

# Prestiti

ovvero: il cielo in una stanza

Appunti a cura di  
Fioravante PATRONE

<http://www.diptem.unige.it/patrone/default.htm>

versione del 13 maggio 2006

Fioravante PATRONE  
Dipartimento di Ingegneria della Produzione,  
Termoenergetica e Modelli Matematici  
P.le Kennedy - Pad D  
16129 Genova - ITALY  
[patrone@diptem.unige.it](mailto:patrone@diptem.unige.it)

<http://www.diptem.unige.it/patrone>  
<http://tdg.dima.unige.it>  
<http://www.citg.unige.it/citg.htm>  
<http://www.scallywag.it>

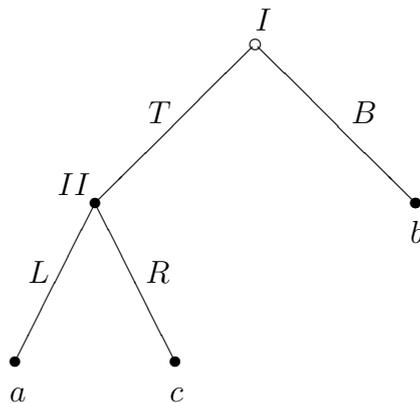
homepage  
web teaching  
web server "CITG"  
web page del gruppo  
Scallywag

Abbiamo una game form:

$I \backslash II$	$L$	$R$
$T$	$a$	$c$
$B$	$b$	$b$

Assomiglia al caso “essenziale” delle decisioni in condizioni di incertezza.

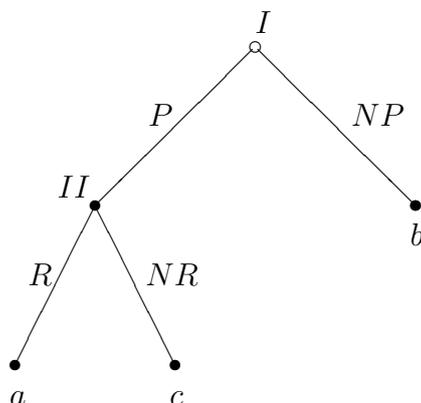
Ricorda anche una game form che si ottiene da un gioco in forma estesa in cui  $I$  può fare una scelta che mette termine subito al gioco. (D'altronde, il secondo giocatore ha un ruolo per certi versi assimilabile a quello della sorte...).



Queste game form, siano esse in forma strategica od estesa, si prestano bene ad una interpretazione del seguente genere. Il giocatore  $I$  può decidere se prestare oppure no una certa somma a  $II$ , il quale può decidere se restituirla o no.

Riscriviamo allora le game form dando dei nomi più espressivi (?) alle strategie, alle possibili scelte, dei giocatori.

$I \backslash II$	$R$	$NR$
$P$	$a$	$c$
$NP$	$b$	$b$



Naturalmente sarà interessante passare a considerare il gioco. Per poterlo fare, ci servono le preferenze dei giocatori. Si tratta di immaginare quali possano essere le preferenze “normali” dei giocatori, in questa situazione. E’ ragionevole ipotizzare che le preferenze possano essere:

$a \succ b \succ c$  per  $I$ ,

$c \succ a \succ b$  per  $II$ .

Per  $I$ , ci aspettiamo infatti che una persona “normale” (dove la “normalità” si riduce alla bieca considerazione di preferire di avere più soldi che meno), abbia per l’appunto quelle preferenze. Diamo per scontato, in altre parole, che il prestito preveda che  $II$  restituisca a  $I$  una somma *significativamente* maggiore rispetto a quella ricevuta. Dove il “significativamente” vuole dire che la somma che  $I$  ottiene è tale da rendere il prestito appetibile rispetto ad altre opzioni di investimento. Non si tratta di una restrizione effettiva: se così non fosse, non si porrebbe neanche la questione se prestare o no. Non a caso, se  $b$  fosse preferito anche ad  $a$ , la scelta  $NP$  sarebbe banalmente fortemente dominante per  $I$ . Appunto, il problema di prestare non si pone...

