Note per la conferenza

Perché occuparsi della teoria dei giochi

Auditorium dell'Acquario di Genova
15 gennaio 2003

Fioravante PATRONE
Dipartimento di Matematica
Via Dodecaneso 35
16146 GENOVA
patrone@dima.unige.it

`http://www.dima.unige.it/~patrone`	homepage
`http://tdg.dima.unige.it`	web teaching
`http://www.citg.unige.it/citg.htm`	web server "CITG"
`http://www.scallywag.it`	web page del gruppo Sca$\lambda\lambda$ywag

Queste note vogliono solo essere una rapida introduzione alla teoria dei giochi. Nella pagina web indicata sopra come "web teaching" si possono trovare ulteriori approfondimenti (tra l'altro, è possibile seguire l'intero corso di teoria dei giochi tenuto nell'A.A. 2000/01). Poiché queste note si limitano ai giochi non cooperativi, segnalo che sotto la voce "Ciclo di conferenze all'IRRSAE Liguria" può essere trovata una introduzione ai giochi cooperativi (`Giochi semplici, indici di potere e scelte sociali`); altre note introduttive si trovano alla voce "Teoria dei giochi: modelli ed applicazioni" (qui, oltre che le brevi note `110500TU.pdf`, di cui consiglio di saltare la prima pagina..., sono disponibili le dispense `gfmmTUvf.zip` di un seminario tenuto da G. Ferrari e M. Margiocco, dedicate ai giochi cooperativi).

Un problema di decisione nel quale è coinvolto più di un decisore può presentare molte varianti: ne consegue che sono molti i modelli utilizzati per trattare questo problema; sono anche molte le classificazioni che si usano, a seconda della presenza o meno di alcune caratteristiche. La suddivisione fondamentale è data dalla risposta alla domanda seguente:

> vi è oppure no la possibilità per i giocatori di sottoscrivere accordi vincolanti?

Se non c'è, allora si parla di giochi *non cooperativi*. Quando invece i giocatori hanno questa possibilità allora si usa il termine giochi *cooperativi*. Si badi bene che questi termini NON HANNO NULLA A CHE FARE col significato consueto del termine "cooperativo", così come viene utilizzato nel linguaggio comune. Quando si studia un gioco "cooperativo", non vuol dire che si ha a che fare con decisori (detti normalmente "giocatori") più buoni o più ben disposti a cooperare che quando si ha a che fare con una situazione di gioco classificato come non cooperativo. La differenza sta solo ed esclusivamente in ciò che ho detto prima: si possono sottoscrivere oppure no accordi vincolanti?

Vi sono poi molte altre distinzioni da fare: sul modo più o meno dettagliato in cui vengono descritti (si parla di forma estesa o forma strategica), sulla ammissibilità o meno dei cosiddetti "pagamenti laterali", sul fatto che il gioco sia a somma zero oppure no, etc.

Io mi limiterò a parlare brevemente dei soli giochi non cooperativi, a due giocatori, in forma strategica (detta anche forma normale) ed in forma estesa (per i quali non darò però alcuna definizione formalizzata).

Una delle stituazioni più semplici possibili di interazione strategica si ha quando sono coinvolti due giocatori (chiamiamoli Davide e Marta, per fissare le idee), ognuno dei quali ha a disposizione solo due alternative tra le quali scegliere. Possiamo immaginare che costoro giochino ad una delle tante versioni del "pari o dispari": ciascuno ha un euro, e deve mostrare "testa" o "croce". E' assolutamente essenziale che le monete vengano mostrate dai due giocatori contemporaneamente (ma da Davide e Marta non ci aspettiamo che cerchino di imbrogliare). Se entrambe le monete mostrano la stessa faccia, queste andranno a Marta, che pertanto guadagna un euro, a scapito di Davide. Se invece sono una testa ed una croce, è Davide a guadagnare un euro. Possiamo riassumere tutto ciò in una tabella, la cui comprensione dovrebbe essere agevole:

Davide \ *Marta*	Testa	Croce
Testa	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
Croce	$(1, -1)$	$(-1, 1)$

Vediamo in dettaglio come leggere la tabella, legandola alla descrizione verbale del gioco data prima.

Le righe stanno a indicare le scelte possibili di Davide (cioè: è come se Davide dovesse scegliere tra la riga "testa" o quella "croce"). Analogamente le colonne rappresentano le scelte a disposizione di Marta. I numeri che compaiono nelle caselle interne rappresentano i guadagni (in termini relativi) dei nostri due giocatori. Ad esempio, se Davide sceglie "croce" e Marta sceglie "testa", andiamo a vedere cosa si trova nella casella all'incrocio tra la riga "croce" e la colonna "testa": troviamo $(1, -1)$. Il primo numero (quello prima della virgola) ci dice quale è il guadagno di Davide (cioè 1), mentre il secondo ci dice quello di Marta (cioè -1, vale a dire che Marta perde un euro).

A questo punto non dovrebbe essere sorprendente la definizione seguente. La vedremo in modo molto formale, provando poi a fare "il cammino inverso", per vedere come si possa tradurre in una situazione concreta, per quanto stilizzata.

Definizione (di gioco in forma strategica, a due giocatori)
E' $G = (X, Y, f, g)$, dove:

X, Y sono insiemi non vuoti

$f, g : X \times Y \longrightarrow \mathbf{R}$

Interpretazione. X, Y sono gli insiemi delle strategie, rispettivamente per il giocatore I ed il giocatore II. Per f, g l'interpretazione è più delicata. Per averne un'idea corretta occorrerebbe aprire una parentesi non breve sulla teoria dell'utilità. Ci possiamo accontentare di una *prima approssimazione*. Vale a dire, possiamo dire che esprimano i *guadagni monetari* dei due giocatori (f ci dice i guadagni di I, mentre la funzione g ci dà quelli di II). Questo presuppone che i giocatori adottino come criterio di valutazione quello del guadagno atteso, cosa che non solo non è sempre vera, ma a volte *non ha neanche senso* (l'esito di un gioco molte volte non è un guadagno monetario).

