

CAPITOLO III

FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE: LIMITI E CONTINUITÀ

1. Funzioni reali di variabile reale

Questo capitolo si occupa di funzioni reali di variabile reale, per quanto riguarda i limiti e la continuità.

Che cosa è una funzione reale di variabile reale? Molto semplice:

Definizione 1 Una applicazione $f:A \longrightarrow B$, dove $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$, si dice funzione reale di variabile reale. \square

Osservazione 1 La condizione $A \neq \emptyset$ non verrà d'ora in poi ricordata continuamente, però è da intendersi sempre presente, salvo esplicito avviso contrario. \square

Osservazione 2 Una successione è un caso particolare di funzione reale di variabile reale. \square

Proprio a partire da questa osservazione, ripercorriamo rapidamente le note introduttive del capitolo II: una funzione reale di variabile reale si dirà limitata se $f(A)$ è limitato, $\sup f(A)$ si dirà \sup di f , diremo che f ha max se $f(A)$ ha max, etc. Se $x_0 \in A$ è t.c. $f(x_0) = \max f(A)$, ovvero sia $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in A$, diremo che x_0 è punto di massimo per f ; analogamente per il minimo. Anche qui abbiamo poi la definizione di f crescente:

Definizione 2 $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, si dirà

debolmente crescente se $\forall x,y \in A (x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$

strettamente crescente se $\forall x,y \in A (x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$

debolmente decrescente se $\forall x,y \in A (x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$

strettamente decrescente se $\forall x,y \in A (x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$. \square

Anche qui parleremo di funzioni monotone e strettamente monotone, come per le

successioni.

Esercizio 1 Provare che la seguente condizione non garantisce la debole crescita:

$$\forall x \in A \quad f(x) \leq f(x+1) \quad .\square$$

Rispetto alle successioni abbiamo tre importanti novità: la restrizione, composizione e inversa di una funzione. Si tratta di nozioni del tutto generali (di pertinenza dell'"insiemistica"), naturalmente: se però nel contesto delle successioni sono poco interessanti, qui assumono un ruolo ben più importante.

Definizione 3 Data $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ e dato $B \subseteq A$, diremo "restrizione di f a B " la funzione $g:B \longrightarrow \mathbb{R}$ così definita: $g(x) = f(x) \quad \forall x \in B$. Useremo la notazione $f|_B$ per indicare g . \square

C'è poco da dire, per ora. Casomai ricordo che l'idea di sottosuccessione (secondo il primo punto di vista iniziale, poi non seguito) era proprio quella di considerare la restrizione di una successione a un sottoinsieme infinito di \mathbb{N} .

La definizione di funzione composta è ben nota. Ricordo che, data $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g:B \longrightarrow \mathbb{R}$, la funzione $f \circ g:B \longrightarrow \mathbb{R}$, definita come $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, risulta essere definita solo se è soddisfatta la condizione $g(B) \subseteq A$.

Infine, anche la nozione di funzione inversa è ben nota. La tralascio, pertanto. Salvo riprenderla più in là (al § 13) dove sarò obbligato a fare un pò di puntualizzazioni.

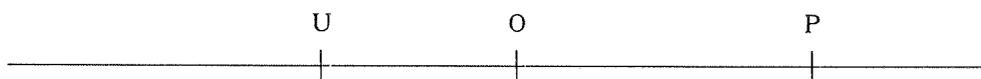
2. Grafico di una funzione

Come è ben noto, in modo del tutto generale, data $f:A \longrightarrow B$, dicesi grafico di f il seguente sottoinsieme di $A \times B$: $\text{gph}(f) = \{ (x,y) \in A \times B \text{ t.c. } y = f(x) \}$.

Anche l'idea di grafico di una funzione reale di variabile reale è in genere ben conosciuta. Esso è naturalmente un sottoinsieme di $A \times \mathbb{R}$ e quindi anche di \mathbb{R}^2 . Quindi si può "disegnare il grafico di f " nel "piano cartesiano". Anche se tutto ciò è, come detto, grosso modo noto a tutti, spesso le idee a questo proposito non sono chiare come dovrebbero. Cercherò quindi di precisare come stanno le cose, invitando fin d'ora il lettore a chiedersi alla fine se davvero aveva le idee chiare in proposito¹.

Tutto è basato sul fatto che i numeri reali sono l'insieme giusto per "descrivere la retta". La situazione è la seguente. Da una parte abbiamo i numeri reali, con i loro assiomi. Dall'altra la "retta euclidea". Cioè un insieme di elementi detti "punti" soddisfacenti gli assiomi della geometria euclidea relativi alla retta. Questi due enti matematici, numeri reali e retta euclidea, risultano essere una sorta di gemelli: infatti è possibile usare i numeri reali per descrivere compiutamente la retta euclidea e viceversa. Il ponte tra i due enti è costituito dalla idea cartesiana di geometria analitica, ovvero dalla possibilità di mettere un sistema di coordinate sulla retta. In realtà, quello che nelle scuole secondarie viene enfatizzato è il rapporto tra il "piano euclideo" e \mathbb{R}^2 : alla base di questo rapporto sta però quello tra retta reale ed \mathbb{R} , che ora mi accingo a descrivere, per poi passare alla geometria analitica del piano.

Come si fa a introdurre un sistema di coordinate cartesiane sulla retta? E' facile. Si fissano due punti distinti, O e U sulla retta. Il punto O svolgerà il ruolo di origine del sistema di riferimento cartesiano ed il punto U invece quello di fissare l'unità di misura (più propriamente, sarà il segmento OU che svolgerà il ruolo di unità di misura). Sia ora dato un generico punto P sulla retta:



¹ Evidentemente sto dando per scontato di essere capace di chiarirle, le idee, il che è tutto da dimostrare!

L'ascissa del punto P sarà il numero reale che esprime la misura del segmento OP in termini del segmento "unità" OU , con il "segno +" se P appartiene alla semiretta di origine O contenente U , con il "segno -" altrimenti (nel caso sopra disegnato, l'ascissa di P è negativa).

Chi garantisce che tutto questo si possa fare? Sono proprio gli assiomi della geometria euclidea che ci permettono di parlare di segmenti, di semirette, e anche di misura di segmenti con l'ausilio degli assiomi di \mathbb{R} . Poiché questa è proprio la parte che di solito è più carente nella preparazione pre-universitaria, traccio a grandi linee quale è la procedura che si segue. Si va a vedere quante volte il segmento OU "sta" nel segmento OP (questo è possibile grazie agli assiomi della geometria euclidea che riguardano l'ordinamento e grazie alla proprietà archimedea della retta euclidea). Fatto questo, si passa ai "sottomultipli" di OU , con una procedura ovvia: dividiamo per esempio OU in dieci parti e andiamo a vedere quante volte questo nuovo segmento dieci volte più piccolo "sta" nel segmento OP . E poi dividiamo ancora per dieci, e così via. Se da una parte mettiamo tutte le misure approssimate per difetto, e dall'altra quelle per eccesso, otteniamo una coppia di classi separate di numeri razionali (e quindi anche reali). Grazie all'assioma di completezza si ha la garanzia che vi è un numero reale elemento separatore di queste due classi. Tale elemento separatore è per di più unico perché le due classi sono contigue. Assumiamo pertanto questo unico numero reale che funge da elemento separatore come misura del segmento OP rispetto al segmento OU . Si può anche vedere C-S a pag. 39, a questo proposito.

Per quanto riguarda la geometria analitica del piano, si tratta di usare due rette incidenti e di sfruttare alcune proprietà della geometria euclidea del piano, tra cui il famoso quinto postulato di Euclide.

Si considera una coppia di rette incidenti, r ed s . Su ognuna si fissa un sistema di ascisse, cioè si fissano un punto O su r ed un punto O' su s , nonché un punto U ed U' rispettivamente su r ed s (vedi figura 1):

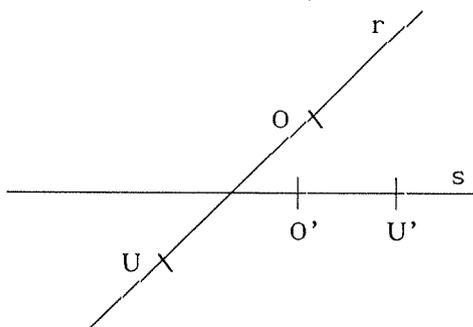


figura 1

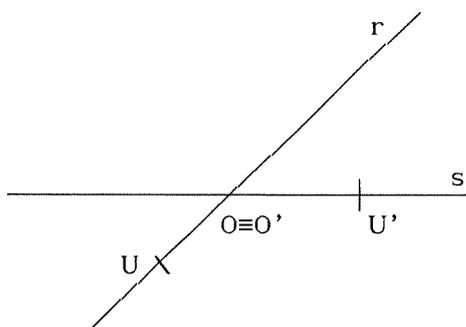


figura 2

Per evitare inutili complicazioni si sceglie come origine delle coordinate su entrambe le rette il punto di incidenza, come in figura 2.

Ebbene, dato un punto P del piano, grazie al "quinto postulato", per esso passano una e una sola retta parallela rispettivamente ad r e ad s . Tali parallele incontrano r ed s in due punti, che indicheremo con P_r e P_s rispettivamente. L'ascissa di P_r sulla retta r rispetto al sistema di riferimento individuato su r da O e U sarà detta ascissa di P e l'ascissa di P_s sarà invece detta ordinata di P (figura 3).

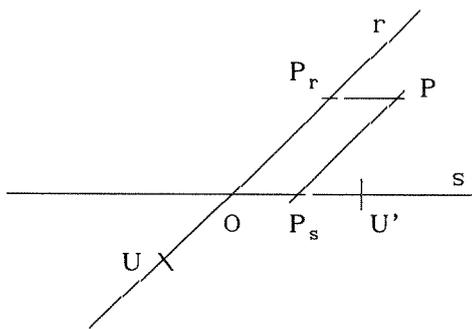


figura 3

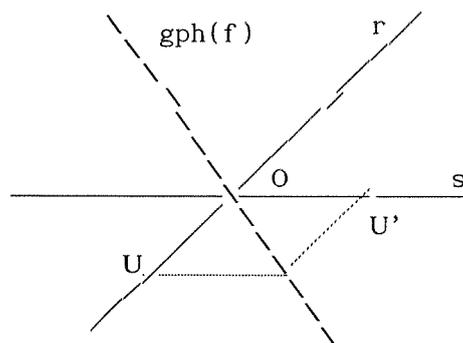


figura 4

Abbiamo pertanto assegnato a P una coppia di numeri reali, cioè la sua ascissa e la sua ordinata. Cioè abbiamo definito una funzione $\phi: \Pi \rightarrow \mathbb{R}^2$, dove Π è il piano euclideo. Tale funzione, che è in realtà una corrispondenza biunivoca, istituisce un sistema di coordinate cartesiane nel piano.

E' grazie alla intermediazione di ϕ che si può "disegnare il grafico" di una funzione reale di variabile reale. Essendo il grafico un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 ,

la sua controimmagine mediante ϕ sarà un sottoinsieme del piano euclideo, ed è per l'appunto quello che disegniamo quando "disegniamo il grafico" di una funzione.

Nel nostro caso, per esempio $f(x) = x$ ha il grafico come tratteggiato alla figura 4.

E' ben noto, naturalmente, che spesso si scelgono sistemi di riferimento ortogonali ($r \perp s$) e monometrici (i segmenti OU ed OU' sono uguali).

Per di più si assume che l'angolo orientato $\hat{r}s$ individuato dalle rette "orientate" r ed s sia retto (l'orientamento sulle rette è fissato naturalmente in modo conforme alla scelta di U ed U' , cioè in modo che U segua O nell'ordinamento fissato su r , ed analogamente per s). Di solito si usano anche delle frecce per indicare l'ordinamento scelto. Infine, di solito, nel fare il disegno concreto su un pezzo di carta per convenienza si traccia la retta r in modo che essa sia parallela al bordo inferiore del foglio su cui si lavora. Come nella figura 5. Sarebbe molto utile se chi legge facesse un disegno nel quale le varie condizioni elencate in questo capoverso sono violate.