Per  $II$ , ciò che sarà fondamentale per il seguito è che lui preferisca  $c$  ad  $a$ , e questo è del tutto “normale”. Tuttavia, si può osservare (osservazione oziosa, ma l’ozio è il padre di tutte le virtù) che è sensato assumere che  $a \succ b$ . La ragione della richiesta del prestito sta infatti nella possibilità da parte di  $II$  di poter investire quanto riceve in una qualche forma di attività reale, che sia in grado di controbilanciare ampiamente la passività finanziaria cui va incontro. In altre parole, dovrebbe essere per lui preferibile onorare il prestito al fatto di non ottenerlo per nulla. In effetti, questa considerazione “oziosa” riguardo alle preferenze di  $II$  avrà una ricaduta importante dal punto di vista della valutazione dei risultati in termini di efficienza.

Detto questo, possiamo passare alla rappresentazione dei giochi così ottenuti. Come al solito, useremo funzioni di utilità per rappresentare le pre-

ferenze. Supporremo quindi che:

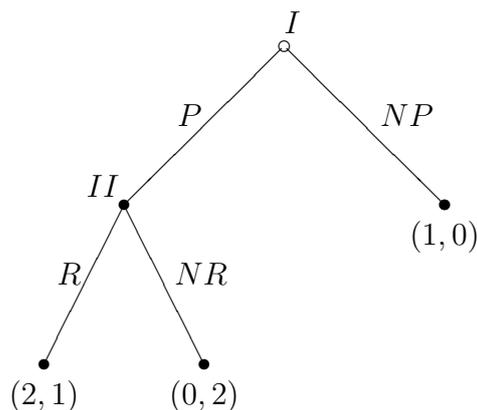
$$f(a) = 2, \quad f(b) = 1, \quad f(c) = 0 \text{ per } I,$$

$$g(c) = 2, \quad g(a) = 1, \quad g(b) = 0 \text{ per } II.$$

Mi limito ad osservare che l'assegnazione del valore 2 alle alternative migliori è arbitraria, per lo meno se abbiamo due decisori "di von Neumann e Morgenstern". Sarà quindi opportuno evitare di trarre conclusioni frutto solo di questa scelta nostra, arbitraria.

Vediamo i giochi che otteniamo:

$I \backslash II$	$R$	$NR$
$P$	(2, 1)	(0, 2)
$NP$	(1, 0)	(1, 0)



Abbiamo, come è immediato verificare, un unico equilibrio di Nash, che è anche perfetto nei sottogiochi, e che può essere ottenuto per eliminazione iterata di strategie strettamente dominate<sup>1</sup>. Insomma, sembra agevole predire cosa avverrà. E, naturalmente, la predizione è che  $I$  non farà il prestito. Contrariamente a quanto avviene nel gioco classico "di Selten", qui non abbiamo il problema di una minaccia non credibile, ma di una *promessa* non credibile. Ovvero,  $II$  ha tutto l'interesse a promettere che restituirà il prestito, ma una volta ottenutolo, la sua razionalità lo porterà a non restituire quanto dovrebbe.

<sup>1</sup>Osservo, per evitare incomprensioni, che io uso il termine "strettamente dominate" laddove la quasi totalità della letteratura di TdG utilizza il termine "debolmente dominate".

Cosa c'è di male in questo esito? E' che si tratta di un esito inefficiente. Si noti il ruolo significativo della assunzione fatta sulle preferenze di *II*, per poter affermare questo.

A questo punto è il momento di fare entrare in scena lo Stato. Il suo ruolo è quello di fornire gli incentivi (o, meglio, disincentivi) adeguati per ottenere un risultato migliore.

