

# Giochi ripetuti a due stadi:

- dilemma del prigioniero e battaglia dei sessi
- game form e gioco, in forma estesa e strategica

Appunti di  
Fioravante PATRONE

<http://www.diptem.unige.it/patrone/default.htm>

Decisori (razionali) interagenti

versione del 1 aprile 2011

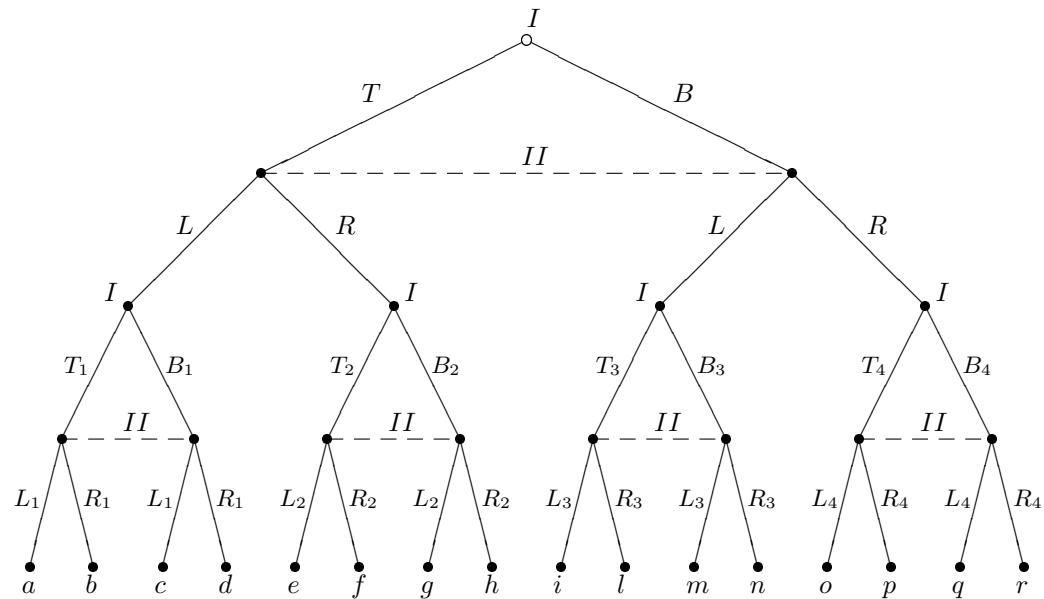
## Finalità di queste note

Illustrare anche visivamente il caso più semplice di gioco ripetuto, ovvero il caso a due soli stadi.

Avere a disposizione la forma estesa e quella strategica del gioco ripetuto offre la possibilità di cogliere più direttamente alcuni aspetti interessanti.

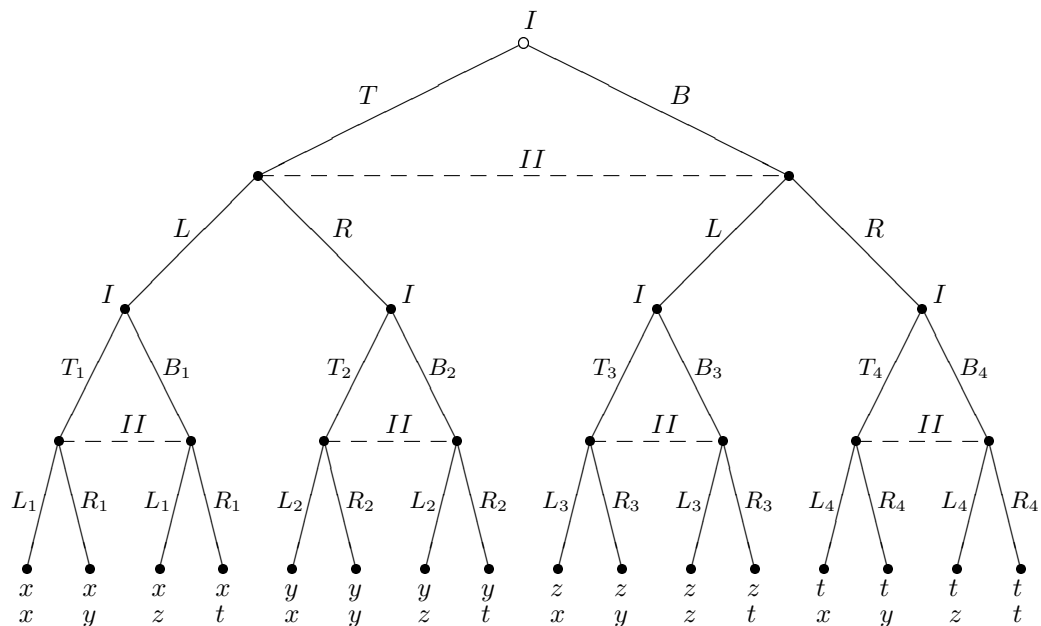
## Game form di un gioco ripetuto: forma estesa e forma strategica