Esempio. $X = \{T, B\}$, $Y = \{L, R\}$;

$$f(T, L) = 1,\ f(T, R) = 2,\ f(B, L) = 2,\ f(B, R) = 1$$

$$g(T, L) = -1,\ g(T, R) = 1,\ g(B, L) = 3,\ g(B, R) = 4$$

Cosa vogliamo dire? Che I ha a disposizione due strategie: T e B. Analogamente, II può scegliere tra L o R. Se ammettiamo che i guadagni siano espressi in euro, quando scriviamo, ad esempio, che $f(B, L) = 2$, intendiamo dire che il guadagno per il giocatore I è di 2 euro, se il giocatore I sceglie B e il giocatore II sceglie L. Invece, $g(B, L) = 3$ ci dice che il guadagno per il giocatore II è pari a 3 euro, sempre nel caso in cui I scelga B e il giocatore II scelga L. Naturalmente quando parliamo di guadagni pensiamo sempre a questi guadagni in termini relativi. Per cui, il fatto che $g(T, L) = -1$ significa che II perde 1 euro.

Un modo molto comune ed utile per rappresentare un gioco come questo è quello che già abbiamo visto, cioè utilizzare una tabella come la seguente:

$I \backslash II$	L	R
T	$(1, -1)$	$(2, 1)$
B	$*(2, 3)*$	$(1, 4)$

La coppia messa in evidenza con gli asterischi è la coppia $(f(B,L), g(B,L))$.

E' evidente che questa rappresentazione può essere adottata per ogni gioco in cui X ed Y siano insiemi finiti. Per questa ragione, i giochi finiti si dicono a volte giochi "bimatrice": si fa naturalmente riferimento al fatto che la tabella come quella sopra indicata può essere costruita "accorpando" due matrici: una ci dà i "guadagni" del giocatore I, l'altra ci dà quelli del giocatore II. Nel nostro caso, avremmo:

I	L	R
T	1	2
B	2	1

II	L	R
T	-1	1
B	3	4

Ma quale è la *soluzione* di un gioco? L'idea più accreditata di soluzione è quella di equilibrio.

Per comprendere come mai si dia la definizione che seguirà è importante precisare un aspetto di carattere interpretativo. Quando un gioco viene descritto mediante la "forma strategica", come abbiamo fatto qui, si assume che i giocatori debbano scegliere le loro strategie contemporaneamente. Pù precisamente, I dovrà scegliere la sua strategia senza sapere la scelta di II; analogo discorso vale per II. Concretamente, si può immaginare che, al momento di effettuare la sua scelta, I si trovi in una stanza e II in an'altra, isolata da quella di I. Volendo continuare in questa "rappresentazione", possiamo pensare che, una volta dentro le loro stanze, i giocatori abbiano davanti a loro tanti bottoni quante sono le strategie a loro disposizione, e mettano in atto la strategia da loro scelta premendo il pulsante corrispondente: dopo di che un qualche marchingegno produrrà il risultato che consegue dalle scelte che loro hanno fatto. Nell'esempio, I si troverebbe davanti i due pulsanti T e B, mentre II avrebbe i pulsanti L ed R. Se I schiaccia B e II schiaccia L, un macchinario fornirà ad I 2 euro, mentre darà a II 3 euro.

Definizione di equilibrio. Sia dato il gioco $G = (X, Y, f, g)$. Diremo che $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ è un equilibrio per G se:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \qquad \text{per ogni } x \in X \tag{1}$$

$$g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \qquad \text{per ogni } y \in Y \tag{2}$$

Interpretazione. Alla base di questa definizione vi sono alcuni presupposti. Per capirli, dobbiamo però *precisare* l'interpretazione che avevamo dato di G. Cioè, I sceglie quale strategia usare nell'ambito delle strategie che ha a disposizione: ovverossia, sceglie un elemento $x \in X$. Analogamente, II sceglie $y \in Y$. La cosa importante da pensare è che i due giocatori effettuino le loro scelte contemporaneamente ed indipendentemente. Di più: se intendiamo trattare una situazione di gioco non cooperativo, dobbiamo tenere presente che i giocatori non possono effettuare tra di loro degli accordi *vincolanti*. Se aggiungiamo queste specificazioni, la seguente storiella diventa plausibile. Immaginiamo che i due giocatori si mettano d'accordo per giocare, l'uno la strategia $\bar{x}$ e l'altro la strategia $\bar{y}$. Se vogliamo che questo accordo sia un minimo sensato, sembra ragionevole richiedere che resista a considerazioni del tipo seguente (il giocatore I riflette):

> Bene, ci siamo accordati per giocare in quel modo: visto che se violo l'accordo non mi succede nulla, vediamo un po' se posso far di meglio anziché giocare la $\bar{x}$ che si era detto. Le possibilità sono due: o l'altro giocatore non rispetta l'accordo, ed è allora inutile tenerne conto, oppure lo rispetta. In questo secondo caso, vediamo un po' se non c'è un'altra strategia x per cui $f(x, \bar{y}) > f(\bar{x}, \bar{y})$

La definizione di equilibrio è strutturata proprio in modo da recepire queste considerazioni: le condizioni (1) e (2) dicono proprio che nessuno dei due giocatori ha convenienza a deviare dalla strategia che gli è "prescritta" dall'equilibrio, *fermo restando che neppure l'altro giocatore "devii"'.*

Di solito, quando si parla di equilibri, si usa chiamarli equilibri di Nash o di Cournot-Nash. La ragione è la seguente:

- Nash nel 1950 prova un importante teorema il quale garantisce l'esistenza di un equilibrio per una classe molto ampia ed importante di giochi, estendendo al caso generale il precedente risultato di von Neumann, che l'aveva ottenuto nel 1928 per i giochi a somma zero (cioè quelli per cui $f(x, y) + g(x, y) = 0$ per ogni $(x, y) \in X \times Y$).
- Cournot nel 1838 aveva "anticipato" la TdG adottando, come "soluzione" per un modello di oligopolio, proprio questa idea di equilibrio.

