 0 + \varepsilon),$$

ma per ipotesi è $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, quindi in realtà abbiamo:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow 0 < a_n < 0 + \varepsilon).$$

E quindi scegliamo $\nu' = \nu$. E abbiamo il risultato desiderato, utilizzando l'osservazione iniziale. $\square$

Esercizio 2 Dimostrare che $a_n \longrightarrow \ell^+ \Rightarrow -a_n \longrightarrow -\ell^-$. $\square$

Esercizio 3 Dimostrare che, se $a_n \longrightarrow 0$ ed $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, allora $(1/a_n) \longrightarrow \infty$. $\square$

Esercizio 4 Dimostrare che, se $a_n \longrightarrow \infty$, allora $(1/a_n) \longrightarrow 0$. $\square$

Esercizio 5 Dimostrare che, se $a_n \longrightarrow +\infty$ e $b_n \longrightarrow +\infty$, allora $a_n + b_n \longrightarrow +\infty$. $\square$

11. Forme indeterminate

Abbiamo visto che, se $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, da $a_n \longrightarrow 0^+$ possiamo dedurre che $(1/a_n) \longrightarrow +\infty$. Questo risultato molto spesso viene sintetizzato con l'espressione $1/0^+ = +\infty$. Quindi tale espressione è come una sorta di resoconto "steno-grafico" dell'enunciato del teorema o, meglio, è un artificio mnemonico per ricordarsi tale teorema. Lo stesso dicasi della scrittura $1/0 = \infty$. Si usa anche dire che "uno fratto zero più fa più infinito". Queste espressioni possono però essere fonte di pericolosi malintesi. Scrivendo $1/0 = \infty$, non si intende dire che il reciproco di 0 c'è ed è ∞ . Non può essere così, per la semplice ragione che 0 non ha reciproco. Oltretutto, " ∞ " non è un simbolo che indica un numero reale. Quindi scrivendo $1/0 = \infty$, non si intende fare dei conti con dei numeri reali ma, ripeto, solo sintetizzare molto rapidamente il contenuto di un teorema. Lo stesso significato hanno scritture come $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$, oppure $\ell(+\infty) = +\infty$, etc.

Si usa dire, invece, che ad esempio $(+\infty)+(-\infty)$ è una "forma indeterminata" (più comunemente si usa la notazione $\infty-\infty$, in questo caso). Cosa vuol dire? Significa che, se sappiamo solo che $a_n \longrightarrow +\infty$ e $b_n \longrightarrow -\infty$, il comportamento di limite della somma non è determinato. Può addirittura non avere limite.

Esempio 1 $a_n = n$ e $b_n = -n$: $a_n + b_n = 0 \longrightarrow 0$
 $a'_n = 2n$ e $b'_n = -n$: $a'_n + b'_n = n \longrightarrow +\infty$
 $a''_n = n$ e $b''_n = -2n$: $a''_n + b''_n = -n \longrightarrow -\infty$
 $\hat{a}_n = n + (-1)^n$ e $\hat{b}_n = -n$: $\hat{a}_n + \hat{b}_n = (-1)^n$ non ha limite. $\square$

Sono forme indeterminate, oltre a $\infty-\infty$, anche $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞ e 1^∞ . In realtà, quando scrivo $\infty-\infty$, intendo usare una scrittura abbreviata per riferirmi a vari casi possibili: $(+\infty)-(+\infty)$ come in precedenza, ma anche $(+\infty)+(-\infty)$, $(+\infty)+(\infty)$, etc., oltre naturalmente proprio a $(\infty)-(\infty)$. Chiaramente lo stesso discorso vale anche per le altre forme indeterminate.

Vanno evitati due malintesi, che spesso si verificano quando si parla di forme indeterminate.