Lo Stato modifica l'esito *c* in modo da renderlo meno appetibile per *II* di *a*. Sostituiremo allora l'esito *c* con un altro esito *d*. Si noti che noi (lo Stato) stiamo modificando la *game form*<sup>2</sup>. Perché lo facciamo? Perché abbiamo una *funzione di benessere sociale* della quale non ci interessa conoscere i dettagli: ci basta sapere che predilige gli esiti paretiani (ovvero, soddisfa la condizione che viene solitamente detta di unanimità, in questo contesto). Quindi, imponiamo una restrizione piuttosto debole<sup>3</sup> su quella che è la funzione di benessere sociale dello Stato (anche se vi sono restrizioni non dette, come al solito: ad esempio, è "welfarista", o non ha, ad esempio, particolari obiettivi a livello degli esiti: niente Rawls, e niente "functionings" alla Sen; nessun interesse per gli aspetti procedurali, per giunta).

Domanda: lo può fare, lo Stato? La risposta è essenzialmente positiva, anche tenendo conto delle varie accezioni che può assumere il verbo "potere".

Diamo per il momento per scontato che abbia la potestà di modificare la "game form". Per poterlo fare in modo *opportuno*, ovvero coerente con la sua funzione di benessere sociale, gli basta modificare, come detto, l'esito *c*. Un modo semplice di farlo è quello di introdurre una penalità per *II* (si noti che non occorre intervenire sull'esito *c* in relazione ad *I*). La penalità non è arbitraria. Essa deve soddisfare la condizione fondamentale che *II* preferisca *a* a *d*. Ci si riesce? Una volta tanto, non sembra essere di fronte ad un compito particolarmente difficile (cosa che invece capita di frequente, quando si parla di preferenze dei soggetti coinvolti<sup>4</sup>). Il prestito prevede che

---

<sup>2</sup>Non potremmo cambiare le preferenze? Il sistema scolastico, nella sua funzione ideologica di creare "buoni cittadini", potrebbe servire allo scopo. O le prediche, vengano da classici pulpiti o da loro sostituti.

<sup>3</sup>Al solito, dovunque si possono annidare i pericoli di una analisi poco attenta. Potrebbe benissimo succedere che una particolare specificazione della funzione di benessere sociale possa non rendere interessante, appetibile, questo intervento. Oppure lo potrebbe rendere impossibile.

<sup>4</sup>Finché non si potrà legalmente usare una macchina della verità efficace. Anche se può essere opportuno andarci cauti, perché potremmo avere effetti collaterali indesiderati. In riferimento alla nota 2, si potrebbe anche pensare di infilare direttamente le preferenze appropriate nella testa dei decisori. Non sto associando a caso queste due annotazioni: hanno entrambe la caratteristica di essere "futuribili", ma mica tanto in là nel futuro... (e infatti, su "la Repubblica", 3 giorni dopo avere scritto queste note: "Sunumu Tonegawa, premio Nobel e direttore del Picowar Institute for Learning and Memory, studia le

$II$  restituisca una certa somma ad  $I$ . Se  $II$  fa il furbo, non gli dà niente. E, allora, è sufficiente imporre che  $II$  paghi una multa superiore alla somma che avrebbe dovuto restituire. Si noti che non serve a nulla imporre che  $II$  dia questa somma, od una parte di essa<sup>5</sup>, ad  $I$ . Va benissimo se la multa è pagata allo Stato.

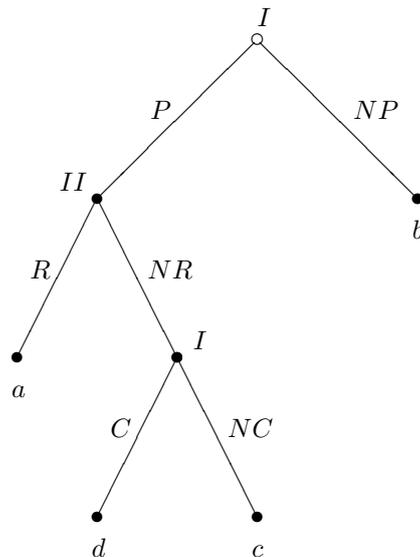
Quello che è importante è il basso requisito, in termini di informazione, che richiede la modifica efficace della game form<sup>6</sup>.