Vediamo un po' di esempi:

Esempio 1. Nell'esempio presentato dopo la definizione formale di gioco, la coppia (T,R) è un equilibrio di Nash, come si può verificare direttamente dalla bimatrice.

Esempio 2. Questo è il gioco più famoso: si tratta del "dilemma del prigioniero":

$I \backslash II$	NC	C
NC	$(4, 4)$	$(0, 5)$
C	$(5, 0)$	$(1, 1)$

Si vede che l'equilibrio di questo gioco è dato dalla coppia di strategie (C, C). La cosa poco gradevole è che *entrambi i giocatori* preferirebbero l'esito derivante dalla coppia di strategie (NC, NC).

La ragione per cui questo gioco viene chiamato "dilemma del prigioniero" risale ad una storia inventata tanto tempo fa per illustrare la teoria dei giochi ad una conferenza per non specialisti... La storiella è la seguente. Due individui vengono arrestati dalla polizia e chiusi in celle separate. I due individui sono sospettati di aver compiuto un crimine (una rapina, ad esempio) che, se provato, comporta una pena di 5 anni. La polizia ha le prove per farli condannare a 1 anno per un crimine lieve (ricettazione, porto abusivo d'arma...), per cui promette che se uno confesserà e l'altro no, chi avrà confessato sarà libero.

Ovviamente, se entrambi confessano, verranno condannati (ma ad una pena un poco più lieve, data la loro collaborazione: 4 anni). Il significato dei numeri nelle caselle è in tal caso non "soldi", bensì numero di anni di sconto di pena (rispetto alla condanna più grave).

Esempio 3. Anche questo è un gioco famoso: si tratta della "battaglia dei sessi":

$I \backslash II$	T	B
T	$(2,1)$	$(0,0)$
B	$(0,0)$	$(1,2)$

Qui di equilibri ce ne sono due: (T,T) e (B,B). Il guaio è che:

> O i due tizi hanno la possibilità di parlarsi prima e di concordare una coppia di strategie. Fermo restando che sia una coppia di strategie di equilibrio, quale delle due sceglieranno? I preferisce l'equilibrio (T,T), mentre II preferisce l'equilibrio (B,B).
>
> Oppure i due giocatori non hanno questa possibilità e devono scegliere quale strategia giocare "al buio". In questo caso, non è facile capire come giocare. Perché I potrebbe decidere di giocare T, in quanto mira all'equilibrio che gli dà il maggior guadagno. Per le stesse identiche ragioni II potrebbe decidere di giocare R. Risultato: entrambi guadagnano 0, anziché il 2 sperato.

La storiella che in questo caso dà il nome al gioco riguarda la scelta se andare a teatro o all'incontro di boxe. Potete immaginare marito e moglie: la moglie preferisce il teatro (T) e il marito la boxe (B). Ma in ogni caso preferiscono essere assieme anzichè in due posti diversi. Completa la storiella il fatto che non sono riusciti a mettersi d'accordo prima e non sono in grado di comunicare tra loro (era pre-cellulari...).

Esempio 4. Il gioco seguente è interessante par varie ragioni: è un esempio di gioco a somma zero; descrive un gioco molto familiare (pari o dispari); peccato che *non abbia equilibri*. Si tratta del gioco che abbiamo introdotto all'inizio di questi appunti:

$I \backslash II$	P	D
P	$(-1,1)$	$(1,-1)$
D	$(1,-1)$	$(-1,1)$

Di solito il gioco che abbiamo descritto all'inizio (con Marta e Davide), viene detto in inglese "matching pennies". Se vogliamo giustificare il nome "pari o dispari", si può immaginare il gioco seguente: i due giocatori hanno ciascuno davanti due carte coperte, una numerata con un numero pari e l'altra con un numero dispari. Devono scoprire le carte simultaneamente e la matrice sopra illustra i guadagni (e perdite) dei due giocatori.

L'ultimo esempio pone un problema molto importante da risolvere. Se si vuole accreditare l'equilibrio di Nash come idea di soluzione, occorrerà sincerarsi che almeno giochi semplici come quello di "pari o dispari" abbiano almeno un equilibrio. Come si fa? La chiave per la soluzione sta nell'idea di *strategia mista*, dovuta a Borel e a von Neumann. Nel teorema del 1928 già citato, von Neumann dimostra che ogni gioco finito (cioè con X, Y insiemi finiti) a somma zero (cioè t.c. $f(x, y) + g(x, y) = 0$ per ogni $x \in X$ ed $y \in Y$) ha equilibrio (ovverossia, la funzione f ha un punto di sella) in strategie *miste*. Tale risultato viene poi esteso nel 1950 da Nash, senza più richiedere la condizione che il gioco sia a somma zero.

Ma cosa sono le strategie miste? E' facile da spiegare, ma occorre un poco di confidenza col calcolo delle probabilità elementare. Supponiamo per semplicità che X, Y siano insiemi finiti. Anzi, per far prima, che sia $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ ed $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Ebbene, una strategia mista per il giocatore I non è altro che una *distribuzione di probabilità* su X. Ovverossia, una strategia mista per I non sarà altro che una m-pla di numeri reali $(p_1, \ldots, p_m)$ il cui significato è il seguente: I gioca la strategia x_1 con probabilità p_1, ... , la strategia x_m con probabilità p_m. Un po' più concretamente, supponiamo che sia $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Una strategia mista per I potrebbe essere, per esempio $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (1/2, 0, 1/6, 1/3)$. Ed il giocatore I per giocarla potrebbe fare così: lancia un dado: se esce uno delle facce coi numeri $1, 2, 3$, lui gioca x_1, se esce 4 gioca x_3, se esce 5 o 6 gioca x_4.