Il primo malinteso consiste nel ritenere che, se capita che $a_n \longrightarrow +\infty$ e $b_n \longrightarrow -\infty$, non si possa dire nulla sul limite di $a_n + b_n$. Questo non è vero. Dipende dalla informazione complessiva che abbiamo a disposizione. Ripeto ancora: se sappiamo solo che $a_n \longrightarrow +\infty$ e $b_n \longrightarrow -\infty$, allora proprio non possiamo dire nulla. Ma se conosciamo qualcosa di più, soprattutto se abbiamo a disposizione,

come spesso capita, l'espressione esplicita delle due successioni a e b , possiamo utilizzare queste informazioni supplementari per cercare di capire cosa fa $a_n + b_n$. Anzi, nell'esempio precedente, non c'era molto da lavorare per decidere cosa fa $a_n + b_n$. Possono però capitare situazioni intermedie, come:

Esempio 2 Sia $a_n = n^2$, $b_n = -n$. Abbiamo $a_n + b_n = n^2 - n$ e non è immediato capire cosa faccia. Però possiamo scrivere $n^2 - n = n(n-1)$ e quindi dedurre che $n^2 - n \longrightarrow +\infty$. $\square$

In tal caso, pochissimi conti ci hanno permesso di dirimere la questione di cosa facesse $a_n + b_n$, usando un risultato sul prodotto di successioni, senza bisogno di fare ricorso alla definizione di limite (evitando così i conti pesanti che essa usualmente richiede). Quindi la forma indeterminata $(+\infty) - (+\infty)$ non è necessariamente destinata a rimanere tale. Lo è solo se " $a_n \longrightarrow +\infty$ e $b_n \longrightarrow -\infty$ " è l'unica informazione che abbiamo a disposizione.

Il secondo malinteso consiste nel fare confusione con le operazioni tra numeri reali. Questo capita in particolare di fronte alla forma indeterminata $0/0$. Cosa significa questa forma indeterminata? Significa che, se ho due successioni a e b e so che $a_n \longrightarrow 0$ e $b_n \longrightarrow 0$, da questo non posso dedurre alcunché sul limite della successione a_n/b_n (ammesso che sia definita!). Quindi, quando si scrive $0/0$, si intende solo dire questo fatto. Niente di più. Non si sta cercando di trovare il risultato della divisione di 0 per 0 ! Nessun numero è divisibile per 0 , come già notato in precedenza. Ma, a parte questo, come detto non si sta cercando di dividere 0 per 0 . Si sta solo dicendo che "da $a_n \longrightarrow 0$ e $b_n \longrightarrow 0$ non posso dedurre quale sia il comportamento di limite della successione a_n/b_n ".

Spero di avere messo in luce a sufficienza questi due potenziali modi erranei di approcciarsi alle forme indeterminate.

12. Teoremi sulle successioni che richiedono la completezza di $\mathbb{R}$

In questo paragrafo finale sulle successioni ho raggruppato quei risultati relativi alle successioni che richiedono l'assioma di completezza. In effetti, tutti i teoremi relativi alle successioni di numeri reali avrebbero potuto essere enunciati e dimostrati per le successioni di numeri razionali: non è stato mai usato infatti l'assioma n. 16 o il suo equivalente n. 17. Attenzione: ho usato la proprietà di completezza nell'esempio 1.1, perché ho sfruttato la proprietà di Archimede che avevo provato servendomi dell'assioma 17 nel § 1.8. Ribadisco, però, che non ho mai usato la proprietà di completezza per la dimostrazione dei teoremi.

I risultati che proveremo sono:

- il teorema sulle successioni monotone
- il teorema di Bolzano-Weierstrass
- la convergenza delle successioni di Cauchy

Il primo risultato è interessante di per sé, ma soprattutto è utile perché permette di ottenere ulteriori teoremi: il teorema di Bolzano-Weierstrass (e quindi anche la convergenza delle successioni di Cauchy, come vedremo) e, più avanti, il teorema degli zeri e la "regolarità" delle serie a termini positivi. Viene ad assumere in un certo senso il ruolo di capostipite per tutti i risultati che usano in modo essenziale la completezza di $\mathbb{R}$. Visto che tutta la fatica che si fa per passare dai razionali ai reali è giustificata dall'avere questa proprietà a disposizione (e le sue conseguenze!), il teorema sulle successioni monotone ha una importanza che è difficile sopravvalutare. In realtà anche gli altri due sono altrettanto significativi: la posizione di privilegio che viene ad assumere il teorema sulle successioni monotone è solo dovuta al particolare percorso argomentativo che ho scelto. Si potrebbe per esempio provare come primo risultato la convergenza delle successioni di Cauchy e da questo ricavare gli altri due. Anzi, è proprio questo di solito il teorema più "considerato", più che altro perché si presta a generalizzazioni molto ampie, in contesti ancora più astratti di quello nel quale stiamo lavorando (a dire il vero, però, neanche il teorema di Bolzano-Weierstrass scherza in quanto a possibilità di generalizzazioni).