$I \backslash II$	L	R
T	$x$	$y$
B	$z$	$t$



## Game form di un gioco ripetuto: forma estesa e forma strategica

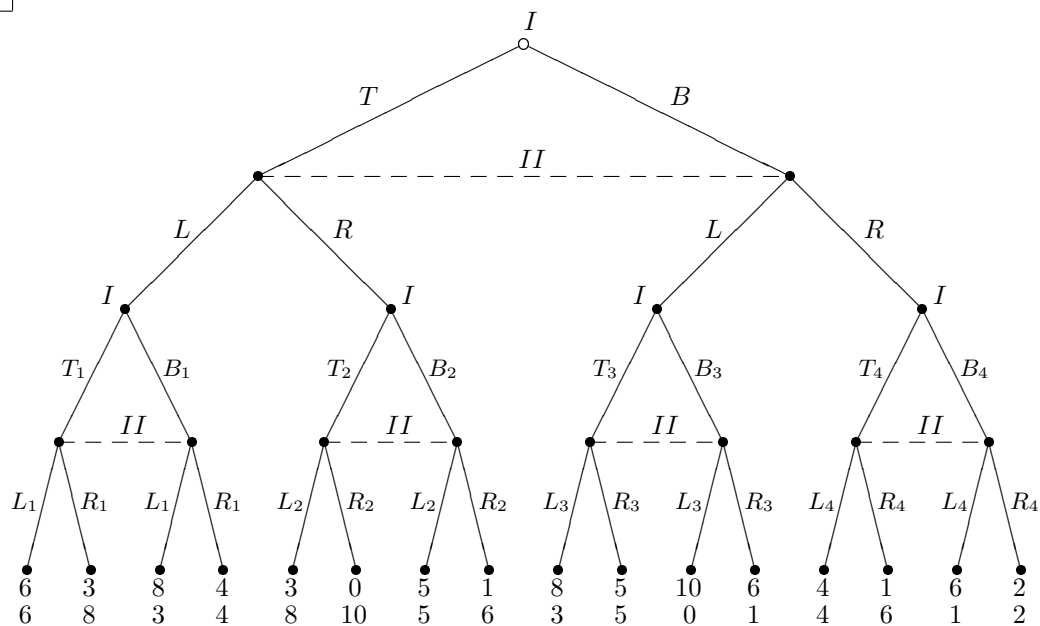
Più espressiva è la game form seguente, in cui abbiamo evidenziato come gli esiti finali non siano altro che la “raccolta” degli esiti parziali ottenuti in ciascun stadio. Ad esempio, l’esito “ $(y, t)$ ” (le due coordinate sono poste in colonna, nella forma estesa, per ragioni tipografiche) indica che al primo stadio si è avuto l’esito  $x$  e al secondo stadio l’esito  $t$ . Questo modo di denotare gli esiti è anche più aderente all’idea di gioco ripetuto: ad ogni stadio si ottengono esiti “parziali”, che vanno a “comporre” l’esito finale. Questo significa anche che l’unica differenza tra  $(x, y)$  ed  $(y, x)$  sta nel fatto che c’è una inversione temporale nell’ottenimento dei due esiti parziali  $x$  ed  $y$ . Se vi fossero altre differenze, non ci troveremmo propriamente in un contesto di giochi ripetuti.