In generale, cosa succede se i giocatori giocano una coppia di strategie miste? Se giocano $(p_1, \ldots, p_m)$ e $(q_1, \ldots, q_n)$, vorrà dire che la probabilità che venga giocata la coppia di strategie pure x_i, y_j è $p_i q_j$ (si noti che assumiamo che le "estrazioni a sorte" previste dalle strategie miste vengano effettuate dai due giocatori in modo indipendente). In questo modo si può calcolare il guadagno atteso che sarà (per I e II rispettivamente):

$$\sum_{i,j} p_i q_j f(x_i, y_j) \qquad\qquad \sum_{i,j} p_i q_j g(x_i, y_j)$$

Il lettore è invitato a verificare che le espressioni precedenti non sono altro che il *guadagno atteso* dei due giocatori.

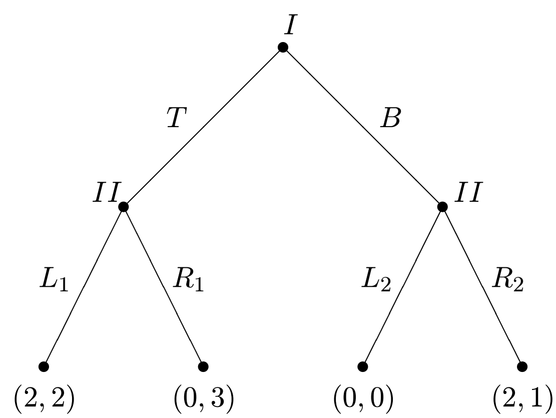
Nell'esempio 4, abbiamo un equilibrio di Nash in strategie miste: si tratta della coppia di strategie $((p_1, p_2), (q_1, q_2)) = ((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))$. Si invita il lettore a verificarlo, ed anche a provare che si tratta dell'unico equilibrio di questo gioco.

Già che ci siamo, osservo che il gioco dell'esempio 3 ha un *terzo* equilibrio in strategie miste che è dato da: $(2/3, 1/3), (1/3, 2/3)$. Chi abbia voglia di fare i conti necessari, potrà verificare come questo equilibrio offra ad entrambi i giocatori un guadagno atteso inferiore a quello "offerto" dagli equilibri trovati prima.

Come avevo detto all'inizio, farò anche cenno ai giochi in forma estesa, anche perché è esperienza comune il fatto che l'interazione strategica possa svolgersi nel tempo. Limitarsi ad illustrare la sola forma strategica potrebbe dare l'impressione scorretta che la teoria dei giochi affronti solo casi molto particolari.

Un gioco in forma estesa consiste sostanzialmente nell'idea di estendere a due giocatori lo strumento dell'albero delle decisioni, usato spesso nei problemi di decisione individuale.

Un esempio è il seguente:



Col disegno precedente, intendiamo dire che in questo gioco tocca muovere prima a I e poi a II. E abbiamo anche indicato quali sono le alternative a disposizione dei due giocatori in ogni circostanza.

Uno dei contributi più importanti di von Neumann e Morgenstern è stato mostrare come in realtà un gioco in forma estesa possa essere trasformato in un gioco in forma strategica. Basta definire in modo conveniente cosa siano le strategie a disposizione dei giocatori. In effetti non è molto difficile immaginare cosa sia una strategia: basta pensare al significato usuale di questa parola. Si tratta di supporre che ogni giocatore analizzi il gioco prima di giocare: evidentemente, visto che l'andamento del gioco non dipenderà solo dalle sue decisioni, egli dovrà valutare tutte le alternative a sua disposizione in ogni possibile circostanza, se vorrà prendere una decisione ragionata.

Nell'esempio fatto, il giocatore I ha poco da stare a pensare: evidentemente lui ha due strategie a disposizione: T oppure B. Invece il giocatore II ha a disposizione **quattro** strategie: $L_1L_2; L_1R_2; R_1L_2; R_1R_2$. Spero che le poche parole dette sopra siano state sufficienti per far capire come mai il giocatore II ha a disposizione le quattro strategie sopra indicate: mentre analizza il gioco, egli non sa le scelte che poi effettuerà davvero il giocatore I. Per cui, egli deve pensare a cosa farà sia nel caso in cui I scelga T, sia nell'altro caso. Si potrebbe dire (e sarebbe giusto, tra l'altro), che egli deve indicare, per ogni vertice di sua "pertinenza" (cioè che porta vicino l'etichetta II) quale scelta pensa di fare tra le alternative che ha a sua disposizione.

Insomma, la forma strategica del gioco precedente è:

$I \backslash II$	L$_1$ L$_2$	L$_1$ R$_2$	R$_1$ L$_2$	R$_1$ R$_2$
T	$(2,2)$	$(2,2)$	$(0,3)$	$(0,3)$
B	$(0,0)$	$(2,1)$	$(0,0)$	$(2,1)$

Si verifica facilmente che $(B, L_1R_2), (B, R_1R_2), (T, R_1L_2)$ sono equilibri per questo gioco.

La possibilità di "ridurre" la descrizione di ogni gioco (per quanto complicato) dalla forma estesa alla forma strategica, congiunta alla affermazione che *in questo processo di riduzione non si perde nulla di essenziale*, se si assume che i giocatori siano perfettamente razionali ed intelligenti, è uno dei capisaldi della teoria dei giochi come venne "creata" nel 1944 da von Neumann e Morgenstern.