Prima di enunciare e dimostrare questi tre teoremi, anticipo che alla fine di questo paragrafo il lettore troverà un esempio di successione in $\mathbb{Q}$ che non "ubbidisce" a nessuno di questi tre teoremi.

Teorema 1 (delle successioni monotone) Sia $a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, debolmente crescente. Allora, se a è superiormente limitata, è convergente e il suo limite è $\sup a(\mathbb{N})$; se a non è superiormente limitata, $a_n \longrightarrow +\infty$. $\square$

Dimostrazione Supponiamo a superiormente limitata. Consideriamo $a(\mathbb{N})$: esso è non vuoto e superiormente limitato, quindi c'è $\lambda = \sup a(\mathbb{N})$. Sia $\varepsilon > 0$. Poiché λ è il più piccolo dei maggioranti, $\lambda - \varepsilon$ non è un maggiorante per $a(\mathbb{N})$. Quindi $\exists \alpha \in a(\mathbb{N})$ t.c. $\lambda - \varepsilon < \alpha$. Ma se $\alpha \in a(\mathbb{N})$, $\exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\alpha = a_\nu$. Quindi abbiamo che $\exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\lambda - \varepsilon < a_\nu$. Essendo λ un maggiorante, d'altro canto è $a_n \leq \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Riassumendo, si ha:

$$\begin{cases} \exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \lambda - \varepsilon < a_\nu \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq \lambda \end{cases}.$$

Ma a è debolmente crescente. Quindi $\lambda - \varepsilon < a_\nu \leq a_n \quad \forall n \geq \nu$. Pertanto posso dire che

$$\exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq \nu \Rightarrow \lambda - \varepsilon < a_n \leq \lambda)$$

e quindi

$$\exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq \nu \Rightarrow |a_n - \lambda| < \varepsilon).$$

Con ciò abbiamo provato che $a_n \longrightarrow \lambda$.

Vediamo l'altro caso. Cioè supponiamo che $a(\mathbb{N})$ non sia superiormente limitato. Allora, dato $\varepsilon > 0$, $\exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $a_\nu > \varepsilon$. Per la debole crescita, posso dire che

$$\exists \nu \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq \nu \Rightarrow a_n > \varepsilon).$$

E con ciò abbiamo dimostrato che $a_n \longrightarrow +\infty$. $\square$

Ovviamente c'è una versione "speculare" di questo teorema che riguarda le successioni debolmente decrescenti. Si può anche notare che per garantire la convergenza della successione è sufficiente che essa sia crescente solo da un certo indice in poi (ma in questo caso non posso più garantire che $a_n \longrightarrow \sup a(\mathbb{N})$ quando a è superiormente limitata).

Passiamo ora al teorema di Bolzano-Weierstrass.

Immaginate di avere a disposizione un tavolo e di dover sistemare su di esso un certo numero di oggetti identici tra loro, per esempio gomme da cancellare. Se le gomme sono poche, riuscirete a sistemarle ben distanziate tra loro, se così vi fa piacere. Immaginate che continuino a passarvi sempre più gomme. Arriverà il momento in cui da qualche parte le dovrete sovrapporre, e poi ammucciarle, via via

che il loro numero aumenta. Provate a pensare cosa può succedere se il loro numero aumenta indefinitamente. Qualunque strategia di posizionamento delle gomme voi decidiate, ci sarà sempre qualche zona del tavolo nella quale l'altezza raggiunta dalle gomme raggiungerà il soffitto. E poi anche il soffitto sarà superato, e così dicasi per ogni altezza prefissata...