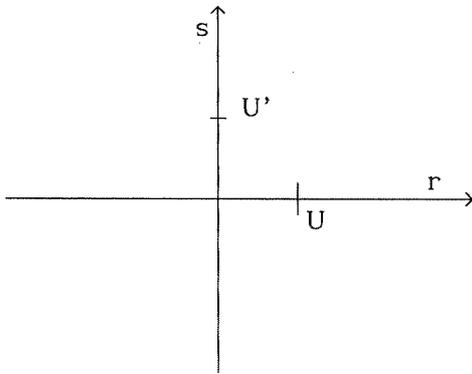


figura 5

L'ultima considerazione di opportunità fatta, relativa al foglio di lavoro, introduce sulla scena un terzo attore: oltre ad \mathbb{R}^2 e al piano euclideo, c'è anche il supporto "concreto" che scegliamo per rappresentare il piano euclideo. Come al solito, abbiamo l'idea che il "foglio di lavoro" sia una realizzazione attendibile del piano euclideo (o, più propriamente, a rovescio: cioè che il piano euclideo sia una sensata astrazione dei tanti possibili fogli di lavoro ...).

Esercizio 1 Disegnare il grafico di $f(x) = x^2$ in un sistema di coordinate cartesiane non ortogonali e non monometriche. \square

Un'ultima cosa. La grande diffusione dei sistemi di coordinate cartesiane ortogonali (e positivamente orientati), è dovuta anche ad un fatto che mi preme sottolineare.

Una funzione $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$, esprime spesso una relazione tra due grandezze (per esempio fisiche) tra di loro ben diverse. Esempio classico, x rappresenta la temperatura di una sbarra in base ad un certo sistema di misura ed $f(x)$ ci dà la lunghezza di tale sbarra, sempre rispetto ad un certo sistema di unità di misura (CGS, MKSA, SI o che altro). Il grafico di f non è quindi "di per sé" una figura geometrica piana, al contrario di funzioni la cui origine risiede in una definizione geometrica (per esempio la parabola). E allora, tanto vale scegliere il sistema di riferimento che ci offre il punto di vista più familiare per motivi di consuetudine e che quindi ci dà una idea visiva più immediata delle proprietà di f .

E' interessante notare, a questo proposito, che se x ed $f(x)$ rappresentano misure di due grandezze diverse (per esempio, rispettivamente temperatura e lunghezza), il requisito di essere monometrico perde qualunque significato. Anzi, questo fatto viene a volte usato con scopi volutamente ingannatori da chi detiene potere culturale nei confronti di chi non ne ha, per rappresentare graficamente dei fenomeni sociali od economici in modo tale da ingenerare false impressioni d'origine visiva.

3. Definizione di limite

L'idea di limite "fondamentale" che dobbiamo precisare per le funzioni reali di variabile reale è quella del limite di una funzione quando x tende verso un certo x_0 .

Il punto più importante da capire, in questo contesto, è che noi vogliamo separare completamente due aspetti che ad uno sguardo poco accorto potrebbero anche non apparire scollegati.

Un aspetto è molto semplice da definire: si tratta semplicemente del valore che f assume in x_0 .

L'altro aspetto, anche se è tutto da scoprire in termini rigorosi, in termini intuitivi può però essere enunciato semplicemente: si tratta di sapere quale è il comportamento di f quando x si avvicina a x_0 . Cioè, vogliamo sapere se $f(x)$ "tende" da qualche parte quando x "tende" a x_0 . Questo secondo aspetto, né più né meno, corrisponde proprio al concetto di limite.

Pertanto il nostro scopo è scoprire cosa fa $f(x)$ quando x "si avvicina" ad x_0 , senza però far entrare in gioco il valore di f in x_0 , cioè $f(x_0)$ ². Come facciamo? Non è poi così difficile. In fondo, abbiamo già un sacco di esperienza sulle successioni. Tanto è vero che abbiamo visto come scimmiettare l'aspetto dinamico della cosa (senza parlare di "flussioni" di newtoniana memoria), giocando sulla struttura di una frase in cui sono presenti due quantificatori, \forall ed \exists , in un ben preciso ordine.

Il lettore è vivamente pregato di andare a rileggersi quanto detto a pagina II.4 a proposito della tensione dialettica esistente tra approccio statico e dinamico.

Ripensando appunto alle successioni, ricordo che la chiave sta tutta in: " $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c.". Qui ricorriamo a una struttura analoga. Se è plausibile che il " $\forall \varepsilon > 0$ " possa andare ancora bene, certo " $\exists \nu \in \mathbb{N}$ " va in qualche modo sostituito, perché è manifestamente troppo legato al fatto che una successione è definita sui naturali. Con cosa lo sostituiamo? Bisogna capire a che cosa serve ν . Questo ν ci dava una misura di "quanto grandi" dovevano essere gli indici n affinché a_n fosse "abbastanza vicino" ad l . Con un pò di fantasia, e magari anche con un pò di forzatura, e comunque certo in modo non formale, potremmo dire

² Ripeto: perché vogliamo tenere separati i due aspetti sopra menzionati

che ν misura quanto gli indici n devono essere "vicini a $+\infty$ " affinché a_n disti meno di ε da l .

Allora, se ora vogliamo vedere il limite di una funzione per x che tende a x_0 , dovremo sostituire ν con qualcosa che esprima la "vicinanza" di x ad x_0 . Ora, la distanza tra due numeri reali x e x_0 è data da $|x-x_0|$. Potremmo allora considerare un numero reale $\delta > 0$, e usare la disuguaglianza $|x-x_0| < \delta$ per esprimere che x è vicino ad x_0 a meno di δ .

A questo punto, possiamo provare anche ad abbozzare una definizione:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A (|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon)$$

Sembra ragionevole. Una sensata "traduzione" della definizione di limite dal linguaggio delle successioni a quello delle funzioni. Penso sia ragionevole, chiaro, ovvio, perché " $\forall n \in \mathbb{N}$ " è stato sostituito da " $\forall x \in A$ " (ricordo che A è l'insieme su cui è definita f , come \mathbb{N} era l'insieme su cui erano definite le successioni).

Ci siamo però dimenticati una cosa.

E cioè il discorso dei due aspetti che vogliamo tenere separati. Cioè vogliamo che dall'idea di limite sia assente ogni riferimento al comportamento di f nel punto x_0 . Come si fa? Basta una semplice modifica. Scriveremo cioè:

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A (0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon)$$

Cioè, abbiamo escluso ogni considerazione riguardante il valore di f in x_0 dalla definizione di limite.

Invito caldamente tutti, ed in particolar modo chi sa già qualcosa sui limiti, a chiedersi se davvero siamo arrivati alla definizione di limite o se c'è ancora qualcosa da mettere a posto. Per dare un pò di suspense, proseguirò alla pagina successiva.

No. Non abbiamo finito. C'è ancora un punto un po' "sottile" da sistemare.

Con la speranza di farlo capire meglio, proporrò un esempio:

Esempio 1 Sia $A = [0, +\infty[$. Sia $f(x) = 3 \quad \forall x \in A$. Allora, con $x_0 = -6$, la condizione (*) è soddisfatta da $\ell = 47$. \square

Dettaglio Dato $\varepsilon > 0$, prendiamo $\delta = 6$. Poiché non c'è nessun $x \in A$ t.c. $0 < |x - x_0| < 6$, la implicazione che in (*) è racchiusa in parentesi sarà vera, in quanto la premessa è falsa (ricordare la tavola di verità di \Rightarrow). Quindi la condizione (*) è soddisfatta con $\ell = 47$. \square

A dire il vero, qualunque valore di ℓ avessimo provato, sarebbe andato bene, anche 3.

Cosa c'è che non va? Non è tanto ovvio da capire, in quanto ci sono troppe cose che non quadrano. Perché 47 o un altro numero dovrebbe essere il limite di f per x che tende a -6 ? Cosa c'entra con f che vale sempre 3? Casomai 3 potrebbe essere un candidato più sensato, ed in effetti come detto sopra anch'esso soddisfa la condizione (*). La cosa però che disturba di più in questo esempio è che non si capisce cosa voglia dire fare il limite per x che tende a -6 , visto che f è definita solo per $x \geq 0$.

Forse il guaio è tutto qui. Evidentemente dovevamo stare più attenti. Ma come rimediarvi? Non possiamo certo farlo imponendo come preconditione che sia $x_0 \in A$! Perché abbiamo detto che ci vogliamo disinteressare di quel che succede in x_0 , parlando di limite per x che tende a x_0 .

E allora? Occorre una cosa ovvia, e cioè portare alle estreme conseguenze il "secondo aspetto" di cui ho parlato in precedenza. Se la definizione di limite si deve occupare di quel che fa f "vicino" ad x_0 ma non di quel che capita in x_0 , evidentemente ho bisogno di garantire che A contenga punti "vicini quanto si vuole ad x_0 ". In termini precisi, dovremo richiedere che x_0 sia punto di accumulazione per A .

Definizione 1 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Diremo che x_0 è punto di accumulazione per A se:

$$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in A \quad \text{t.c.} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \square$$

E' questa la "condizione preliminare" perché abbia senso parlare di limite: per descrivere il comportamento di $f(x)$ per x che tende a x_0 dobbiamo avere a disposizione delle x vicine ad x_0 ma distinte da x_0 in cui f sia defini-

ta. Naturalmente nell'esempio di prima x_0 non era un punto di accumulazione per $[0, +\infty[$.

Osservazione 1 Si noti che nella definizione di punto di accumulazione non è richiesto che $x_0 \in A$. \square

Esercizio 1 Provare che 1 è di accumulazione per $A = [0, 1[$. \square

Esercizio 2 Provare che $\sqrt{3}$ non è punto di accumulazione per \mathbb{N} . \square

Siamo finalmente in grado di dare la definizione di limite. La definizione di limite che adotteremo è la seguente:

Definizione 2 Sia data $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano dati $x_0 \in \mathbb{R}$ ed $l \in \mathbb{R}$. Supponiamo che x_0 sia di accumulazione per A . Diremo che f ha limite l per x tendente a x_0 se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A \ (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon) . \square$$

Se la condizione sopra indicata è soddisfatta, useremo la notazione $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, oppure scriveremo $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} l$ o anche solo $f(x) \rightarrow l$ se non vi è ambiguità possibile.

Dopo aver visto la definizione, proviamo subito il risultato che ci si aspetta, cioè l'unicità del limite

Teorema 1 Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per A , $l, l' \in \mathbb{R}$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l'$, allora $l = l'$. \square

Dimostrazione Abbiamo a disposizione entrambe le seguenti relazioni:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A \ (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon' > 0 \exists \delta' > 0 \text{ t.c. } \forall x' \in A \ (0 < |x' - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x') - l'| < \varepsilon')$$

Sia ε'' un qualsiasi numero reale positivo. Posto $\varepsilon = \varepsilon''/2$, otteniamo un $\delta > 0$; similmente, $\varepsilon' = \varepsilon''/2$ ci offre un $\delta' > 0$. Scelto $\delta'' = \min\{\delta, \delta'\}$, possiamo affermare che:

$$\forall x \in A \ (0 < |x - x_0| < \delta'' \Rightarrow |f(x) - l| < (\varepsilon''/2))$$

$$\forall x' \in A \ (0 < |x' - x_0| < \delta'' \Rightarrow |f(x') - l'| < (\varepsilon''/2))$$

Poiché x_0 è di accumulazione per A , siamo sicuri che esiste un elemento di A , che possiamo indicare con x'' , t.c. $0 < |x'' - x_0| < \delta''$. Allora, per tale x'' si ha:

$$|f(x'') - l| < \varepsilon''/2$$

$$|f(x'') - l'| < \varepsilon''/2 .$$

Da cui, sommando membro a membro e usando la disuguaglianza triangolare:

$$|l - l'| = |f(x'') - l - l' - f(x'')| \leq |f(x'') - l| + |f(x'') - l'| < \varepsilon'' .$$

Abbiamo quindi ottenuto che, dato un qualsiasi numero reale positivo ε'' , si ha che $|l - l'| < \varepsilon''$. Allora non può essere altro che $l = l'$. \square

Osservazione 2 Si noti il ruolo fondamentale avuto nella dimostrazione dal fatto che x_0 fosse punto di accumulazione per A . \square

Concludo con una definizione che fornisce una condizione sufficiente affinché un punto sia di accumulazione.