---

menzogne ed è convinto che presto uno strumento grande come un berretto da baseball permetterà di leggere e analizzare dati da miliardi di neuroni per stabilire rapidamente chi dice bugie e chi è sincero: ‘Per arrivarci ci serviremo di ingegneri e fisici interessati in tecnologie totalmente nuove e metodi non invasivi di scannerizzazione del cervello.’”)

<sup>5</sup>Si potrebbe, ad esempio, pensare che la “punizione” per  $II$  preveda di risarcire, comunque,  $I$  della somma dovuta, ed aggiunga poi una multa. Queste procedure sono molto diffuse. Si invita il lettore a riflettere sul perché questo avvenga.

<sup>6</sup>Naturalmente le modifiche della game form potrebbero essere di tipo diverso. Si potrebbe ad esempio permettere ad  $I$ , in caso di non restituzione del prestito, di “fare causa” a  $II$ . Volendo mantenere il più semplice possibile il modello, potremmo pensare a questa modifica:



Rispetto alla strada seguita nel testo vi sono molti aspetti comuni. In particolare, ciò che serve, esattamente come prima, è che  $II$  preferisca l’esito  $a$  all’esito  $d$ . Ovviamente, c’è anche un aspetto nuovo, e cioè serve che  $I$  preferisca  $d$  a  $c$ . Questa è una condizione che non compare nell’approccio seguito nel testo (in quel caso potremmo dire che si “procede d’ufficio” in caso di inadempienza contrattuale). Si noti che la condizione che  $I$  preferisca  $d$  a  $c$  potrebbe permetterci di considerare i costi (anche in termini di differimento temporale) che comporta per  $I$  una azione legale. Queste considerazioni, ed altre, che differenziano la presente versione di queste note dalla precedente, sono frutto delle discussioni svoltesi in occasione di un seminario tenuto a Milano (Statale, Facoltà di Giurisprudenza), su

Insomma, possiamo immaginare che il gioco diventi (scrivo solo la forma strategica, la forma estesa dovrebbe essere del tutto ovvia).

$I \backslash II$	$R$	$NR$
$P$	(2, 1)	(0, 0.9)
$NP$	(1, 0)	(1, 0)

Si noti la particolare magnanimità della penale: si lascia a  $II$  persino un po' di surplus...

Possiamo davvero assumere che le cose siano così semplici? Si noti che ci siamo messi in un contesto deterministico. Cosa succede se c'è un po' di incertezza? Al di là di assumere che i decisori si confacciano alle condizioni richieste dalla teoria delle decisioni in condizioni di incertezza, potrebbero subentrare delle considerazioni di un certo interesse. Una è che le valutazioni degli attori coinvolti (i due giocatori e lo Stato) riguardo ai fattori di incertezza potrebbero non coincidere. Un'altra, ancora più interessante, è che  $II$  potrebbe non voler restituire il prestito non per "cattiveria", ma perché è fallito e per giunta questo potrebbe non essere neanche colpa sua (una catena di eventi sfortunati): se vogliamo assegnare rilievo al principio di responsabilità personale, potremmo non essere lieti di punire il giocatore  $II$  anche qualora non sia colpa sua (ma ciò apre la porta alla possibilità di dichiarazioni non veritiere da parte di  $II$  sulla sua enorme "sfortuna"...).

Rimanendo nel nostro piccolo mondo, per giunta deterministico, si noti che lo Stato, con il suo intervento, è in grado di realizzare un *surplus* sociale! E quindi c'è anche la possibilità di sostenere le spese necessarie per potere avere le istituzioni necessarie (polizia, giudici, esecutori della sentenza). Anzi, questo recupero di efficienza rende plausibile una interpretazione in termini di contratto sociale, essendovi la convenienza, da parte dei giocatori, di sottoscrivere il contratto.

Nella Figura 1 sintetizziamo (cioè, usiamo una forma estesa "non ortodossa") la parte iniziale del gioco, che prevede la firma o non firma, *contemporaneamente* del contratto da parte dei due giocatori. Se *entrambi* firmano, abbiamo il contratto e ci troviamo nel nodo di sinistra dell'albero. Se almeno uno dei due non firma, non si ha il contratto e ci si ritrova nel nodo di destra. Il contratto consiste proprio nella possibilità di rendere operante la sanzione.