Questo problema "concreto", anche se stupido, rende un pò conto dell'intuizione che c'è dietro al teorema di Bolzano-Weierstrass.

Supponiamo di avere una successione a limitata. Quindi tutti i termini della successione stanno in un certo intervallo $[-L, L]$. Ebbene, ci sarà qualche punto dell'intervallo $[-L, L]$ vicino al quale "cadranno" termini a_n della successione per infiniti valori dell'indice n . Questo è ovvio se la successione è convergente, ma vale anche per la successione $(-1)^n$, o per qualsiasi successione che possiate concepire, purché sia limitata. Questo fatto si può esprimere così: dalla successione a_n riusciamo ad estrarre una sottosuccessione a_{k_n} che converge a qualche punto dell'intervallo $[-L, L]$. Ed è proprio questo il teorema di Bolzano-Weierstrass.

Teorema 2 Da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente. $\square$

Dimostrazione Sia $a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, limitata. Cioè $\exists L > 0$ t.c. $a_n \in [-L, L]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Utilizzeremo il metodo di bisezione per individuare la sottosuccessione convergente. Per seguire meglio il ragionamento che segue, consiglio di aiutarsi con un disegno per rappresentarne le varie fasi.

Dividiamo $[-L, L]$ in due parti. Abbiamo due intervalli $[-L, 0]$ e $[0, L]$ che, per ragioni di comodità di notazione evidenti nel seguito, indicherò rispettivamente con $[\alpha'_1, \beta'_1]$ e $[\alpha''_1, \beta''_1]$. Indicherò con $N'_1 = \{ n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_n \in [\alpha'_1, \beta'_1] \}$ e con $N''_1 = \{ n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_n \in [\alpha''_1, \beta''_1] \}$. Osservo che $[\alpha'_1, \beta'_1] \cup [\alpha''_1, \beta''_1] = [-L, L]$ e pertanto $N'_1 \cup N''_1 = \mathbb{N}$. Poiché $\mathbb{N}$ è infinito, uno dei due insiemi N'_1 o N''_1 sarà anch'esso infinito. Sceglierò l'insieme infinito (se lo sono entrambi, prenderò N'_1) e lo chiamerò N_1 . Analogamente indicherò con $[\alpha_1, \beta_1]$ l'intervallo corrispondente all'insieme scelto. Infine, sceglierò a piacere un elemento di N_1 e lo indicherò con $k(1)$. Non bisogna dimenticare che dobbiamo individuare una sottosuccessione e quindi dobbiamo individuare una applicazione $k: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Per ora ho individuato il valore di k in $1 \in \mathbb{N}$. Procederò ora iterando la

stessa procedura (ma con un indispensabile accorgimento in più) a partire da $[\alpha_1, \beta_1]$. Divido $[\alpha_1, \beta_1]$ a metà e chiamo $[\alpha'_2, \beta'_2]$ l'intervallo $[\alpha_1, (\alpha_1 + \beta_1)/2]$ e con $[\alpha''_2, \beta''_2]$ l'intervallo $[(\alpha_1 + \beta_1)/2, \beta_1]$. Definisco $N'_2 = \{ n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_n \in [\alpha'_2, \beta'_2] \}$ ed $N''_2 = \{ n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_n \in [\alpha''_2, \beta''_2] \}$. Anche qui $[\alpha'_2, \beta'_2] \cup [\alpha''_2, \beta''_2] = N_1$. Poiché N_1 ha infiniti elementi, almeno uno tra N'_2 e N''_2 è infinito e sceglierò di indicare con N_2 appunto quello che ha infiniti elementi (come prima, se entrambi hanno infiniti elementi, prenderò $N_2 = N'_2$). Indicherò con $[\alpha_2, \beta_2]$ l'intervallo corrispondente ad N_2 . Infine, sceglierò un elemento di N_2 che sia più grande di $k(1)$ e lo indicherò con $k(2)$. Quello sottolineato è l'accorgimento la cui presenza avevo anticipato. E' ovvio che è possibile soddisfare tale requisito in quanto N_1 è infinito e pertanto conterrà dei numeri naturali più grandi di $k(1)$.