Definizione 3 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$. Diciamo che x_0 è un punto interno ad A se $\exists \delta > 0$ t.c. $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq A$. \square

Osservo che, contrariamente a quanto succede per i punti di accumulazione, un punto per essere interno ad A deve obbligatoriamente appartenere ad A . Ad esempio, l'intervallo $]a, b]$ ha a come punto di accumulazione anche se $a \notin]a, b]$; però a non è un punto interno ad $]a, b]$.

Che un punto interno ad A sia anche di accumulazione per A è "straovvio". Lo formalizzo come teorema solo per richiamarvi l'attenzione.

Teorema 2 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ ed x_0 punto interno ad A . Allora x_0 è di accumulazione per A . \square

Dimostrazione Sia $\delta' > 0$. Per ipotesi $\exists \delta'' > 0$ t.c. $]x_0 - \delta'', x_0 + \delta''[\subseteq A$. Quindi, detto $\sigma = \min\{\delta'/2, \delta''/2\}$, $x_0 + \sigma \in A$ e $0 < |(x_0 + \sigma) - x_0| < \delta'$. \square

4. Caratterizzazione del limite mediante successioni e sue conseguenze

Questo paragrafo ci permetterà di sfruttare per le funzioni vari risultati a suo tempo provati per le successioni: costituisce anche una sorta di ricompensa per lo sforzo fatto con le successioni.

Si tratta di ricondurre il limite di una funzione al limite di successioni.

L'idea è abbastanza semplice: se $f(x)$ tende ad l quando x tende a x_0 , se io ho una successione x_n che tende ad x_0 , dovrei ottenere di conseguenza che la successione $f(x_n)$ tenda ad l . E questo dovrebbe valere per qualunque successione x_n che tenda ad x_0 . In effetti così è (con qualche doverosa precisazione, però). La cosa interessante è che rende molto più utile questo discorso è che vale anche il viceversa. Cioè se so che $f(x_n)$ tende ad l per ogni successione x_n che tende a x_0 , posso dedurre che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Questo tipo di considerazioni sono riassunte nel seguente teorema, molto utile ma con un enunciato e una dimostrazione un pò intricate.

Teorema 1 (caratterizzazione del limite mediante successioni) Siano dati $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per A . Allora è:

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \right) \quad \text{se e solo se}$$

$$\left(\forall \text{ successione } \underbrace{\left(\begin{array}{l} x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ x_n \rightarrow x_0 \quad \text{e} \\ x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right)}_{(*)} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l \right) . \square$$

Dimostrazione Dobbiamo dimostrare una proposizione del tipo $p \Leftrightarrow q$. Come si fa spesso, dimostriamo $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$. Dimostro dapprima $p \Rightarrow q$ o, come si usa anche dire, dimostro " \Rightarrow ".

Sia quindi x una successione soddisfacente le condizioni elencate nel teorema. Dobbiamo dimostrare che $f(x_n) \rightarrow l$. Tradotto in "formule", sappiamo che $x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \nu' \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n' \in \mathbb{N} \quad (n' > \nu' \Rightarrow |x_{n'} - x_0| < \varepsilon')$$

Sappiamo inoltre che:

$$\forall \varepsilon'' > 0 \quad \exists \delta'' > 0 \quad \text{t.c.} \quad \underbrace{\left(\forall x'' \in A \quad (0 < |x'' - x_0| < \delta'' \Rightarrow |f(x'') - \ell| < \varepsilon'') \right)}_{(*)}$$

Dobbiamo ottenere che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \nu \Rightarrow |f(x_n) - \ell| < \varepsilon)$$

Sia dunque dato il solito $\varepsilon > 0$. Prendiamo $\varepsilon'' = \varepsilon$. Da questo ε'' ricaviamo (almeno) un δ'' . Scegliamo $\varepsilon' = \delta''$. Allora abbiamo a disposizione un ν' t.c. per $n' > \nu'$ si ha $|x_{n'} - x_0| < \varepsilon'$. Poiché abbiamo anche che $x_n \in A$ e $x_n \neq x_0$, da (*) possiamo dedurre che (sempre per $n' > \nu'$) si ha $|f(x_{n'}) - \ell| < \varepsilon$.

Abbiamo quindi ottenuto quel che volevamo (dato ε , prendiamo $\nu = \nu'$).

Passiamo ora al " \Leftarrow ". Cioè a $q \Rightarrow p$. Dimostriamo la contronominale. Ovverossia proviamo che $\neg p \Rightarrow \neg q$.

Supponiamo di avere $\neg p$, cioè supponiamo non sia $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$. Allora abbiamo che

$$\exists \sigma > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall \tau > 0 \quad \exists x \in A \quad \text{t.c.} \quad \underbrace{\left(0 < |x - x_0| < \tau \quad \text{e} \quad |f(x) - \ell| \geq \sigma \right)}_{(**)}$$

Fissiamo allora un σ siffatto. Dato $n \in \mathbb{N}$, consideriamo $\tau = 1/n$. Possiamo affermare quindi che $\exists x \in A$ t.c. valga (**). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ ne scegliamo uno di questi e lo indichiamo con x_n . In questo modo otteniamo una successione, il cui termine generale è appunto x_n . Tale successione ovviamente è tale che $x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Inoltre è $x_n \neq x_0$ (da (**)) otteniamo che $0 < |x_n - x_0| < 1/n$). Da (**)) otteniamo, come appena notato, che $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ e quindi $|x_n - x_0| \rightarrow 0$ per il teorema dei due carabinieri, e quindi $x_n \rightarrow x_0$. Quindi la successione x_n è proprio una delle successioni di cui "parla" il teorema. Ciò nonostante, è $|f(x_n) - \ell| \geq \sigma$, il che impedisce ad $f(x_n)$ di tendere ad ℓ . Abbiamo ottenuto una successione t.c. la premessa scritta nella parentesi (*) è vera, ma la conseguenza è falsa. Quindi abbiamo provato che vale $\neg q$. □

E' valsa la pena di dimostrare questo teorema, perché ci permette di estendere facilmente al caso delle funzioni reali di variabile reale molti teoremi dimostrati per le successioni. Vediamo come, su un esempio.

Teorema 2 Siano $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per A . Siano $\ell, m \in \mathbb{R}$. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$,

allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)+g(x) = l+m$.□

Dimostrazione L'ipotesi, assieme al teorema 1, ci garantisce che valgono le seguenti due proposizioni:

$$\left(\begin{array}{l} \forall \text{ successione} \\ x' \end{array} \left(\begin{array}{l} x'_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ x'_n \longrightarrow x_0 \quad e \\ x'_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right) \Rightarrow f(x'_n) \longrightarrow l \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \forall \text{ successione} \\ x'' \end{array} \left(\begin{array}{l} x''_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ x''_n \longrightarrow x_0 \quad e \\ x''_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right) \Rightarrow g(x''_n) \longrightarrow m \right)$$

Il teorema II.8.1 ci consente di affermare che la tesi è equivalente a:

$$(\bullet) \left(\begin{array}{l} \forall \text{ successione} \\ x \end{array} \left(\begin{array}{l} x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ x_n \longrightarrow x_0 \quad e \\ x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right) \Rightarrow f(x_n)+g(x_n) \longrightarrow l+m \right)$$

Allora la dimostrazione è ovvia. Data una successione x soddisfacente le condizioni richieste in (\bullet) , prendiamo $x'_n = x''_n = x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e abbiamo che $f(x_n) \longrightarrow l$ e $g(x_n) \longrightarrow m$. Per il teorema sul limite di una somma di successioni abbiamo che $f(x_n)+g(x_n) \longrightarrow l+m$, che è appunto quanto ci serviva per ottenere la validità di (\bullet) .□

5. Estensioni della definizione di limite

Le funzioni reali di variabile reale consentono di fare un limite di tipo nuovo rispetto a quelli visti per le successioni, e cioè il limite per $x \longrightarrow x_0$. Per le successioni non abbiamo mai fatto un limite di questo tipo (per esempio per n che tende a 90), ma solo per $n \longrightarrow \infty$.

Esercizio 1 Provare che, qualunque sia $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, qualunque sia $x_0 \in \mathbb{N}$ e qualunque sia $\ell \in \mathbb{R}$, è soddisfatta la condizione (*) del § 3. Notare anche che \mathbb{N} non ha punti di accumulazione. \square

A proposito dei limiti di successioni, vale la pena di spendere due parole a proposito delle notazioni usate. Abbiamo usato la notazione $n \longrightarrow \infty$ (e la più "seria" $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$). Forse avremmo dovuto essere più precisi, usando la notazione $n \longrightarrow +\infty$, ma proprio perché avevamo considerato solo la possibilità che n diventasse "molto grande" e visto che eravamo all'interno dei numeri naturali, non è sembrato opportuno usare questa precisazione. Nei limiti di funzioni reali di variabile reale dovremo stare attenti, presumibilmente, e distinguere tra i limiti per $x \longrightarrow +\infty$, $x \longrightarrow -\infty$ e $x \longrightarrow \infty$.

Non c'è comunque solo questa novità, per i limiti di funzioni rispetto ai limiti di successioni. Oltre alla possibilità di fare il limite per $x \longrightarrow x_0$, c'è anche quella di fare il limite per $x \longrightarrow x_0$ "da destra" o "da sinistra". Grosso modo, fare il limite per $x \longrightarrow x_0$ da sinistra (ovverossia fare il limite per $x \longrightarrow x_0^-$), consiste nel guardare solo a cosa fa f a sinistra di x_0 , disinteressandosi di quel che succede a destra.

La definizione di questi limiti, da destra e da sinistra, è facile da dare. Occorre però non cadere in un trabocchetto. Consideriamo per esempio $A = [0,1]$. Naturalmente 1 è di accumulazione per A , quindi ha senso domandarsi se $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, per una qualsiasi f definita su A . Ha anche senso chiedersi cosa faccia f per x che tende a x_0 da sinistra, ma non ha senso evidentemente domandarsi quale possa essere il limite di f per x che tende a x_0 da destra. Detto altrimenti, data $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, il fatto che x_0 sia un punto di accumulazione per A non è sufficiente a garantire che abbia senso considerare il limite di f per x che tende a x_0 da destra (o da sinistra). Ci vuole qualcosa di più.

Definizione 1 Siano dati $A \subseteq \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$. Diremo che x_0 punto di

accumulazione per A da sinistra (rispettivamente: da destra) se $\forall \delta > 0$
 $\exists x \in A$ t.c. $0 < x_0 - x < \delta$ (rispettivamente: $0 < x - x_0 < \delta$). \square

Possiamo quindi introdurre la seguente:

Definizione 2 Siano dati $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per A da sinistra (rispettivamente: da destra), $l \in \mathbb{R}$. Diremo che l è il limite di f per x tendente a x_0 da sinistra (rispettivamente: da destra) se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A \ (0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon),$$

(rispettivamente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A \ (0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)). \square$$

Useremo la notazione $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ per dire che l è il limite di f da sinistra in x_0 , ovvero sia che l è il limite di $f(x)$ per x tendente a x_0 da sinistra, o anche che l è il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow x_0$. Si usa anche la scrittura abbreviata $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} l$. Naturalmente cose analoghe valgono da destra.

Queste considerazioni, e la notazione x_0^- , penso abbiano ricordato che per le successioni avevamo dato la definizione di limite l^+ ed l^- . Naturalmente possiamo semplicemente replicare il tutto per funzioni. Diremo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^+$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A \ (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow 0 \leq f(x) - l < \varepsilon).$$

Possiamo anche mettere assieme le cose, definendo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l^+$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A \ (0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow 0 \leq f(x) - l < \varepsilon).$$

Non c'è solo questo. C'è una varietà pressoché sterminata di limiti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^-$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, etc., etc.