Approfitto dell'occasione per ricordare che la TdG nasce con la pubblicazione del libro *"Theory of games and economic behavior"* dei due citati autori. In questo libro venne affermata con forza l'idea che l'economia (e le scienze sociali in genere) avesse bisogno di una nuova teoria matematica per descrivere e affrontare i problemi di interazione strategica: era evidente infatti che né l'analisi matematica, né l'algebra o la geometria erano in grado di fornire gli strumenti necessari a tale scopo. Questo libro ebbe un fortissimo impatto e suscitò enormi attese; dopo alcuni anni di successo, subentrò però un senso di disillusione e sfiducia nella teoria dei giochi, disciplina che poi invece diventa strumento insostituibile per l'analisi economica a partire dagli anni '80.

Ritornando ai giochi in forma estesa, penso che sia evidente che ci sono giochi più complicati di quello sopra descritto. Le complicazioni che dobbiamo affrontare, se non vogliamo restringere troppo l'ambito dell'analisi, sono due:

- come descrivere l'intervento del caso in un gioco (per esempio quando si mescolano le carte prima di darle, o quando si lanciano dadi)
- come descrivere mosse *contemporanee*

Cominciamo col secondo aspetto, che è anche il meno "ovvio". Prima di descrivere la soluzione che si adotta a livello formale, proverò a fare un discorso che spero possa essere convincente.

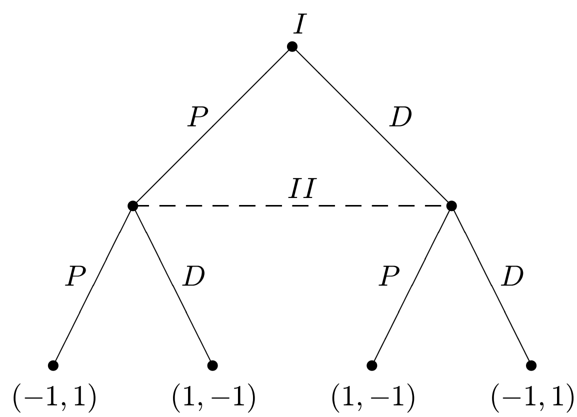
Prendiamo in esame un gioco come quello del "pari o dispari". Un ingrediente essenziale del gioco, se giocato correttamente, è quello che i due giocatori "mostrino" le dita contemporaneamente. Ebbene, immaginiamo che il gioco sia invece giocato così. I due giocatori si trovano in due stanze separate; il primo sceglie tra P e D e comunica la sua scelta ad un "arbitro" del tutto imparziale ed attendibile. Poi l'arbitro va nella stanza dove si trova il giocatore II e chiede anche a costui di scegliere tra P e D, ovviamente senza dirgli quale è stata la scelta fatta dal giocatore I. E poi si va a vedere chi ha vinto secondo le regole solite del "pari o dispari".

Forse che c'è una differenza sostanziale tra il modo solito di giocare e questo? Intendo dire dal punto di vista "strategico". Non direi. In ogni caso, quel che emerge è che forse non è tanto importante la contemporaneità per così dire “temporale” delle mosse, quanto *lo stato di informazione di un giocatore quando deve fare la sua mossa.*

Occorre quindi trovare un trucco che ci permetta di tenere conto di questo nuovo ingrediente, cioè dell stato di informazione dei giocatori. Il trucco consiste nel raggruppare insieme tutti i vertici di un albero che hanno la seguente proprietà:

> un giocatore, quando si trova in uno di questi vertici, non è in grado di sapere se lui si trovi effettivamente in **quel** vertice e non in un altro

Vediamo subito cosa succede col gioco del “pari o dispari”. L'albero lo descriviamo così :



Come si vede, due nodi dell'albero sono stati uniti da una linea tratteggiata, il cui significato spero possa essere chiaro: sta ad indicare che il giocatore II, quando deve effettuare le sue scelte, non sa se si trova nel vertice di sinistra o di destra: infatti, non sa cosa ha scelto il giocatore I.

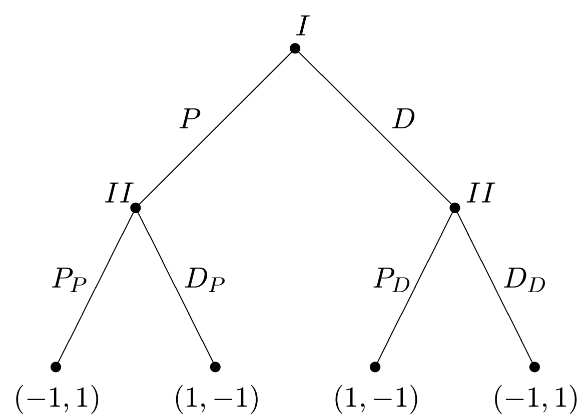
Si noti che ho etichettato con la stessa etichetta P due rami dell'albero, uscenti dallo stesso insieme di informazione di II, ma da vertici diversi. Il significato è questo: II può indicare o P o D all'arbitro. Ma non sapendo che cosa abbia dichiarato il primo giocatore, non può certo pensare di condizionare la sua scelta sulla base della scelta di I, pur se essa è avvenuta. Morale: in questo caso II ha a sua disposizione **DUE** strategie, diversamente dal gioco precedentemente descritto in forma estesa, dove invece le strategie a sua disposizione erano quattro. La forma normale diventa quindi:

$I \setminus II$	P	D
P	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
D	$(1, -1)$	$(-1, 1)$

Evviva! abbiamo ritrovato esattamente la forma estesa del gioco del pari o dispari, come nell'esempio 4. E senza trucchi e senza inganni. O no?