Procedendo in questo modo ottengo una successione di intervalli $[\alpha_n, \beta_n]$ e una applicazione $k: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ che è strettamente crescente (sempre per quell'accorgimento).

Proverò ora che α_n e β_n sono entrambe convergenti e convergono allo stesso limite. Intanto, poiché $[\alpha_n, \beta_n] \supseteq [\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] \quad \forall n \in \mathbb{N}$, ho che la successione α_n è debolmente crescente e la successione β_n è debolmente decrescente. Poiché $[\alpha_n, \beta_n] \subseteq [-L, L] \quad \forall n \in \mathbb{N}$, la successione α_n è superiormente limitata da L e β_n è inferiormente limitata da $-L$. Pertanto, il teorema sulle successioni monotone ci dice che entrambe convergono: $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ e $\beta_n \longrightarrow \beta$. Si tratta di dimostrare che $\alpha = \beta$. A tale scopo, osserviamo che $\beta_n = \alpha_n + (\beta_n - \alpha_n)$. So che $\alpha_n \longrightarrow \alpha$, mentre $\beta_n - \alpha_n = (2L)/2^n$ (poiché abbiamo usato la procedura di bisezione). Quindi $\beta_n - \alpha_n \longrightarrow 0$. Ma allora $\beta_n \longrightarrow \alpha$ per il teorema sul limite di una somma. Possiamo così garantire, per l'unicità del limite, che $\alpha = \beta$. Essendo $\alpha \leq L$ e $-L \leq \beta$, abbiamo anche che $\alpha \in [-L, L]$.

A questo punto, la conclusione è in vista. Osserviamo infatti che, per come abbiamo definito k , la sottosuccessione $a \circ k$ soddisfa la condizione $a_{k_n} \in [\alpha_n, \beta_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Detto altrimenti, abbiamo che $\alpha_n \leq a_{k_n} \leq \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Per quanto abbiamo appena visto, il teorema dei due carabinieri ci garantisce la convergenza di $a \circ k$ ad $\alpha \in [-L, L]$. $\square$

L'ultimo risultato riguarda le successioni "di Cauchy", ovvero quelle che soddisfano la condizione di Cauchy. L'idea base dietro a questo è abbastanza sem-

plice: se abbiamo una successione convergente, cioè se i termini a_n si avvicinano a un numero reale ℓ , allora i termini dovrebbero avvicinarsi tra loro. La condizione di Cauchy esprime appunto questa idea in modo preciso.

Definizione 1 Diremo che una successione a soddisfa la condizione di Cauchy se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad (n, m > \nu \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon) . \square$$

E' del tutto immediato che una successione convergente soddisfa la condizione di Cauchy. E' un po' più difficile provare che vale il viceversa: occorre usare la completezza di $\mathbb{R}$, come già anticipato. Vale comunque la pena di farlo, perché la condizione di Cauchy ha un aspetto particolarmente interessante che intendo sottolineare, confrontandolo con la definizione di successione convergente: non abbiamo bisogno di conoscere a priori il limite ℓ . Cioè: per dire che una successione è convergente, bisogna trovare in qualche modo un numero reale ℓ che soddisfi la nota condizione. Per verificare invece la validità della condizione di Cauchy, ci basta avere a disposizione la successione a : se la condizione di Cauchy è soddisfatta, siamo sicuri (grazie al teorema seguente) che un limite ℓ ci sarà.

Vediamo quindi il seguente:

Teorema 3 (criterio di convergenza di Cauchy) Una successione è convergente se e solo se soddisfa la condizione di Cauchy. $\square$

Dimostrazione E' abbastanza facile provare il "solo se". Infatti, se a è convergente:

$$\exists \ell \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon)$$

vediamo che è di Cauchy, cioè che:

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \nu' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n', m' \in \mathbb{N} \quad (n', m' > \nu' \Rightarrow |a_{n'} - a_{m'}| < \varepsilon')$$

Dato ε' , prendiamo $\varepsilon = \varepsilon'/2$ e da qui abbiamo a disposizione un ν che possiamo utilizzare anche come ν' : la disuguaglianza triangolare fa il resto, essendo:

$$|a_n - a_m| = |a_n - \ell + \ell - a_m| \leq |a_n - \ell| + |a_m - \ell| .$$

Il "se" è un po' più laborioso. Farò una dimostrazione divisa in tre parti:

- 1) una successione di Cauchy è limitata
- 2) da una successione limitata posso estrarre una sottosuccessione convergente
- 3) se una sottosuccessione di una successione di Cauchy è convergente, allora converge tutta la successione.