Non ha senso pensare di dare una definizione per ognuno dei casi! E' più facile trovare una regola "automatica" per generare la definizione.

Tutto è basato sulla osservazione che la definizione di limite per funzioni reali di variabile reale ha la seguente struttura:

$\lim_{x \rightarrow \blacksquare} f(x) = \star$ avrà una definizione del tipo:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A \ (\blacksquare \Rightarrow \star).$$

Dove al posto di " \blacksquare " ci sarà una condizione che esprime (tramite δ) la "vicinanza" di x al "punto" \blacksquare nel quale vogliamo calcolare il limite, ed ana-

logamente al posto di " \star " c'è invece una condizione che esprime (tramite ε) la "vicinanza" di $f(x)$ al limite \star .

Ad esempio, se $\star = +\infty$, come faccio ad esprimere la "vicinanza" di $f(x)$ a $+\infty$? Così: mettiamo $f(x) > \varepsilon$ al posto di " \star ". Questo "algoritmo" va bene sempre. Sia che facciamo il limite in $\blacksquare = x_0$, o in $\blacksquare = -\infty$, o in $\blacksquare = x_0^+$, etc.

Analogamente, se $\blacksquare = x_0^-$, abbiamo che al posto di " \blacksquare " metteremo $0 < x_0 - x < \delta$. E così via ...

Non va dimenticata però una cosa: ogni "punto" che mettiamo al posto di \blacksquare richiede una condizione preliminare soddisfatta, e cioè che vi siano punti di A (distinti da \blacksquare , se ha senso) "vicini" quanto si voglia a \blacksquare . Quindi, per esempio, se $\blacksquare = +\infty$, richiederemo come condizione preliminare che $\forall \delta > 0$ vi sia $x \in A$ che soddisfa la condizione " \blacksquare ", e cioè $x > \delta$: essendo $\blacksquare = +\infty$, e cioè non un numero reale, non abbiamo da aggiungere la condizione che sia $x \neq \blacksquare$.

Esercizio 2 Provare a dare qualche definizione di limite. \square

Quello che abbiamo appena visto, con i \blacksquare e \star , appare come un gioco puramente formale, un "trucco" per trattare in modo unitario vari casi di limite. Come spesso succede, c'è della sostanza dietro alle forme. Vale a dire, ogni particolare definizione di limite (per esempio $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell^-$) può essere vista come la specificazione in un dato caso di una idea generale. Ora, l'idea generale è che un "limite" esprime il fatto che, mentre " x tende a \blacksquare ", allora " $f(x)$ tende a \star ". Come si vede, entrambe le frasi tra virgolette sono centrate sull'idea di "tendere" o "avvicinarsi a". E questo sia per la "variabile indipendente" x che per la "variabile dipendente" y , che è uguale a $f(x)$. Allora il concetto fondamentale da esprimere è quello di "tendere a". Se per esempio ci interessa l'idea di tendere a t_0 , ci occorrerà un modo per stimare la "distanza" di un punto t da t_0 : visto che la distanza tra i due punti è $|t - t_0|$, un numero reale positivo σ è tutto quello che ci occorre per poter dire che la distanza è "minore di σ "; cioè la condizione che ci interessa è $|t - t_0| < \sigma$.

Questo vale per la variabile indipendente (la x , come di solito si usa indicarla), e allora ritroveremo la condizione $|x - x_0| < \delta$, usando come è nella tradizione la lettera greca delta; vale anche per la variabile dipendente, nel qual caso si avrà la condizione $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ (a noi interessa infatti una stima della distanza tra il numero reale ℓ e il valore assunto dalla f in corrispondenza del punto x).

Le precedenti considerazioni valgono, *mutatis mutandis*, quando ci interessa esprimere che qualcosa "tende" a $+\infty$ (o a $-\infty$, o a $+\infty$). In tal caso, non possiamo esprimere la distanza tra la t e $+\infty$ come $|t-(+\infty)|$, visto che non sappiamo fare la sottrazione tra t e $+\infty$ (per meglio dire, non ci abbiamo neanche provato). Non è necessario essere aquile, però, per riuscire a trarsi d'impaccio: in fondo, dire che t "tende" a $+\infty$ è esprimibile dicendo che t "tende" a diventare "grosso". Allora, esprimeremo questo fatto con questa semplice relazione: $t > \sigma$, dove σ ci dà, come prima, una misura di quanto "grosso" prendiamo t . Esattamente come prima, possiamo sfruttare questa idea sia per la variabile indipendente che per la variabile dipendente: quindi, se ci interessa il limite per " x che tende a $+\infty$ ", ci imatteremo nella relazione $x > \delta$; se vogliamo parlare invece di " $f(x)$ che tende a $+\infty$ ", avremo a che fare con la relazione $f(x) > \varepsilon$.

6. La proprietà di limite è una proprietà locale

L'idea di limite è fondata sullo studio di cosa fa f "vicino" a x_0 . Può anche essere prevedibile quindi che il limite di f in x_0 non dipenda dai valori che f assume in punti "lontani" da x_0 . Come forse qualcuno ha già cominciato a sospettare, ci troviamo di fronte a una difficoltà non del tutto nuova: si sente un po' di somiglianza con la storia degli " ε piccoli". E, visto che quella questione è stata in qualche modo sistemata, possiamo ragionevolmente sperare che essa ci offra utili insegnamenti anche per questo nuovo problema.

Supponiamo di essere interessati al limite di f in x_0 . Potremmo pensare di fissare $\sigma > 0$ e osservare che una definizione equivalente di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ è la seguente:

$$(*) \quad \forall \varepsilon \in]0, \sigma[\quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in A \quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon).$$

Ciò tuttavia non rende pienamente conto di quello che stiamo facendo. E' meglio adottare un altro punto di vista. Sia quindi dato sempre $\sigma > 0$. Consideriamo $f|_{]x_0 - \sigma, x_0 + \sigma[\cap A}$, ovvero sia la restrizione di f a $]x_0 - \sigma, x_0 + \sigma[\cap A$. Chiamiamo E l'insieme $]x_0 - \sigma, x_0 + \sigma[\cap A$, per avere una notazione meno pesante. Scriviamo quindi $f|_E$. Questa è una nuova funzione, anche se ovviamente "imparentata" con f : chiamiamola g . Quel che succede è che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ è come dire $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$. Perché? Naturalmente proprio perché (*), che è equivalente alla definizione di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, è anche evidentemente equivalente a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$.

A questo punto occorre un momento di attenzione. Cosa ho guadagnato ad introdurre g , cioè la restrizione di f a E ? Sembrerebbe nulla, perché in fondo poi la conclusione è basata sulla osservazione che per f (*) è equivalente alla definizione di limite. In realtà, l'introduzione di $f|_E$ è estremamente utile perché offre un punto di vista molto fruttuoso. Per capirlo, basta osservare il seguente:

Esempio 1 Sia $f(x) = [x]$. Quanto fa $\lim_{x \rightarrow 7/2} f(x)$? Osserviamo che, se prendiamo $\sigma = 1/2$, abbiamo che $E =]3, 4[$ e che $f|_E(x) = 3 \quad \forall x \in E$. Se consideriamo $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita come $h(x) = 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, è ovvio che $\lim_{x \rightarrow 7/2} h(x) = 3$, poiché h è una costante. Ebbene, $h|_E = f|_E$! Quindi abbiamo che :

$$\lim_{x \rightarrow 7/2} h(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 7/2} h|_E(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 7/2} f|_E(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 7/2} f(x) = 3$$

Abbiamo ottenuto in modo molto rapido il valore del limite di f in $7/2$, osservando che sia f che un'altra funzione molto semplice hanno la stessa restrizione a $]x_0 - \sigma, x_0 + \sigma[\cap A$, per un σ opportuno. \square

E' immediato estendere le considerazioni fatte per il limite in x_0 ai limiti da sinistra o da destra (useremo $]x_0 - \sigma, x_0[\cap A$ e rispettivamente $]x_0, x_0 + \sigma[\cap A$) ed anche a $+\infty$ (con $] \sigma, +\infty[\cap A$), etc. Ciò ci consente di esaminare il seguente

Esempio 2 Sia $f(x) = [x]$. E sia $x_0 = 3$. Quanto fa $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$? Scelto $\sigma = 1$, abbiamo che $f|_E(x) = 3$ per ogni $x \in E =]3, 4[$. Ma allora

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f|_E(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} h|_E(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = 3,$$

dove h è la funzione costantemente uguale a 3 già usata nell'esempio precedente. \square

Concludo questo paragrafo con una precisa formalizzazione di quanto ho scritto finora, anche perché non bisogna dimenticare che anche il fatto di essere di accumulazione è una proprietà locale, osservazione che in realtà avrebbe dovuto essere fatta fin dall'inizio, riguardando un "prerequisito" affinché si possa parlare di limite.

Teorema 1 Siano dati $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$. Se $\exists \sigma > 0$ t.c. $(]x_0 - \sigma, x_0 + \sigma[\cap A) \setminus \{x_0\} = (]x_0 - \sigma, x_0 + \sigma[\cap B) \setminus \{x_0\}$, allora x_0 è punto di accumulazione per A se e solo se lo è per B . \square

Esercizio 1 Scrivere l'enunciato di un teorema analogo riguardante i punti di accumulazione da sinistra. \square

Teorema 2 Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ed $l \in \mathbb{R}$. Se $\exists \sigma > 0$ t.c.

$$\left\{ \begin{array}{l} A' \stackrel{\text{def}}{=} (]x_0 - \sigma, x_0 + \sigma[\cap A) \setminus \{x_0\} = (]x_0 - \sigma, x_0 + \sigma[\cap B) \setminus \{x_0\} \stackrel{\text{def}}{=} B', \\ f|_{A'} = g|_{B'}, \end{array} \right.$$

allora è

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l. \square$$

Le dimostrazioni di questi teoremi sono ovviamente lasciate al lettore, come

il compito di formulare le versioni del teorema 2 per gli altri tipi di limiti.

7. Limiti di funzioni monotone

Concludo la parte che riguarda i limiti, prima di passare alla seconda parte dedicata alla continuità, con un risultato che estende direttamente alle funzioni il teorema II.12.1.

Così come è capitato per le successioni, questa è la prima volta che usiamo in modo essenziale l'assioma di completezza.

Teorema 1 Sia $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per A . Se f è debolmente crescente su $A \cap]-\infty, x_0[$, allora esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, e si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup(f(A \cap]-\infty, x_0[))$. \square

Dimostrazione Naturalmente l'uguaglianza va intesa nel senso che, se $\sup(f(A \cap]-\infty, x_0[)) = \lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$; se invece $f(A \cap]-\infty, x_0[)$ non è superiormente limitato³, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

La dimostrazione di questo teorema è un adattamento immediato della dimostrazione del teorema II.12.1.

Supponiamo $f(A \cap]-\infty, x_0[)$ sia superiormente limitato. Sia $\lambda = \sup(f(A \cap]-\infty, x_0[))$. Dato $\lambda - \varepsilon$, esso non è più il sup. Quindi $\exists \bar{x} \in A \cap]-\infty, x_0[$ t.c. $f(\bar{x}) > \lambda - \varepsilon$. Se prendiamo $\delta = x_0 - \bar{x}$, abbiamo che $\forall x \in A$ ($0 < x_0 - x < \delta$) $\Rightarrow \lambda - \varepsilon \leq f(\bar{x}) \leq f(x) \leq \lambda$. E quindi la condizione di limite è soddisfatta. Il caso in cui $f(A \cap]-\infty, x_0[)$ non è superiormente limitato si dimostra in modo analogo. \square

Osservazione 1 In realtà abbiamo dimostrato che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda^-$. \square

³ Come già detto, ciò viene per consuetudine indicato brevemente dicendo che il suo sup è $+\infty$.