Per cercare di mettere in evidenza l'importanza che riveste l'informazione a disposizione di un giocatore al momento in cui deve effettuare la scelta, vediamo il caso in cui, nel "pari o dispari" la scelta del primo giocatore venisse comunicata al secondo.

Tanto per cominciare, la descrizione del gioco in "forma estesa" sarebbe ora la seguente:

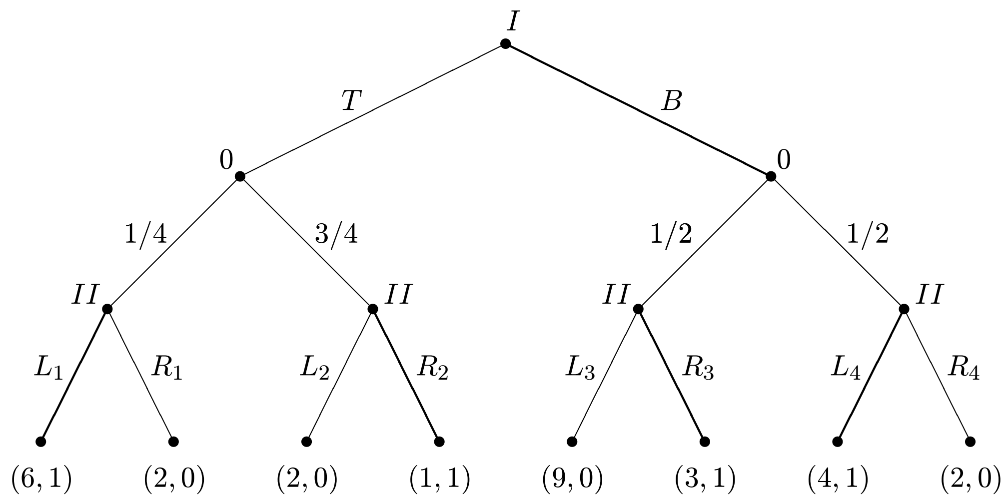


Si noti che questa volta ho "etichettato" indicato con nomi diversi i due rami che corrispondono alla scelta di giocare "pari" da parte del secondo giocatore: P_P e P_D. In effetti si tratta di due scelte diverse per il giocatore II: P_P indica la scelta di giocare "pari" da parte del giocatore II dopo che I ha scelto "pari", mentre P_D significa che II sceglie P dopo aver visto che I ha scelto D.

Naturalmente non occorre essere strateghi particolarmente avveduti per rendersi conto che il giocatore II in questo *nuovo gioco* ha la possibilità di guadagnare sempre.

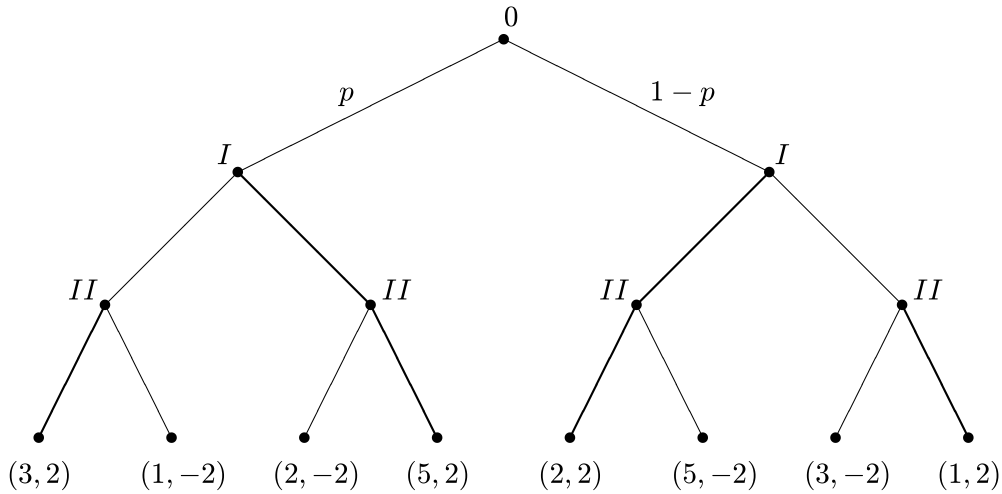
Ora che abbiamo visto, seppur rapidamente, come si possa affrontare il problema della "contemporaneità" delle scelte, occupiamoci dell'intervento del caso. La soluzione è molto semplice: si introduce un nuovo "giocatore" 0 (il caso), che però farà le sue "scelte" in ogni vertice di sua pertinenza sulla base di una distribuzione di probabilità fissata sui rami uscenti da quel vertice.

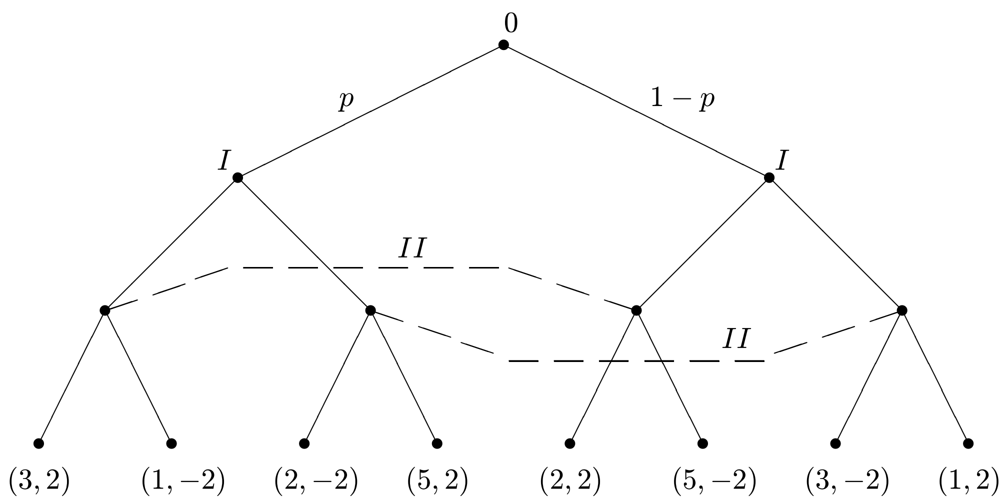
Esempio:



Evito di scrivere la forma normale di questo gioco. Ricordo solo che il giocatore II ha a sua disposizione 16 strategie. Ho indicato con delle linee calcate le scelte ottimali che i giocatori effettueranno ad ogni vertice (tali strategie ottimali si individuano facilmente con una analisi "a ritroso" del gioco, come in programmazione dinamica). Per farsi un'idea di come si proceda, occorre cominciare "dalla fine". Guardiamo allora l'ultimo nodo decisionale a sinistra (quello in cui II deve scegliere tra L_1 e R_1): visto che tocca a II scegliere, lui sceglierà L_1 in quanto questa scelta gli dà un guadagno pari a 1 anziché 0. Analogamente, II sceglierà R_2 anziché L_2 e così via. Una volta che abbiamo visto le scelte che farà II, possiamo ora (muovendoci a ritroso nell'albero delle decisioni) andare a vedere quale scelta farà I. Se lui sceglie T, sa che con probabilità 1/4 il giocatore II avrà da scegliere tra L_1 ed R_1: ma abbiamo già visto che in tal caso II sceglierà L_1, pertanto possiamo dire che, scegliendo T, con probabilità 1/4 il guadagno di I sarà 6. Visto che con probabilità 3/4 II si troverà a dover scegliere tra L_2 ed R_2, e che quindi come abbiamo visto sceglierà R_2, ne segue che con probabilità 3/4 il guadagno di I sarà 1. Ricapitolando: se I sceglie T ottiene un guadagno pari a 6 con probabilità 1/4 e pari a 1 con probabilità 3/4: quindi, scegliendo T il suo guadagno *atteso* (stiamo usando la terminologia consueta del calcolo delle probabilità) sarà pari a $\frac{1}{4} \cdot 6 + \frac{3}{4} \cdot 1$, ovverossia $\frac{9}{4}$. La stessa analisi fatta sulla parte destra dell'albero ci porta a dedurre che il guadagno atteso per I, scegliendo B, sarà pari a $\frac{7}{2}$. Visto che $\frac{7}{2}$ è maggiore di $\frac{9}{4}$, il giocatore I sceglierà quindi B. Per cui il risultato atteso di questo gioco sarà di $\frac{7}{2}$ per I e di 1 per il giocatore II.

Vorrei concludere questa introduzione alla TdG, soffermando l'attenzione sulla seguente coppia di giochi:





Per il primo dei due giochi si possono calcolare facilmente i guadagni attesi dei due giocatori, seguendo l'idea dell'induzione a ritroso come nel gioco precedente. Anche in questo caso ho usato le linee calcate per indicare quali siano le scelte ottimali di due giocatori in ogni nodo. Il secondo gioco differisce dal precedente solo per la presenza di due insiemi di informazione. Si noti che i guadagni di II nella zona di sinistra sono identici a quelli nella zona di destra dell'albero, mentre quelli del giocatore I cambiano. Se uno riflette un momento, capisce che è come se il giocatore II si trovasse di fronte a due giocatori diversi, sapendo che la probabilità di trovarsi di fronte all'uno piuttosto che all'altro è data da p oppure da $1-p$: nel primo gioco, però, il giocatore II **sa** quale dei due "tipi" ha davanti; nel secondo caso, invece, non sa chi sia davvero l'avversario che si trova di fronte.

Ma attenzione! Quando si descrive un gioco (in forma estesa o strategica) si ammette implicitamente che la descrizione del gioco sia conoscenza comune dei giocatori. Quindi, I è consapevole del fatto che II non sarà in grado di distinguere tra i due "tipi" che possono "impersonare" per così dire, il giocatore I. Pertanto, anche I deve tenere conto della mutata situazione rispetto all'altro gioco: in particolare, non è affatto scontato che le scelte di I che andavano bene nel primo gioco continuino ad andare bene anche nel secondo.

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

Visto che questa iniziativa degli "Amici dell'Acquario" è legata al nome di Nash, vale la pena ricordare che nel 1994 Nash ha ottenuto il premio Nobel per l'economia, congiuntamente ad Harsanyi e Selten, proprio per contributo che ciascuno di loro ha dato allo sviluppo della teoria dei giochi. Si noti che la data 1994 non è casuale: si situa a 50 anni esatti dalla prima edizione del libro di von Neumann e Morgenstern. Vorrei pertanto concludere queste note con una descrizione orribilmente stringata (stile "bignami") delle "buone ragioni" per cui il Nobel è stato assegnato proprio a questi scienziati.

Il contributo di Nash è stato essenzialmente il seguente:

come già ricordato, ha provato come si potesse estendere il teorema di esistenza di von Neumann dal caso dei giochi a somma zero a quelli di tipo generale. La possibilità di uscire fuori dalla gabbia dei giochi a somma zero è stata di rilevanza fondamentale, in quanto nella stragrande maggioranza delle applicazioni la condizione di essere a somma zero sarebbe troppo restrittiva.

ha offerto una idea di soluzione per una classe importante di giochi cooperativi: i giochi di contrattazione tra due giocatori. L'aspetto interessante del suo approccio sta nel punto di vista "assiomatico" da lui adottato, che poi per lungo tempo diventerà quasi una norma nell'affrontare i problemi di contrattazione.