La prima parte si prova facilmente, con una piccola rielaborazione della dimostrazione in base alla quale una successione convergente è limitata. Abbiamo:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad (n, m > \nu \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon) .$$

Scegliamo $\varepsilon = 1$, ed $n = \nu + 1$. Otteniamo che $a_{\nu+1} - \varepsilon < a_m < a_{\nu+1} + \varepsilon$ per ogni $m > \nu$. Abbiamo ottenuto che la successione è limitata da un certo indice in poi. Quindi tutta la successione è limitata. (Se qualcuno ha dei dubbi su come si possa procedere, può rivedersi la dimostrazione del teorema 5.1).

La seconda parte è naturalmente immediata, perché è esattamente l'enunciato del teorema di Bolzano-Weierstrass.

Resta la terza parte, che è nuova ed è un po' delicata. Prima di ingaggiare la solita lotta con ε e ν , vorrei osservare che l'idea è ovvia. Se una sottosuccessione converge ad un certo ℓ , ciò vuol dire che i suoi termini si "avvicinano" ad ℓ . La condizione di Cauchy a sua volta garantisce che tutti i termini si avvicinino tra loro, e quindi anche ai termini della sottosuccessione, pertanto tutti i termini si avvicineranno ad ℓ .

Indicheremo come di consueto con k la regola di estrazione, per cui abbiamo che $\exists \ell \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad a_{k_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$. Cioè:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |a_{k_n} - \ell| < \varepsilon) .$$

Sappiamo anche che:

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \nu' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n', m' \in \mathbb{N} \quad (n', m' > \nu' \Rightarrow |a_{n'} - a_{m'}| < \varepsilon') .$$

Vogliamo ottenere che:

$$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \nu'' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n'' \in \mathbb{N} \quad (n'' > \nu'' \Rightarrow |a_{n''} - \ell| < \varepsilon'') .$$

Sia dunque ε'' dato. Prendiamo $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon''/2$. Abbiamo a disposizione

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |a_{k_n} - \ell| < \varepsilon''/2) \\ \nu' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n', m' \in \mathbb{N} \quad (n', m' > \nu' \Rightarrow |a_{n'} - a_{m'}| < \varepsilon''/2) \end{array} \right.$$

Definiamo $\nu'' = \max \{\nu, \nu'\}$. Allora per tale ν'' si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} n > \nu'' \Rightarrow |a_{k_n} - \ell| < \varepsilon''/2 \\ n', m' > \nu'' \Rightarrow |a_{n'} - a_{m'}| < \varepsilon''/2 \end{array} \right.$$

Sia $n'' > \nu''$. Scegliamo $m' = k_{n''}$ (notare che $k_{n''} \geq n''$ per il lemma 6.1 e quindi $k_{n''} > \nu''$). Prendiamo inoltre $n = n''$ ed $n' = n''$. Abbiamo:

$$|a_{k_{n''}} - \ell| < \varepsilon''/2 \quad \text{e} \quad |a_{n''} - a_{k_{n''}}| < \varepsilon''/2 .$$

Si noti che nella relazione precedente si trova espresso in modo preciso quanto detto prima in termini intuitivi: e cioè che i termini della sottosucces-

sione sono "vicini" ad ℓ ($|a_{k_n} - \ell| < \varepsilon''/2$) e che i termini della successione, essendo tra loro "vicini", lo sono anche a quelli della sottosuccessione ($|a_n - a_{k_n}| < \varepsilon''/2$).