8. Definizione di continuità in un punto

Cosa vuol dire che una funzione è continua in un punto x_0 ? Molto semplice. Significa che i due aspetti di cui parlavamo nel § 3 vanno d'accordo. Cioè: da una parte ho $f(x_0)$. Dall'altra $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Che i due aspetti vadano d'accordo, significa molto semplicemente che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ esiste e che è uguale a $f(x_0)$.

Effettivamente questa è l'idea di continuità di una funzione in un punto. Lungi da me dire che si tratta di qualcosa di intuitivo! Anche perché l'idea intuitiva casomai riguarda la continuità di una funzione su un intervallo. E' più naturale parlare di "discontinuità" in un punto. Quindi l'approccio seguito non è "spontaneistico". Ho solo cercato di rendere sensato un punto di vista che è il coronamento (almeno, finora) di uno sforzo durato secoli.

La definizione di continuità di f in un punto x_0 quindi si ottiene modificando opportunamente la definizione di limite per f in x_0 , che qui sotto riporto:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in A \quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon) .$$

La prima ovvia modifica da fare consiste nel sostituire $f(x_0)$ ad l : in fondo, non vogliamo proprio che il limite in x_0 coincida col valore di f in x_0 ? Naturalmente dobbiamo anche modificare i prerequisiti, richiedendo che $x_0 \in A$, sennò non possiamo considerare $f(x_0)$. E nella definizione possiamo, se ci fa piacere, eliminare la condizione $0 < |x - x_0|$, ovverossia che sia $x \neq x_0$, in quanto per $x = x_0$, $f(x) = f(x_0)$ e quindi è sicuramente soddisfatta la condizione $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Ripeto che si tratta di una modifica del tutto opzionale: in effetti non cambia nulla se nella definizione lasciamo ancora la condizione che sia $0 < |x - x_0|$. La definizione quindi diventa:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in A \quad (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) .$$

E' opportuno però soffermarsi ancora sui prerequisiti. Ricordo che, per poter "parlare" di limite, avevamo bisogno di avere a disposizione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{una } f: A \longrightarrow \mathbb{R} , \text{ con } A \subseteq \mathbb{R} \\ x_0 \in \mathbb{R} , \text{ con } x_0 \text{ di accumulazione per } A . \\ \text{un } l \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Ovviamente, il dato l non ci sarà più (è sostituito da $f(x_0)$). Come già notato, abbiamo invece bisogno del fatto che $x_0 \in A$. D'altro canto, ora non ci interessa più che x_0 sia di accumulazione per A , perché la condizione $0 <$

$< |x-x_0|$ è diventata irrilevante, essendo interessati ad $l = f(x_0)$. Pertanto non porremo più la condizione che x_0 sia di accumulazione per A . Riassumendo:

Definizione 1 (di funzione continua in un punto) Sia data $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Diremo che f è continua in x_0 se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A (|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon) . \square$$

Possiamo ora chiederci se la definizione di f continua in x_0 che abbiamo dato ha davvero la proprietà di fondere i due aspetti molte volte richiamati. Naturalmente per porre la questione in questi termini, deve avere senso il limite in x_0 , quindi una tale verifica si potrà fare solo se x_0 è punto di accumulazione per A . Abbiamo il seguente:

Teorema 1 Sia $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ e x_0 punto di accumulazione per A . Allora:

$$(f \text{ è continua in } x_0) \Leftrightarrow \left(\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \right) . \square$$

Dimostrazione Dimostriamo dapprima " \Rightarrow ".

Per ipotesi abbiamo che:

$$(\bullet) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in A (|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon) .$$

Vogliamo ottenere che:

$$(\blacktriangle) \quad \forall \varepsilon' > 0 \exists \delta' > 0 \text{ t.c. } \forall x' \in A (0 < |x'-x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x')-f(x_0)| < \varepsilon') .$$

Il che è iper-evidente (dato ε' , prendiamo $\varepsilon = \varepsilon'$ e $\delta' = \delta$).

Vediamo ora " \Leftarrow ".

Supponiamo che valga (\blacktriangle) . Ma allora è ovvio che si ha (\bullet) (dato ε , prendiamo $\varepsilon' = \varepsilon$ e $\delta = \delta'$; oltre a questo basta notare che, se $x = x_0$, allora $f(x) = f(x_0)$ e quindi $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$). \square

E nell'altro caso? Cioè quando x_0 non è di accumulazione e quindi non abbiamo a disposizione la definizione di limite, cosa significa che f è continua in x_0 ? La risposta è semplice e un po' drastica: nulla. Per chiarire per bene questo, abbiamo bisogno prima di una definizione.

Definizione 2 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ ed $x_0 \in A$. Se x_0 non è di accumulazione per A , allora x_0 si dice punto isolato di A . \square

Quindi, se x_0 è isolato, vuol dire che $\exists \delta > 0$ t.c. $]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap A = \{x_0\}$, cioè non ci sono in A altri punti vicini ad x_0 . Ebbene, si dimostra

facilmente il seguente risultato:

Teorema 2 Sia $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, x_0 punto isolato di A . Allora f è continua in x_0 . \square

Dimostrazione Basta usare la definizione di continuità:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in A \quad (|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon).$$

Dato ε , fissiamo δ t.c. $]x_0-\delta, x_0+\delta[\cap A \subseteq \{x_0\}$. Per tale δ è ovvio che vale $\forall x \in A \quad (|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon)$. \square

Naturalmente la cosa da notare nell'enunciato di questo teorema è che ogni funzione, qualsiasi valore assuma in un punto isolato x_0 , è continua in tale punto x_0 (indipendentemente dai valori che essa assume negli altri punti). Tale risultato non è per nulla sorprendente. Ritorno alla idea che continuità significa che i due aspetti, valore di f in x_0 e valori che assume nei punti "vicini", vanno d'accordo. Se non ci sono punti vicini ad x_0 , è ovvio che non c'è molto da andare d'accordo. In realtà, uno avrebbe anche potuto dire che, non essendovi punti "vicini" ad x_0 , non ha senso porre il problema della continuità di f in x_0 . E' un punto di vista questo più che rispettabile. La ragione della scelta, e cioè di definire la continuità anche nei punti isolati (e quindi, a questo punto, dire che si ha automaticamente la continuità in tali punti) sta nel fatto che una definizione siffatta è più flessibile, è maneggevole con maggior confidenza. Proponrò, dopo il teorema 9.3, un esempio che rende conto di quanto ho affermato: vedasi l'osservazione 9.1.

9. Conseguenze elementari della continuità in un punto

Vi è tutta una serie di risultati (continuità della somma, del prodotto, teorema di permanenza del segno, etc.) la cui dimostrazione è una ovvia conseguenza delle analoghe proprietà dimostrate per i limiti, tenuto conto del teorema 8.1. Naturalmente ciò è valido per i punti che sono di accumulazione per A : per gli altri punti però non c'è alcun problema perché nei punti isolati la continuità è automatica. Comunque, tali risultati si possono ottenere anche dalla caratterizzazione della continuità mediante successioni.

Teorema 1 (caratterizzazione della continuità mediante le successioni) Siano dati $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Allora è:

$$\left(f \text{ è continua in } x_0 \right) \quad \text{se e solo se} \\ \left(\forall \text{ successione } \left(\begin{array}{l} x \\ x_n \longrightarrow x_0 \end{array} \right) \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x_0) \right) . \square$$

Tralascio la dimostrazione, che è un semplice adattamento della dimostrazione del teorema 4.1. Vorrei solo vedere, a mo' di esempio, come si possa usare questo teorema per ottenere un interessante risultato.

Teorema 2 Sia $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Se f è continua in x_0 , allora anche $|f|$ lo è. \square

Dimostrazione Naturalmente $|f|$ è la funzione definita su A nel modo seguente: $|f|(x) = |f(x)| \quad \forall x \in A$. Allora, sia $x_n \longrightarrow x_0$. Per la continuità di f , $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$. Per una proprietà dei limiti di successioni, posso affermare che $|f(x_n)| \longrightarrow |f(x_0)|$. Poiché questo vale per qualsiasi successione x t.c. $x_n \longrightarrow x_0$, posso asserire la continuità di $|f|$ in x_0 . \square

Una conseguenza più importante è il seguente:

Teorema 3 (continuità della funzione composta) Siano dati: $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $g:B \longrightarrow \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$. Supponiamo che $f(A) \subseteq B$, che f sia continua in x_0 e che g sia continua in $f(x_0)$. Allora $g \circ f$ è continua in x_0 . \square

Dimostrazione Assolutamente banale usando la caratterizzazione della continuità mediante successioni. Sia quindi data $x_n \longrightarrow x_0$: dobbiamo provare

che $(g \circ f)(x_n) \longrightarrow (g \circ f)(x_0)$. La continuità di f in x_0 ci garantisce che $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$. Poiché la successione di termine generale $f(x_n)$ converge al punto $f(x_0)$ e g è continua in tale ipotesi, la caratterizzazione della continuità mediante successioni, applicata a g in $f(x_0)$, ci dice che $g(f(x_n)) \longrightarrow g(f(x_0))$, cioè proprio quel che volevamo. \square

Osservazione 1 Consideriamo $f(x) = \sin^2(x) - 1$ e $g(x) = \sqrt{x}$. La funzione composta risulta essere definita solo nei punti in cui $\sin(x) = \pm 1$, cioè i punti del tipo $(\pi/2) + k\pi$. Quindi tutti i punti del suo insieme di definizione sono punti isolati. Grazie al teorema, possiamo essere sicuri che sia continua in tali punti. Se avessimo limitato la definizione di continuità ai punti di accumulazione, avremmo dovuto dare un enunciato del teorema di continuità della funzione composta più restrittivo, meno "user friendly". \square

10. Continuità di una funzione su un insieme

Cosa vuol dire che una funzione è continua su un certo insieme? La definizione è molto semplice

Definizione 1 Sia $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $B \subseteq A$. Diciamo che f è continua su B (o, indifferentemente, in B) se f è continua in ogni $x_0 \in B$. \square

Esempio 1 $f(x) = |x|$ è continua in \mathbb{R} ; $g(x) = 1/x$ è continua su tutto il suo insieme di definizione, che è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$, definita su \mathbb{R} , è continua su $B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $k(x) = [x]$, definita su \mathbb{R} , è continua su $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. \square

Bisogna stare attenti a non cadere in un trabocchetto. Sia data $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$, e sia $B \subseteq A$. Possiamo considerare la restrizione di f a B , $f|_B$. Che legame c'è tra la continuità di f su B e la continuità invece di $f|_B$ sul suo insieme di definizione, che naturalmente è B ? Un po' sorprendentemente si ha che la continuità di f su B implica la continuità di $f|_B$ sul suo insieme di definizione, ma non vale il viceversa. In realtà questo fatto può essere sorprendente se si ragiona in termini "analitici", ma non lo è affatto se si fa un semplice esempio, magari corredato da un disegno.

Esempio 2 Sia $f(x) = [x]$. E sia $B = [1,2[$. Abbiamo $f|_B(x) = 1 \quad \forall x \in B$. Quindi $f|_B$ è costante e vale 1, pertanto è continua su tutto il suo insieme di definizione, cioè B . Ma f non è continua su tutto B , perché non lo è in 1! Se si guarda la figura 6 si capisce subito perché.