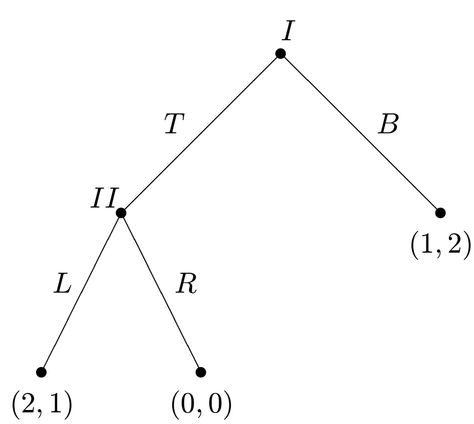
ha affrontato i giochi di contrattazione anche in un'altra ottica, riducendoli a giochi non cooperativi. L'importanza di questa sua proposta è tale per cui di solito si parla di "programma di Nash" ogni qual volta si vuole effettuare una analoga "riduzione" (ed è convinzione attuale del "teorico medio" di TdG che tale idea riduzionista sia di fondamentale rilevanza metodologica)

Il contributo di Harsanyi più importante è stato quello di aver "insegnato" come si potessero descrivere, nella TdG, situazioni in cui i giocatori non fossero certi di tutti i "parametri" del gioco che dovevano giocare. Si tratta dei cosiddetti giochi ad informazione incompleta che, usando la cosiddetta trasformazione di Harsanyi, vengono ricondotti a giochi di tipo "standard". Un esempio di cosa succeda effettuando questa trasformazione è dato dall'esempio visto in precedenza: il gioco in forma estesa descritto nell'ultimo disegno presentato è quello che si ottiene applicando la "trasformazione di Harsanyi" ad un gioco ad informazione incompleta (in cui, nell'esempio citato, il giocatore II non è certo di alcune caratteristiche del giocatore I). Questo contributo fondamentale di Harsanyi risale al 1967. Ma altri sono stati gli apporti significativi. Ad esempio, ha fornito una elegante giustificazione degli equilibri di Nash in strategie miste, proprio sfruttando la sua teoria sui giochi ad informazione incompleta. Ha dato anche altri contributi, per esempio proponendo una teoria della *selezione* degli equilibri al fine di risolvere i dilemmi che si hanno in presenza di più di un equilibrio di Nash, collaborando con Selten su questo tipo di problemi. Ma i suoi contributi non si limitano alla teoria dei giochi: è un importante sostenitore dell'utilitarismo, ed ha anche "sconfinato", esaminando i rapporti tra la TdG e l'etica.

Per quanto riguarda Selten, non occorre dimenticare la sua citata collaborazione con Harsanyi. A dire il vero, questo sodalizio è di antica data, tanto è vero che Harsanyi attribuisce a Selten stesso ampi meriti per quel che riguarda la sua formulazione dei giochi ad informazione incompleta. Tuttavia, Selten è certamente noto prima di tutto per l'aver dato il "via" alla teoria dei *raffinamenti* dell'equilibrio di Nash. Tutto comincia col 1965, anno in cui Selten pubblica (in tedesco) una nota in cui critica l'attendibilità dell'equilibrio di Nash per certi giochi in forma estesa. Viene così evidenziata una sottoclasse di equilibri, detti "perfetti nei sottogiochi", che sembrano soddisfare requisiti più stringenti di razionalità. L'effetto di questa sua osservazione è dirompente, per due ragioni. Una è che viene contestato alla radice il "programma" di von Neumann e Morgenstern di ridurre ogni gioco in forma estesa a forma strategica: si comprende che la forma estesa contiene informazioni essenziali che vanno perse nel passaggio a forma strategica (anche se si accetta il presupposto di von Neumann e Morgenstern, ovverossia che i giocatori siano perfettamente razionali). L'altra è che le sue considerazioni non si sono rivelate adeguate per scartare *altri tipi* di equilibri di Nash che a livello intuitivo sembravano essere altamente implausibili. Tanto è vero che egli stesso ritornerà sul problema dieci anni dopo, nel 1975, proponendo quelli che chiama "equilibri perfetti". Ma ormai il vaso era stato aperto: adesso vi sono libri interi dedicati al problema dei raffinamenti dell'equilibrio di Nash, senza che si sia per ora trovata una soddisfacente soluzione di carattere generale.

Visto che è facile, vorrei fornire un esempio in cui si possano capire le considerazioni di Selten nella sua prima critica all'equilibrio di Nash.

Si consideri il seguente gioco in forma estesa:



La forma strategica di questo gioco è la seguente:

$I \backslash II$	L	R
T	$(2,1)$	$(0,0)$
B	$(1,2)$	$(1,2)$

Si vede che sia (T, L) che (B, R) sono equilibri di Nash. Tuttavia, se si guarda la forma estesa, si vede che il secondo equilibrio *non è credibile*, essendo basato su una *minaccia "vuota"* di II nei confronti di I. Infatti, (B, R) può essere visto come ottenuto così: II "minaccia" I di giocare R e quindi I preferisce giocare B anziché T, perché così guadagna 1 anziché 0. Ma si tratta di una minaccia vuota: se I gioca T, il giocatore II non deciderà certo di giocare R, visto che guadagnerebbe 0: preferirà giocare L, ottenendo così 1. Non pretendo che queste considerazioni siano completamente convincenti (se pensiamo a questi numeretti davvero come ai guadagni dei giocatori, uno potrebbe pensare che un giocatore preferisca perdere qualcosa per "farsi una reputazione"; in realtà questi numeri in TdG sono un semplice espediente per rappresentare quelle che sono le vere preferenze dei giocatori, quindi obiezioni come questa sono difficili da sostenere). Comunque, penso che dall'analisi di questo gioco possa venire almeno qualche dubbio sul fatto che la forma strategica di un gioco sia davvero una rappresentazione equivalente alla forma estesa.