Allora abbiamo:

$$|a_n - \ell| = |a_n - a_{k_n} + a_{k_n} - \ell| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - \ell| < \varepsilon'' . \square$$

Dopo aver visto la dimostrazione del criterio di convergenza di Cauchy, vorrei osservare un fatto. Quando cercavo di presentare questo criterio, ho messo in connessione il fatto che una successione sia convergente col fatto che i termini della successione si avvicinino tra loro. Può darsi che qualcuno, nel cercare di precisare cosa significhi che "i termini della successione si avvicinano tra loro", abbia pensato al fatto che la distanza tra un termine ed il successivo va a zero. Cioè, che $a_{n+1} - a_n \longrightarrow 0$. Notiamo subito che, se a converge, allora $a_{n+1} - a_n \longrightarrow 0$ (la successione a_{n+1} è una sottosuccessione estratta da a_n , con $k(n) = n+1$, e quindi se $a_n \longrightarrow \ell$, anche $a_{n+1} \longrightarrow \ell$, pertanto $a_{n+1} - a_n \longrightarrow 0$). Quindi questa si presenta come una sensatissima condizione tramite la quale esprimere la convergenza di una successione. Oltretutto più semplice, più familiare di quella espressa dalla condizione di Cauchy. Ma, contrariamente alle apparenze, la condizione $a_{n+1} - a_n \longrightarrow 0$ non garantisce la convergenza della successione a . Si potrebbe anche fare un esempio, ma preferisco rinviarlo a un momento più appropriato, cioè a quando parleremo di serie.

Ora che abbiamo visto l'uso della completezza di $\mathbb{R}$, vediamo l'esempio che avevo promesso: una successione in $\mathbb{Q}$ che non rispetta l'enunciato di questi "grossi" teoremi.

L'esempio è facilissimo. E' la successione delle approssimazioni decimali per difetto di $\sqrt{2}$ (ma qualunque numero irrazionale va bene al posto di $\sqrt{2}$). Più precisamente, con a_n intendo indicare il numero decimale finito che approssima meglio $\sqrt{2}$ per difetto tra tutti quelli che hanno n cifre decimali. E quindi $a_1 = 1.4$, $a_2 = 1.41$, $a_3 = 1.414$, $a_4 = 1.4142$, E' ovviamente una successione monotona ma non ha limite in $\mathbb{Q}$ (se lo avesse, avrei un esempio di successione in $\mathbb{R}$ con due limiti diversi, visto che convergerebbe sia a $\sqrt{2}$ che ad un numero razionale). Poiché è convergente a $\sqrt{2}$, ogni sua sottosuccessione estratta converge anch'essa a $\sqrt{2}$: quindi non posso trovare una sottosuccessione convergente a un numero razionale. Mentre ovviamente è una successione limitata. Infine,

soddisfa la condizione di Cauchy, in quanto in $\mathbb{R}$ è convergente. Eppure non converge in $\mathbb{Q}$.

13. Conclusioni

In questo capitolo abbiamo incontrato per la prima volta il concetto di limite. Lo si è visto nel contesto più semplice possibile, cioè quello delle successioni. Si è poi passati ad esaminare le principali proprietà elementari dei limiti di successioni. Il primo risultato importante è naturalmente l'unicità del limite. Ma non meno significativi sono i teoremi sul limite della somma e del prodotto di successioni, nonché il teorema di permanenza del segno; essi garantiscono la "compatibilità" tra il concetto di limite e la struttura dei numeri reali. Al di là di varie altre considerazioni presenti in questo capitolo (richiamo l'attenzione in particolare sui paragrafi 2 e 3, nonché 11), un posto di particolare riguardo è occupato dal precedente paragrafo. Vengono qui dimostrati tre risultati la cui portata è difficile sopravvalutare; non a caso, sono accomunati dalla caratteristica di richiedere in modo essenziale l'assioma di completezza. Vedremo in seguito fin dove essi ci permetteranno di giungere: posso anticipare che grazie a questi risultati potremo dimostrare un paio di proprietà delle funzioni continue. L'aspetto curioso della faccenda è che queste proprietà, per la cui dimostrazione è necessario un macchinario così sofisticato, sono proprietà di significato intuitivo immediato! Rinvio naturalmente al capitolo apposito (il III) per considerazioni più dettagliate.