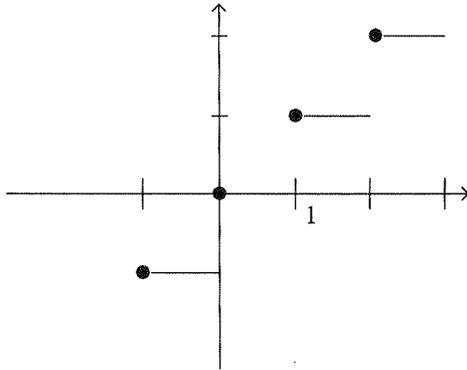


figura 6

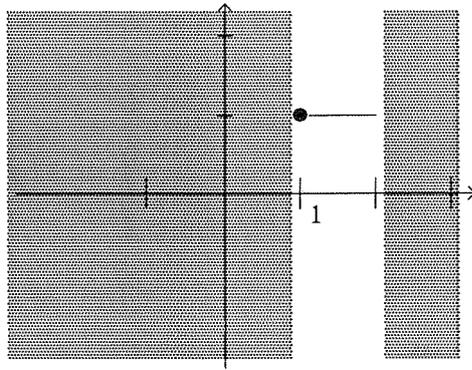


figura 7

La funzione f non è continua in 1 perché non c'è il limite in 1 (il limite da destra e quello da sinistra sono diversi). Invece, se ci limitiamo al solo insieme B , il punto 1 non ha punti "vicini a sinistra" e quindi abbiamo la continuità di $f|_B$ nel punto 1 . E' come se guardassimo al grafico di f ristretto solo alla striscia $[1, 2] \times \mathbb{R}$: se "copriamo" il resto del grafico che non ci interessa, come in figura 7, "vediamo" una funzione manifestamente continua in quanto costante. Se invece rimuoviamo la "copertura", la continuità "salta" in 1 . □

Osservazione 1 Nell'enunciato del teorema 9.3 ho supposto che fosse $f(A) \subseteq B$, in modo da poter considerare la composizione delle funzioni f e g . Quindi una condizione molto naturale. Ma in realtà spesso il quadro che ci si trova dinnanzi è diverso. Ad esempio, consideriamo $\sqrt{x^2-1}$. Cioè $f(x) = x^2-1$, $g(x) = \sqrt{x}$. E' $A = \mathbb{R}$, e $f(A) = [-1, +\infty[\not\subseteq [0, +\infty[= B$. E allora? Non possiamo usare il teorema? Certo che sì. Tutti sanno che in un caso come questo ci si riferisce alla funzione composta come funzione definita su A' , "il più grosso insieme t.c. $f(A') \subseteq B$ ". Ovverossia $A' = f^{-1}(B)$. Quindi si applica il teorema ad $f|_{A'}$, la quale sarà continua. Questo è quanto ho fatto, per esempio, nell'osservazione 9.1, senza farne esplicita menzione. □

11. Completezza di \mathbb{R} e continuità

In questo paragrafo proverò due importantissimi teoremi relativi alle funzioni continue su un intervallo. Quel che è particolarmente interessante di questi teoremi è che hanno un enunciato "intuitivamente evidente". Uno dice che una funzione f la quale sia continua su $[a,b]$ ha massimo e minimo su $[a,b]$: e sembra ragionevole. Ancora più ragionevole è l'altro teorema (detto degli zeri). Esso garantisce che una funzione continua su $[a,b]$, con $f(a) < 0$ ed $f(b) > 0$, si deve annullare in qualche punto di $[a,b]$. Cioè, deve esistere $c \in]a,b[$ t.c. $f(c) = 0$. Si guardi la figura 8 . Si provi ad unire i due punti $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$ con una "linea continua" (più precisamente, una linea che sia grafico di una funzione continua su $[a,b]$): si vedrà che, comunque si tracci il disegno, c'è per forza un punto in cui la "linea attraversa l'asse delle x ". Chiaramente, senza il requisito della continuità, questo non è affatto detto: si

veda la funzione $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } x \in [a, (a+b)/2] \\ 1 & \text{per } x \in](a+b)/2, b] \end{cases}$ il cui grafico è disegnato alla figura 9.

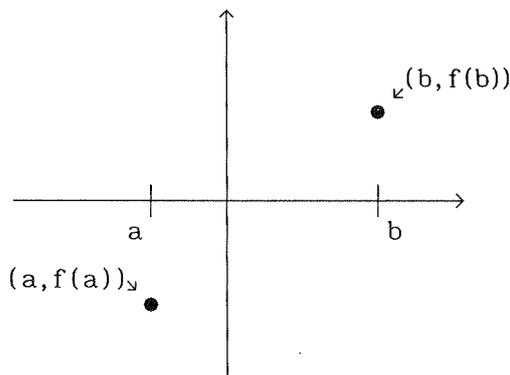


figura 8

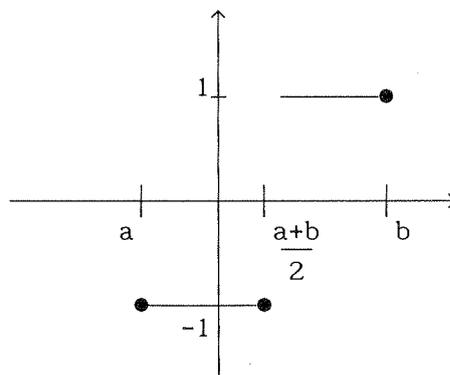


figura 9

Quindi il teorema degli zeri esprime una proprietà "intuitivamente evidente" delle funzioni continue. Di più. Invito a riflettere su come questa proprietà sia strettamente inerente all'idea stessa di continuità. Come vedremo, per ottenerla dovremo usare l'assioma 16, e cioè la completezza di \mathbb{R} . Anzi, di più. Vedremo poi un esempio che mostra come in \mathbb{Q} il "teorema degli zeri" sia falso: quindi senza la proprietà di completezza non riusciamo ad ottenere questo risultato. Morale, il teorema degli zeri ci dà una doppia conferma della giustezza della strut-

tura matematica che abbiamo elaborato per descrivere i fenomeni continui. Dico doppia perché essa dà una conferma a due aspetti distinti. Il primo aspetto riguarda i numeri reali: sono davvero, da questo punto di vista, la struttura matematica giusta da utilizzare (i razionali non vanno bene). Il secondo aspetto riguarda la continuità. Se andate a rileggere cosa dicevo nel § 8, vedrete che non avevo dato una giustificazione intuitiva della definizione di continuità adottata: avevo anzi dato delle ragioni per evitare questo approccio. Naturalmente ciò lasciava aperto il problema se la definizione matematica precisa data della continuità corrispondesse alla nostra idea intuitiva di continuità. E' proprio il teorema degli zeri che dà una importantissima conferma, a posteriori, della giustezza della scelta fatta per quel che riguarda la definizione di continuità. Già che siamo in argomento, dirò che i meriti principali della definizione di continuità che abbiamo dato stanno, oltre che nel riuscire a dimostrare questo teorema, nella grande praticità d'uso della nozione di continuità (somma, prodotto, composizione e, come vedremo, inversa di una funzione continua sono ancora funzioni continue). Non bisogna però pensare che la definizione di funzione continua sia l'"ideale". Vi sono degli esempi di funzioni continue che non rispondono minimamente all'idea intuitiva che noi abbiamo (dirò qualcosa a questo proposito nel capitolo IV dopo la definizione di derivata).

Passo ora, dopo tanti discorsi, alla parte formale. Comincio col teorema di Weierstrass.

Teorema 1 (di Weierstrass) Sia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua su $[a,b]$. Allora f ha massimo e minimo su $[a,b]$. \square

Dimostrazione Consideriamo $f([a,b])$. Dobbiamo dimostrare che questo sottoinsieme di \mathbb{R} ha massimo e minimo. Dimostrerò che ha massimo, in quanto il caso del minimo è perfettamente analogo (può anche essere notato che il massimo di f è l'opposto del minimo di $-f$: questo suggerisce un'altra strada per provare l'esistenza del minimo).

Due casi possono verificarsi, a priori: $f([a,b])$ è superiormente limitato o non lo è. Nel primo caso, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda = \sup f([a,b])$, in quanto $f([a,b]) \neq \emptyset$, essendo $[a,b] \neq \emptyset$ ⁴. Nel secondo caso non c'è il \sup : si usa dire, per convenzione, che $\sup f([a,b]) = +\infty$.

⁴ Ricordo quanto detto nell'osservazione I.4.1: salvo esplicito avviso contrario, assumo che sia $a < b$ quando parlo di intervalli.

Ebbene, proveremo che in entrambi i casi possiamo determinare una successione $x_n \in [a, b] \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e con $f(x_n) \longrightarrow \sup f([a, b])$. Cioè $f(x_n) \longrightarrow \lambda$ se $f([a, b])$ è superiormente limitato, $f(x_n) \longrightarrow +\infty$ altrimenti.

Nel primo caso, essendo $\lambda = \sup f([a, b])$, abbiamo che, dato $n \in \mathbb{N}$, $\exists y \in f([a, b])$ t.c. $\lambda - (1/n) < y \leq \lambda$. Ma allora c'è $x \in [a, b]$ t.c. $\lambda - (1/n) < f(x) \leq \lambda$. Scegliamo uno di questi x e indichiamolo con x_n . Abbiamo così la successione desiderata. Infatti, da $\lambda - (1/n) < f(x_n) \leq \lambda$ deduciamo subito per il teorema dei due carabinieri che $f(x_n) \longrightarrow \lambda$. Nel secondo caso, cioè se $f([a, b])$ non è superiormente limitato, vorrà dire che $\forall n \in \mathbb{N} \exists y \in f([a, b])$ t.c. $y > n$. E quindi otteniamo una successione $x_n \in [a, b]$ t.c. $f(x_n) > n$, per cui $f(x_n) \longrightarrow +\infty$, come era stato anticipato.

Abbiamo quindi a disposizione la successione $f(x_n)$ che è regolare. Soffermiamoci ora sulla successione di termine generale x_n . Non c'è nessuna ragione per cui possiamo affermare che converga. Però il teorema di Bolzano-Weierstrass ci assicura che ha una sottosuccessione estratta convergente. Cioè $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ ed $\exists k: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strettamente crescente t.c. $x_{k_n} \longrightarrow x_0$.

E' immediato notare che $x_0 \in [a, b]$: infatti è $a \leq x_{k_n} \leq b$ e quindi $a \leq x_0 \leq b$ per il teorema di permanenza del segno.

Usiamo finalmente la continuità di f per notare che, essendo $x_{k_n} \longrightarrow x_0$, sarà $f(x_{k_n}) \longrightarrow f(x_0)$. Notiamo anche che, essendo $f(x_{k_n})$ una sottosuccessione estratta da $f(x_n)$, avremo che $f(x_{k_n})$ avrà lo stesso limite di $f(x_n)$. Ma allora dovremo avere:

nel 1° caso $f(x_{k_n}) \longrightarrow f(x_0)$ e $f(x_{k_n}) \longrightarrow \lambda$, da cui per l'unicità del limite $f(x_0) = \lambda$, vale a dire che $\lambda \in f([a, b])$, e quindi che λ non solo è il sup, ma è in realtà il massimo di f su $[a, b]$ (e x_0 è il punto di massimo).

nel 2° caso, $f(x_{k_n}) \longrightarrow f(x_0)$ e $f(x_{k_n}) \longrightarrow +\infty$: queste sono due affermazioni tra loro contraddittorie, per cui il 2° caso in realtà non si può verificare. \square

Vorrei fare una osservazione sul "come si usa" questo teorema. Il problema è che quasi nessuna delle funzioni che ci si trova davanti è definita su un intervallo chiuso e limitato, però si è interessati all'esistenza o meno, per quella funzione, di un massimo o minimo su un certo intervallo $[a, b]$. Come fare? Il "trucco" è semplice. Sia data una funzione reale di variabile reale

$g: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Se g è continua su un intervallo $[a,b]$, allora $f = g|_{[a,b]}$ sarà anch'essa continua su $[a,b]$ e quindi basta applicare il teorema di Weierstrass a questa f , che rientra perfettamente nelle ipotesi del teorema. Vorrei osservare che astuzie di questo genere ricorrono spesso per colmare il divario che c'è tra l'enunciato di un teorema e quanto invece serve nella specifica sua applicazione.

Passiamo ora alla dimostrazione dell'altro importante teorema sulle funzioni continue.