### Dilemma del prigioniero ripetuto: albero, forma strategica ed equilibri in strategie pure

$I \setminus II$	L	R
T	(3, 3)	(0, 5)
B	(5, 0)	(1, 1)

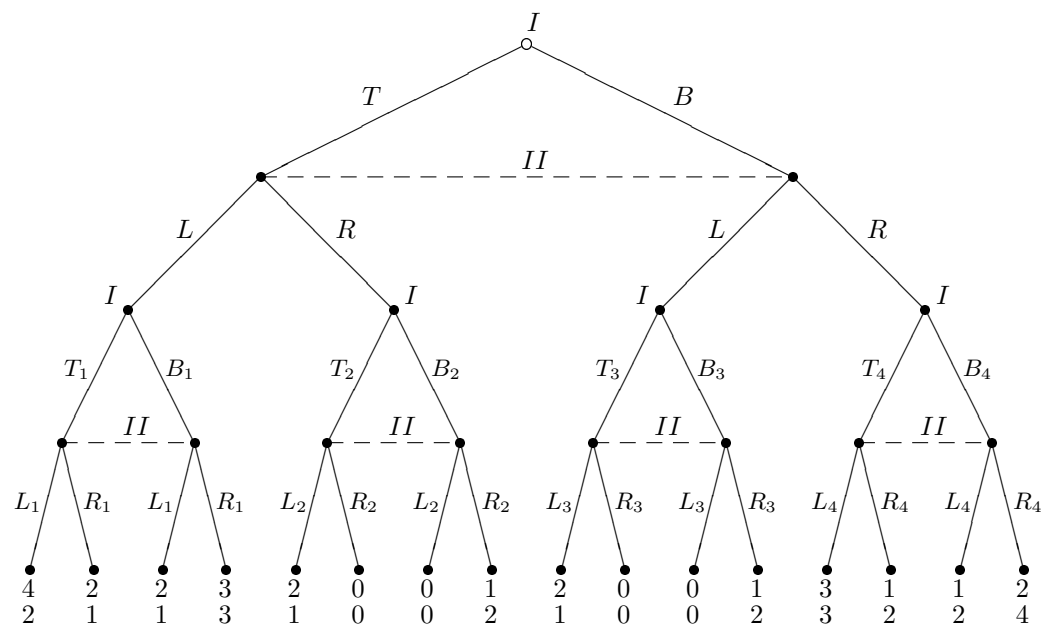


Nella forma strategica, gli equilibri sono indicati con  $\boxed{(x,y)}$ , e l'unico SPE con  $\boxed{\boxed{(x,y)}}$



### Battaglia dei sessi ripetuta: albero, forma strategica e corrispondenza di miglior risposta in pure

$I \backslash II$	L	R
T	(2,1)	(0,0)
B	(0,0)	(1,2)