---

invito di Francesco Denozza. Che ringrazio per l'interessante e vivace occasione, assieme ai partecipanti che hanno, per l'appunto, vivacizzato il seminario.

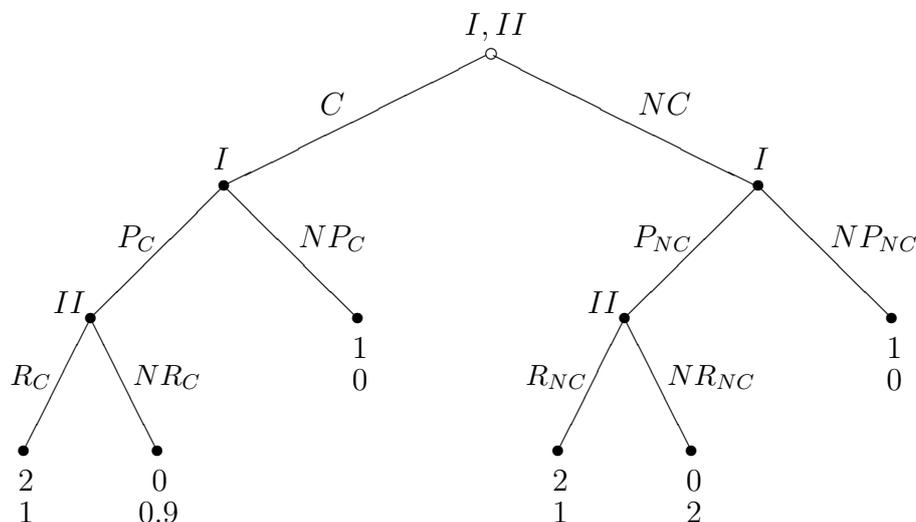


Figura 1: Il contratto sociale

Come detto, il recupero di efficienza ci porta anche le risorse necessarie per poter sopportare i costi delle istituzioni necessarie. Possiamo allora immaginare che a *tutti* i payoff del ramo di sinistra venga sottratta una quantità  $m^7$ . Purché non sia eccessiva, essa non altera né le scelte dei giocatori né il guadagno di efficienza fornito dal contratto sociale: vedasi Figura 2.

Ultima osservazione. Se i marziani ci stessero osservando, non si accorgerebbero di nulla. Nel senso che sarebbero sorpresi di vedere poliziotti e giudici in un mondo dove tutti rispettano i patti. Un po' più seriamente, la *variazione* che abbiamo apportato avviene in corrispondenza di un nodo del gioco che *non verrà mai raggiunto*<sup>8</sup> nel corso del gioco! Insomma, fare dei cambiamenti irrilevanti ha degli effetti rilevanti. Domanda: siamo forse di fronte ad una violazione di IIA (Independence of Irrelevant Alternatives, cioè: Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti)?

<sup>7</sup>Semplifichiamo molto. I costi delle istituzioni potrebbero essere sopportati non in ugual modo da entrambi i giocatori, ed inoltre potrebbero esserci costi aggiuntivi in caso di violazione dell'impegno di restituzione del prestito.

<sup>8</sup>Precisiamo: non veniva raggiunto prima, senza lo Stato, e neanche adesso, con lo Stato!