Teorema 2 (degli zeri) Sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(a) < 0 < f(b)$. Allora $\exists c \in [a,b]$ t.c. $f(c) = 0$. \square

Dimostrazione La dimostrazione sfrutta un'idea molto semplice. Considero il punto di mezzo dell'intervallo $[a,b]$, e cioè $(a+b)/2$. Se $f((a+b)/2) = 0$, ho finito. Se non sono così fortunato, sarà $f((a+b)/2) < 0$ oppure $f((a+b)/2) > 0$. Nel primo caso, considero l'intervallo $[(a+b)/2, b]$, nel secondo l'intervallo $[a, (a+b)/2]$: in entrambi i casi mi ritrovo di nuovo nella stessa condizione di partenza. Cioè, la f assume valore strettamente minore di zero nel primo estremo e maggiore di zero nel secondo. Se ho fiducia nella validità di questo teorema, mi aspetto che f si annulli in qualche punto di questo intervallo, visto che mi ritrovo con le ipotesi di partenza soddisfatte con questo nuovo intervallo. Solo che ora la lunghezza dell'intervallo è metà di quello di partenza. Allora l'idea è: itero la procedura. Così facendo, dovrei riuscire ad "intrappolare" un punto in cui la f si annulla, "stringendolo" dentro intervalli sempre più piccoli. In effetti, funziona. Vediamo quindi la dimostrazione formale.

Intendo formalizzare completamente la dimostrazione a scopi esplicativi (per far capire che bisogna stare attenti a dire: "e così via..."). In effetti, l'idea è semplice, ma ci accorgeremo che l'eventualità "fortunata" che f si annulli in uno dei punti della suddivisione rende molto complicata la formalizzazione precisa.

Potrei procedere nel modo seguente.

Definisco per induzione due successioni $\alpha, \beta: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, tali da soddisfare le seguenti proprietà:

- (1) $\alpha_1 = a$, $\beta_1 = b$
- (2) $\alpha_n < \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (3) $\beta_n - \alpha_n = (b-a)/2^{n-1}$

$$(4) \quad f(\alpha_n) < 0 < f(\beta_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Proverò inoltre che:

$$(5) \quad \alpha \text{ è debolmente crescente e } \beta \text{ è debolmente decrescente.}$$

L'idea è che chiamerò $[\alpha_1, \beta_1]$ l'intervallo di partenza $[a, b]$, poi $[\alpha_2, \beta_2]$ quello ottenuto dopo la prima suddivisione in due, e così via. Per

esempio, se $f(a) < 0 < f(\frac{a+b}{2})$, sarà $[\alpha_2, \beta_2] = [\alpha_1, \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}] = [a, \frac{a+b}{2}]$.

Se poi $f(\frac{\alpha_2 + \beta_2}{2}) < 0 < f(\beta_2)$, avremo:

$$[\alpha_3, \beta_3] = \left\{ \frac{\alpha_2 + \beta_2}{2}, \beta_2 \right\} = \left[\frac{\alpha_1 + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}}{2}, \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \right] = \left[\frac{a + \frac{a+b}{2}}{2}, \frac{a+b}{2} \right] .$$

E così via...

Se uno riflette un attimo sulle successioni α e β così ottenute, si rende conto che effettivamente la proprietà (1)+(5) sembrano essere ragionevoli.

Riprendiamo quindi il filo del discorso formale.

Naturalmente ho bisogno di definire α e β per $n=1$ e poi di definire il "passo induttivo".

BASE: definiamo $\alpha_1 = a$ e $\beta_1 = b$; è immediato constatare che la proprietà (1) è soddisfatta e che le proprietà (2)+(4) valgono per $n=1$.

PASSO INDUTTIVO: per ogni $n \in \mathbb{N}$, avendo a disposizione α_n e β_n e la validità della proprietà (2)+(4) per quel $n \in \mathbb{N}$, devo definire α_{n+1} e β_{n+1} e constatare che le proprietà (2)+(4) valgono anche per $n+1$. Considero il punto $(\alpha_n + \beta_n)/2$.

Se $f((\alpha_n + \beta_n)/2) < 0$, definisco $\alpha_{n+1} = (\alpha_n + \beta_n)/2$ e $\beta_{n+1} = \beta_n$.

Se $f((\alpha_n + \beta_n)/2) > 0$, definisco $\alpha_{n+1} = \alpha_n$ e $\beta_{n+1} = (\alpha_n + \beta_n)/2$.

Ma se $f((\alpha_n + \beta_n)/2) = 0$, cosa faccio? Invito lo studente diligente a riflettere su come si possa procedere. La dimostrazione prosegue nella pagina seguente.

Spero che sia chiaro dove è la difficoltà: se sono "fortunato" e trovo un punto in cui f vale zero durante la procedura di bisezione, non posso continuare a definire le successioni α e β in modo da rispettare le proprietà (1)÷(5). Uno potrebbe pensare che si possa "ammorbidire" il requisito (5), richiedendo solo che sia $f(\alpha_n) \leq f(\beta_n)$. Sfortunatamente questa facile via d'uscita non funziona: basti pensare al caso in cui $f(x) = x-1$ ed $a = 0$, $b = 2$: in tal caso, $f(1) = 0$ e, qualunque sia la metà dell'intervallo che scegliamo per continuare a definire α e β , lo "zero" di f ci scappa.

Ci troviamo di fronte ad una struttura molto comune in programmazione: abbiamo un ciclo iterativo con all'interno una condizione che prevede una uscita "laterale" dal ciclo.

Possiamo rimediare a questo con una migliore formalizzazione del processo induttivo, la quale tenga conto di questa possibilità di "uscita prematura dal ciclo".

Avviso per lo studente che sta per stufarsi: d'ora in poi inizia una formalizzazione corretta della dimostrazione.

Per dimostrare il teorema degli zeri, proviamo innanzi tutto la seguente affermazione:

$$\star \left\{ \begin{array}{l} \text{O definiamo per induzione due successioni soddisfacenti le proprietà} \\ \text{(1)÷(4), oppure troviamo un punto } d \in [a,b] \text{ t.c. } f(d) = 0 . \end{array} \right.$$

Procediamo naturalmente per induzione, come già avevamo iniziato a fare.

BASE: definiamo $\alpha_1 = a$ e $\beta_1 = b$; è immediato constatare che la proprietà (1) è soddisfatta e che le proprietà (2)÷(4) valgono per $n = 1$.

PASSO INDUTTIVO: per ogni $n \in \mathbb{N}$, avendo a disposizione α_n e β_n e la validità delle proprietà (2)÷(4) per quel $n \in \mathbb{N}$, devo definire α_{n+1} e β_{n+1} e constatare che le proprietà (2)÷(4) valgono anche per $n+1$. Considero il punto $(\alpha_n + \beta_n)/2$.

Se $f((\alpha_n + \beta_n)/2) < 0$, definisco $\alpha_{n+1} = (\alpha_n + \beta_n)/2$ e $\beta_{n+1} = \beta_n$.

Se $f((\alpha_n + \beta_n)/2) > 0$, definisco $\alpha_{n+1} = \alpha_n$ e $\beta_{n+1} = (\alpha_n + \beta_n)/2$.

Se $f((\alpha_n + \beta_n)/2) = 0$, allora poniamo $d = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}$.

Vediamo che la condizione (\star) è soddisfatta.

I casi sono due: o per qualche $n \in \mathbb{N}$ si ha $f((\alpha_n + \beta_n)/2) = 0$, e allora

sarà sufficiente chiamare $d = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}$, oppure è $f((\alpha_n + \beta_n)/2) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Si tratta ora di verificare che in questo secondo caso abbiamo a disposizione due successioni soddisfacenti (1)÷(4).

Intanto, la procedura descritta fornisce due successioni, cioè due applicazioni da \mathbb{N} in \mathbb{R} . Infatti α è definita in $1 \in \mathbb{N}$ ($\alpha_1 = a$) e, se α è definita in $n \in \mathbb{N}$, allora è definita in $n+1 \in \mathbb{N}$ (come $\alpha_{n+1} = \alpha_n$ oppure $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}$ a seconda che sia $f(\frac{\alpha_n + \beta_n}{2}) < 0$ oppure $f(\frac{\alpha_n + \beta_n}{2}) > 0$). Analogamente dicasi per β .

La condizione (1) è ovviamente soddisfatta.

Proviamo, per induzione, che la (2) è soddisfatta. Per $n=1$ è vero. Sia $n \in \mathbb{N}$: se $\alpha_n < \beta_n$, allora abbiamo due casi: $\alpha_{n+1} = (\alpha_n + \beta_n)/2$ e $\beta_{n+1} = \beta_n$ oppure $\alpha_{n+1} = \alpha_n$ e $\beta_{n+1} = (\alpha_n + \beta_n)/2$. Nel primo caso, possiamo asserire che $\alpha_n < \beta_n$ implica $\alpha_n + \beta_n < 2 \cdot \beta_n$ e quindi $(\alpha_n + \beta_n)/2 < \beta_n$, cioè $\alpha_{n+1} < \beta_{n+1}$. Il secondo caso è analogo.

Per la (3), essa è vera per $n=1$. Dato $n \in \mathbb{N}$, se è $\beta_n - \alpha_n = (b-a)/2^{n-1}$, per come sono definite α_{n+1} e β_{n+1} , si ha ovviamente che $\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} = (\beta_n - \alpha_n)/2$, cioè $\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} = (b-a)/2^n$.

La (4) è ovvia.

Abbiamo quindi provato la validità dell'affermazione (*).

Ricordo che l'obbiettivo è quello di provare l'esistenza di uno "zero" per f : ovviamente, se abbiamo trovato un d t.c. $f(d) = 0$, siamo a posto. Se così non è, abbiamo a disposizione le due successioni soddisfacenti le proprietà (1)÷(4). Vedremo di ricavare anche in questo caso uno "zero" per f .

Proviamo che vale la proprietà (5), cioè la monotonia di α e β (naturalmente, nel caso in cui non si abbia mai che $f(\frac{\alpha_n + \beta_n}{2}) = 0$). Anche questa la otteniamo per induzione. Per $n=1$, abbiamo che $\alpha_2 = \alpha_1$ oppure $\alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}$ a seconda dei casi; ma in ogni caso otteniamo $\alpha_2 \geq \alpha_1$. Se poi è dato $n \in \mathbb{N}$ e si ha $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$, si deduce che $\alpha_{n+1} \leq \alpha_{n+2}$ perché a seconda dei casi si avrà $\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1}$ oppure $\alpha_{n+2} = \frac{\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}}{2} \geq$ (per la (2)) $\geq \frac{\alpha_{n+1} + \alpha_{n+1}}{2} = \alpha_{n+1}$. E' così provato che α è debolmente crescente. Analogamente si ottiene la debole decre-

scenza di β .

Avere la monotonia di α e β ci serve per poter asserire che sono convergenti, purché siano limitate. Ma limitate lo sono: dalla (2) e dalla (5) otteniamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_1 \leq \alpha_n < \beta_n \leq \beta_1$; vale a dire che α è superiormente limitata da β_1 e che β è inferiormente limitata da α_1 .

Grazie al teorema II.12.1, possiamo affermare che $\exists \hat{\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ e $\hat{\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$.

Ma è $\beta_n - \alpha_n = (b-a)/2^{n-1}$, per la (3). Quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0$. Ne segue che $\hat{\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + (\beta_n - \alpha_n)) = \hat{\alpha}$. Cioè: le due successioni hanno lo stesso limite.

Per la continuità di f , $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha_n) = f(\hat{\alpha}) = f(\hat{\beta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta_n)$. Essendo $f(\alpha_n) < 0$ e $f(\beta_n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (per la (4)), il teorema di permanenza del segno ci permette di affermare che $f(\hat{\alpha}) \leq 0$ e $f(\hat{\beta}) \geq 0$. Ma è $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, quindi $f(\hat{\alpha}) = f(\hat{\beta})$. E quindi $f(\hat{\alpha}) = 0$.