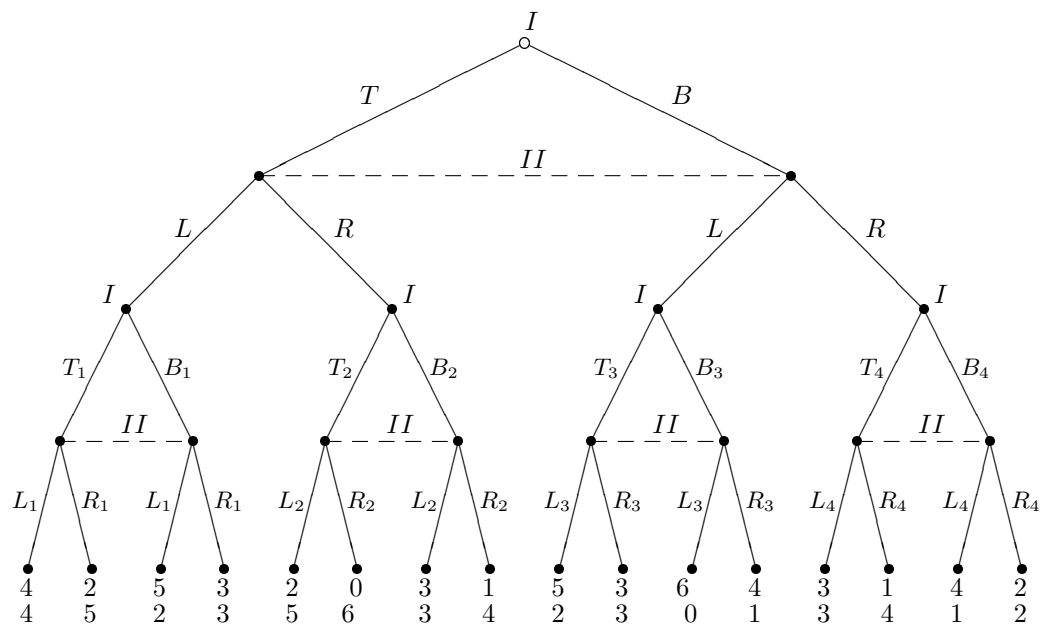






**Dilemma del prigioniero ripetuto: albero, forma strategica ed equilibri in strategie pure.**  
 Con gli stessi payoff che sono sul libro *Decisori (razionali) interagenti*, pag. 87.

$I \setminus II$	L	R
T	(2, 2)	(0, 3)
B	(3, 0)	(1, 1)



Nella forma strategica, rappresentata nella pagina seguente, gli equilibri sono indicati con  $\boxed{(x,y)}$ , e l'unico SPE con  $\boxed{\boxed{(x,y)}}$



Una annotazione finale. Abbiamo visto, nel dilemma del prigioniero a due stadi, che ci sono 16 equilibri di Nash. Non a caso, in tutti e 16 compaiono le scelte  $B_4$  ed  $R_4$ : il nodo più a destra (dopo il primo turno) è raggiunto nel gioco (tutti e 16 gli equilibri prevedono di giocare  $B$  e  $R$  al primo turno) e quindi non potrebbe essere di equilibrio la scelta di una strategia dominata.

D'altra parte, nei 15 equilibri non perfetti nei sottogiochi, compaiono al secondo stadio delle scelte diverse da "Bottom" e "Right": ciò non contrasta con la definizione di equilibrio di Nash, in quanto tali scelte avvengono in nodi che (per effetto della scelta di giocare  $B$  e  $R$  al primo turno) non saranno effettivamente raggiunti dal gioco. A questo punto uno però potrebbe chiedersi come mai siano solo 16 gli equilibri di Nash. Come mai uno non può scegliere a suo piacimento nei nodi corrispondenti al secondo turno, eccetto ovviamente per quello più a destra?

La risposta è semplice, e può essere verificata "ispezionando" la matrice: i nodi in cui un giocatore ha libertà di scelta sono quelli che *non sono raggiungibili data la sua scelta al primo turno*. Ad esempio, visto che  $I$  sceglie  $B$ , il primo e terzo nodo da sinistra non possono essere raggiunti neanche se  $II$  deviasse *al primo turno*. Quindi, ogni scelta da parte di  $II$  non può avere alcuno effetto: quei nodi sicuramente saranno non raggiunti. E, pertanto, ogni strategia che preveda:  $B$ ,  $B_1$  o  $T_1$ ,  $B_2$  o  $T_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  non offre alcuno spazio al giocatore  $II$  di poter modificare il payoff finale (si noti che sono 4 strategie in tutto). Considerazioni del tutto analoghe valgono, evidentemente, anche per  $II$ . Come si comprende, a questo punto, abbiamo 4 possibilità di scelta di strategia per  $I$  ed altrettante per  $II$ : combinate assieme fanno appunto 16, il numero di equilibri di Nash che abbiamo trovato.