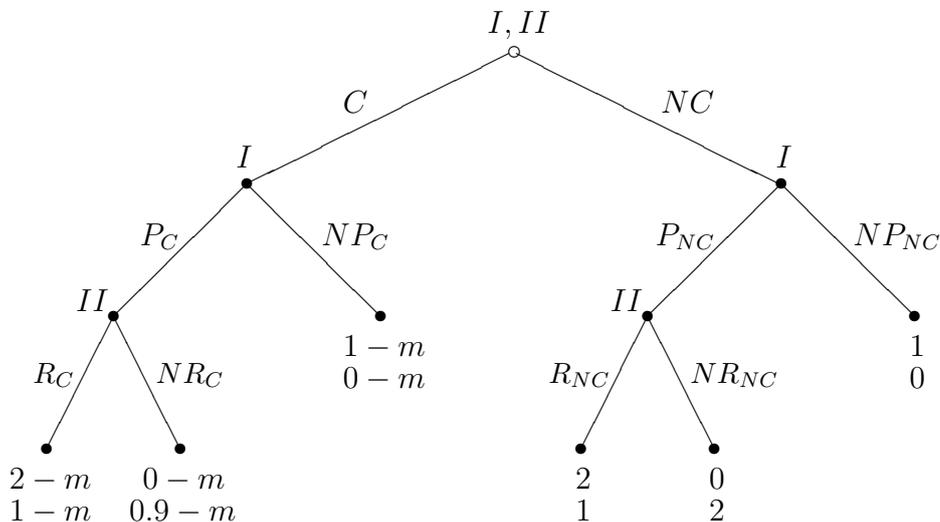


Figura 2: Il contratto sociale, con i costi dello Stato

Considerazioni finali.

1. Il linguaggio matematico (e quindi anche quello specifico della TdG) obbliga ad una rigorosa modellizzazione, all'interno di un quadro coerente di assunzioni. E richiede anche "disciplina" da parte di chi lo utilizza (questo è uno dei pregi principali del linguaggio matematico). Se si accetta di sottostare a questo "regime", si possono ricavare delle soddisfazioni rilevanti, dal punto di vista scientifico. Queste note hanno anche lo scopo di mostrare, in piccolo, l'utilità, la potenza del linguaggio matematico (anche nei suoi costrutti più elementari).
2. Non bisogna farsi irretire dai "messaggi" provenienti da modelli *eccessivamente* semplificati come quello esposto in queste note. Se pure si tratta di un modello che ha il pregio di puntare agli aspetti *essenziali*<sup>9</sup>,

<sup>9</sup>Si noti il ridottissimo numero di elementi che costituiscono il modello: mi sento di dire che è *impossibile* riuscire ad articolare un discorso simile usando un modello più semplice. Se c'è chi ne ha uno da proporre, sarò ben lieto di esaminarlo!

esso trascura una serie notevole di elementi<sup>10</sup>, e quindi potrebbe offrire forse dei principi generali, ma non è certamente in grado di proporsi come “libretto di istruzioni per il legislatore”! Non si può sfuggire alle difficoltà e complicazioni della situazione che si vuole analizzare solo perché non si ha tempo, voglia, capacità di farlo.

3. Pur tenendo conto di quanto detto al precedente punto, e quindi in presenza della disponibilità a complicare quanto necessario il modello, potrebbe accadere che, comunque, il linguaggio matematico incontri delle difficoltà ad evidenziare in modo soddisfacente tutte le sfaccettature del problema in esame. Pur se ritengo che, in questa fase dello sviluppo del pensiero scientifico, il linguaggio matematico offra “la” strada maestra per analizzare situazioni come quella di cui mi sono occupato ora, non mi meraviglierei affatto se, di fronte a certe classi di problemi, esso si trovasse ad essere muto o, peggio ancora, offrisse delle soluzioni “sbagliate”.

Nulla di strano: anche se la matematica “non sbaglia” (non a questo livello di problematiche), c’è però l’interfaccia tra “realtà” e “modello matematico” che richiede molta, molta, molta attenzione. Per esempio, uno potrebbe essere tentato di ignorare aspetti del mondo reale che sono rilevanti solo perché non c’è ancora a disposizione la “tecnologia” matematica necessaria per affrontarli (o, più banalmente, perché il modellizzatore ne ignora l’esistenza). Questo è avvenuto molte volte nel passato e continua ad avvenire, più frequentemente di quanto non si pensi.

---

<sup>10</sup>Aspetti intertemporali; presenza di elementi di incertezza; impossibilità di scrivere un contratto completo; non osservabilità di azioni (moral hazard) o di stati di natura (adverse selection); il ruolo del “resto del mondo”; etc.; etc.