Abbiamo quindi ottenuto lo "zero" che cercavamo per f . \square

12. Conseguenze del teorema degli zeri

La prima ovvia generalizzazione del teorema degli zeri che si può fare, consiste nell'osservare che in generale ogni valore reale compreso tra $f(a)$ e $f(b)$ sarà assunto da una funzione continua. Se abbiamo $y \in]f(a), f(b)[$ (supponiamo di essere nel caso in cui $f(a) < f(b)$), basterà considerare $g(x) = f(x) - y$ e applicare il teorema degli zeri a g . Suggestivo di fare un disegno per capire meglio l'idea. Si può anche dire di meglio: ogni numero reale y che sia compreso tra due valori u, v assunti dalla funzione, starà esso pure nell'immagine. Ma ancora di più si può enunciare una estensione del teorema degli zeri che ne coglie la "vera essenza". E cioè: se abbiamo una funzione continua definita su un intervallo, la sua immagine è ancora un intervallo. Dimostrare questo teorema è facilissimo, se però abbiamo capito davvero che cosa è un intervallo.

Definizione 1 Un sottoinsieme E di \mathbb{R} si dice intervallo se gode della seguente proprietà:

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad ((x, z) \in E \text{ e } x < y < z) \Rightarrow y \in E) . \square$$

Osservazione 1 L'uno o l'altro dei " $<$ " o entrambi possono essere sostituiti con " \leq ". \square

Spero che qualche attento lettore si sia accorto che c'è qualcosa che non va. E infatti abbiamo già dato la definizione di intervallo! Vedi definizione 1.4.2. Ora, non è lecito dare diverse definizioni della stessa cosa, sennò si crea confusione (a dir poco...). E' tollerabile solo se si dimostra che le due definizioni date sono equivalenti. E così è.

Teorema 1 I sottoinsiemi di \mathbb{R} che soddisfano a definizione 1 sono i seguenti:

$$\emptyset, \mathbb{R}, [a, b],]a, b[,]a, b], [a, b[,]-\infty, b],]-\infty, b[, [a, +\infty[,]a, +\infty[. \square$$

Dimostrazione Che tutti gli insiemi sopra elencati soddisfino la definizione 1 è immediato. Occorre dimostrare che non ce ne sono altri.

Sia allora E soddisfacente la definizione 1. Se $E = \emptyset$, non abbiamo nulla da dimostrare. Altrimenti, noto che si possono verificare quattro casi, esaustivi e mutuamente escludentesi.

- i) E è limitato
- ii) E non è limitato inferiormente ma è limitato superiormente

iii) E non è limitato superiormente ma è limitato inferiormente

iv) E non è limitato né superiormente né inferiormente

Dimostreremo allora che:

nel caso i) , \exists due numeri reali a, b , con $a \leq b$, t.c. $E = [a, b]$ oppure $E = [a, b[$ oppure $E =]a, b]$ oppure $E =]a, b[$;

nel caso ii) , \exists un numero reale b t.c. $E =]-\infty, b]$ oppure $E =]-\infty, b[$;

nel caso iii) , \exists un numero reale a t.c. $E = [a, +\infty[$ oppure $E =]a, +\infty[$;

nel caso iv) . $E = \mathbb{R}$.

Vedrò in dettaglio la dimostrazione del caso iii). La dimostrazione degli altri casi è analoga. Come preannunciato, si possono presentare due alternative: $E = [a, +\infty[$, oppure $E =]a, +\infty[$. La prima cosa da scoprire è che sia a . Poiché $E \neq \emptyset$ ed E è inferiormente limitato, esiste $\inf E$. Ed è proprio $\inf E$ il numero reale a che ci serve. Ovverossia, le due alternative sono: o $E =]\inf E, +\infty[$, oppure $E =]\inf E, +\infty[$. Da cosa dipende quale delle due si presenta? Da una circostanza: se $\inf E \in E$, in tal caso $E =]\inf E, +\infty[$; se $\inf E \notin E$, allora $E =]\inf E, +\infty[$.

Vediamo la prima alternativa. Ricapitoliamo un pò cosa abbiamo a disposizione. C'è $E \neq \emptyset$, che è inferiormente limitato, è $\inf E \in E$ ed E non è superiormente limitato. Voglio ottenere che $E =]\inf E, +\infty[$. E' ovvio che $E \subseteq]\inf E, +\infty[$. Per provare il viceversa, prendiamo $y \in]\inf E, +\infty[$ e proviamo che $y \in E$. Poiché E non è superiormente limitato, $\exists z \in E$ t.c. $y < z$. Ma allora possiamo applicare la definizione di intervallo: essendo $\inf E \leq y \leq z$, possiamo garantire che $y \in E$.

Anche nella seconda alternativa c'è solo da dimostrare che $] \inf E, +\infty[\subseteq E$. Dato $y \in] \inf E, +\infty[$, poiché $y > \inf E$, c'è $x \in E$ t.c. $x < y$. Come nella prima alternativa, ci sarà anche $z \in E$ t.c. $y < z$. Poiché $x < y < z$ ed $x, z \in E$, ne segue dalla definizione di intervallo che $y \in E$. \square

Il teorema degli zeri allora diventa:

Teorema 2 Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo di \mathbb{R} . Se f è continua su I , allora $f(I)$ è un intervallo. \square

Dimostrazione Siano $u, w \in f(I)$ e sia v t.c. $u < v < w$. Devo dimostrare che $v \in f(I)$. Poiché $u, w \in f(I)$, $\exists x, z \in I$ t.c. $u = f(x)$ e $w = f(z)$. Applico le considerazioni fatte all'inizio del paragrafo ad $f|_{[x, z]}$ (se $x < z$, sennò a $[z, x]$). Poiché $u = f(x) < v < f(z) = w$, c'è $y \in [x, z]$ t.c.

$f(y) = v$. Ma $[x,z] \subseteq I$ poiché $x,z \in I$ ed I è un intervallo. Quindi ho trovato $y \in I$ t.c. $f(y) = v$. Cioè $v \in f(I)$, come volevasi dimostrare. \square

13. Inversione di funzioni

Lo scopo principale di questo paragrafo è di dare conto di una terminologia usata in analisi che si discosta da quella standard. Si tratta delle funzioni invertibili. A livello "insiemistico", è noto che una funzione $f:A \longrightarrow B$ è invertibile, per definizione, se $\exists g:B \longrightarrow A$ t.c. $f \circ g = \text{Id}_B$ e $g \circ f = \text{Id}_A$ (naturalmente g si chiama inversa di f e si indica con f^{-1}). E' anche noto che una condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione sia invertibile è che sia bigettiva⁵. Invece in analisi è consuetudine dire che una funzione reale di variabile reale $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$ è invertibile se f è iniettiva. C'è quindi un contrasto di terminologia, non trascurabile in quanto riguarda una nozione fondamentale. La ragione di questa divergenza terminologica sta nel fatto che la nozione standard di funzione invertibile è poco "compatibile" con la nozione di funzione reale di variabile reale.

Una funzione reale di variabile reale è una $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$: quindi, se invertibile "insiemisticamente", la sua inversa dovrebbe essere $g:\mathbb{R} \longrightarrow A$, e quindi g non sarebbe una funzione reale di variabile reale, a meno che $A = \mathbb{R}$. Una tale restrizione è eccessiva, per gli usi dell'analisi. Ad esempio, il logaritmo non sarebbe definibile come inversa dell'esponenziale.

Cosa si fa, quindi? Sia $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$, iniettiva. Naturalmente, se come codominio prendiamo $f(A)$, otteniamo una funzione⁶, $\tilde{f}:A \longrightarrow f(A)$ che è anche suriettiva, e quindi bigettiva. Allora \tilde{f} è invertibile. Abbiamo quindi $(\tilde{f})^{-1}:f(A) \longrightarrow A$. A meno che non sia $A = \mathbb{R}$, questa funzione $(\tilde{f})^{-1}$ non sarà una funzione reale di variabile reale. Allora la modifico, semplicemente "allargando" il codominio, cioè considerando $(\tilde{f})^{-1}:f(A) \longrightarrow \mathbb{R}$, definita ovviamente come $(\tilde{f})^{-1}(x) = (\tilde{f})^{-1}(x) \quad \forall x \in f(A)$ (vedi nota precedente).

Notiamo che la funzione ottenuta alla fine di tutto questo rigiro, e cioè $(\tilde{f})^{-1}$, è una funzione reale di variabile reale. E che, anche se non è l'inversa di f in termini rigorosi, ne è però una parente assai prossima. Infatti è una

⁵ Si usa anche, come sinonimo, il termine "corrispondenza biunivoca".

⁶ Ovviamente $\tilde{f}(a) = f(a) \quad \forall a \in A$. Le indico però diversamente in quanto f ed \tilde{f} hanno un diverso codominio, e pertanto in termini rigorosi sono due funzioni diverse.

"gemella" di $(\tilde{f})^{-1}$, che è l'inversa di \tilde{f} , a sua volta "gemella" di f . Le uniche modifiche fatte sono state quelle di restringere il codominio nel passare da f a \tilde{f} e di allargare⁷ il codominio per passare da $(\tilde{f})^{-1}$ ad $\tilde{\tilde{f}}^{-1}$. Quindi abbiamo una funzione $\tilde{\tilde{f}}^{-1}$, che è una funzione reale di variabile reale che assomiglia molto ad una "inversa" di f . Ecco perché in analisi una funzione f , che sia solo iniettiva, viene chiamata invertibile, ed ecco perché la funzione $\tilde{\tilde{f}}^{-1}$ viene chiamata inversa di f . E, naturalmente, di consueto poi si usa semplicemente la notazione f^{-1} , anche se imprecisa, anziché la troppo pesante $\tilde{\tilde{f}}^{-1}$.

Tutta questa premessa per enunciare il seguente:

Teorema 1 Sia $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, f continua su I e strettamente crescente. Allora f è invertibile ed $f^{-1}: f(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ è strettamente crescente e continua. \square

Dimostrazione Fatte le premesse, doverose, riguardo alla terminologia, tutte le affermazioni di questo teorema sono molto facili da provare (e sono lasciate come esercizio al lettore), tranne la continuità. Per questa, un argomento molto convincente consiste nel ricordare che il grafico di f^{-1} si ottiene da quello di f usando come intermediari un paio di assi cartesiani e facendo una riflessione rispetto alla bisettrice del I e III quadrante. Questa però non è una dimostrazione. Non abbiamo provato un teorema che garantisca questa ovvia constatazione "grafica". Quindi occorre fare una dimostrazione, per la quale mi limito a rinviare al C-S. \square

⁷ Proprio perché si usano due specie di operazioni (restringimento/allargamento) tra di loro "rovesciate", ho usato l'accorgimento di mettere il segno \sim sopra in un caso e sotto nell'altro.

14. Conclusioni

Oggetto di studio di questo capitolo sono le funzioni reali di variabile reale. Dopo aver precisato con la definizione 1.1 che cosa siano, ho lasciato ampio spazio all'idea di grafico di una funzione e alla sua rappresentazione. Naturalmente, in questo capitolo l'attenzione si è soffermata sui limiti per funzioni reali di variabile reale. Ho dapprima visto il caso del limite finito in un punto x_0 , cercando di mettere in evidenza come il limite sia definito in modo da non avere nulla a che fare con il valore che f assume in x_0 .

Dopo aver provato vari risultati, ed avere inoltre esteso la definizione di limite in modo da coprire vari altri casi oltre a quello "standard" di " $l-x_0$ ", abbiamo visto la definizione di continuità.

L'idea di continuità in un punto è racchiusa semplicemente nel tentativo di conciliare il comportamento di limite con il valore assunto in quel punto: a costo di essere noioso, ribadisco che si tratta di dare concetti del tutto indipendenti tra loro.

Ho dimostrato varie conseguenze della proprietà di continuità in un punto e su un insieme, mostrando la maneggevolezza della nozione di continuità.

Il teorema di Weierstrass e il teorema degli zeri, infine, costituiscono un paio di risultati di evidente contenuto intuitivo (si veda quanto detto nelle conclusioni del precedente capitolo): è un successo per l'umanità essere stata in grado di elaborare una struttura matematica quale quella dei numeri reali, che permette di provare la validità di tali risultati.