L'*abbc* dei problemi decisionali

F. Patrone

Decisori (razionali) interagenti

Cosa vuol dire questo titolo? C'è un errore di stampa? No, nessun errore. È voluta l'assonanza, il gioco di parole con la ben nota idea dell'*abc*. Al di là del misero trucchetto retorico, la tesi che verrà sostenuta in questo articolo è abbastanza impegnativa: un ottimo punto di partenza, anzi, una delle basi fondanti per giungere ad una descrizione formale di varie tipologie di "teorie delle decisioni", passa attraverso l'analisi di situazioni che a buon motivo possono essere denominate col termine *abbc*.

Vediamo subito qualche esempio. Classici problemi di decisione sono: punto sull'uscita del 7 come primo estratto sulla ruota di Napoli, o no? Scommetto sulla vittoria della Sampdoria nel prossimo derby, o no? Le chiedo se desidera venire a cena con me stasera, o no?

La formalizzazione di questi tre semplici esempi presenta alcune caratteristiche comuni:

- Sono date due alternative, che indico con x_1 e x_2;
- x_1 mi porta a due possibili esiti: a, che è il migliore possibile per me (vinco al lotto, vinco la scommessa, viene a cena!) e c, che è il peggiore (perdo, non viene a cena. . .)
- x_2 mi porta ad un unico esito b, certo (non gioco al lotto, non scommetto, non chiedo).

Nei casi indicati, che l'esito sia a oppure c dipende o da eventi aleatori che sono del tutto indipendenti dalla alternativa da me scelta (sto assumendo ad esempio di non scommettere con Cassano), oppure dipende dalla decisione autonoma di un'altra persona. Vale la pena di sintetizzare con una rappresentazione in forma tabellare quanto descritto fin qui a parole, in modo che emerga chiaramente la struttura comune dei problemi indicati. Particolare non da poco, questa tabella renderà evidente come mai io parli di *abbc* e non di *abc*, come potrebbe sembrare sulla base di quanto detto finora: molto semplicemente, b compare due volte.

$I \setminus S$	s_1	s_2
x_1	a	c
x_2	b	b

Tabella 1.

La tabella rende conto in modo esplicito del fatto che l'esito è determinato da due elementi: la scelta del decisore I fra x_1 e x_2, ed un fattore al di fuori del suo controllo. Questo secondo fattore può essere rappresentato da una variabile aleatoria che può assumere due valori, s_1 ed s_2. Oppure, usando un altro linguaggio, di uso comune in teoria delle decisioni (TdD), possiamo parlare di uno *stato di natura* che può essere s_1 oppure s_2. È ovvio come lo stato di natura possa, in genere, ammettere più di due realizzazioni (si pensi alla decisione se comprare azioni o BOT), ma la scelta di mettere in evidenza il caso in cui l'insieme dei possibili stati di natura, S, contiene due elementi non è dovuto solo a evidenti esigenze di semplicità, ma anche al fatto che questo caso particolare ha un ruolo fondazionale, come vedremo nell'ultima parte di questo articolo.

Una considerazione importante, da non sottovalutare, che rende significativi i problemi di cui ci stiamo occupando è il fatto che l'esito b si trovi ad essere *compreso* fra a e c, per quanto riguarda le preferenze del decisore chiamato a scegliere. Se, ad esempio, il decisore preferisse anche c a b, la sua scelta sarebbe ovvia: avremmo un esempio di applicazione del *principio di dominanza*, così chiamato in TdD. Insomma, concentriamo la nostra attenzione sul caso in cui la scelta del decisore non è banale, ovvero sulla *questione difficile*, per parafrasare una espressione in uso fra chi si occupa di comprendere cosa sia la mente.

Introdotto l'argomento, è ora il momento di convincere anche il lettore più riluttante, più critico, che l'*abbc* è davvero molto, molto importante. La mia strategia di convincimento è basata su una manovra *a tenaglia* (questa è l'occasione buona per il lettore di fuggire!) che usa due considerazioni:

- la pervasività dell'*abbc*, oltre la "normale" teoria delle decisioni: lo ritroviamo non solo in teoria dei giochi, ma anche in contesti quali quelli del *multiple self*[1];

[1] La comoda semplificazione del "decisore razionale" che viene usata nella teoria delle decisioni e nell'economia neoclassica nasconde il fatto che una persona "in carne ed ossa" presenta una complessa stratificazione di motivi, ragioni, pulsioni, istinti, che non sempre si compongono in modo appropriato. A seconda di quale sia l'aspetto che temporaneamen-

- come detto, il valore fondazionale dell'*abbc*: aspetto che analizzerò in dettaglio nel contesto delle decisioni in condizioni di rischio.

Cominciamo con la prima ganascia della tenaglia. Innanzitutto noto che vi è una differenza rilevante fra i primi due esempi citati: nel caso del lotto siamo (ragionevolmente) in grado di assegnare una probabilità oggettiva ai due stati di natura, nel secondo, no. Quando si scommette, ad esempio fra due amici, su chi vincerà il prossimo derby fra Sampdoria e Genoa, di solito non sono disponibili probabilità oggettive da attribuire ai tre esiti possibili della partita. Anzi, se ci fossero, probabilmente non ci sarebbe scommessa! Una caratteristica importante è proprio la divergenza[2] fra i due scommettitori sulla valutazione della probabilità attribuita ai vari stati di natura. Mi permetto di rivolgermi direttamente al lettore, invitandolo a non sottovalutare questo elemento di soggettività. Esso è rilevante non solo in attività "minori" come le scommesse (anche se queste "attività" spostano un bel po' di euro), ma anche in aspetti ben più rilevanti, come la speculazione finanziaria. La radice per l'esistenza della speculazione sta, come per le scommesse, nella divergenza fra le aspettative di chi compra e di chi vende[3].

La distinzione fra "giocare al lotto" e "scommettere" ci rimanda all'importante distinzione fra "decisioni in condizioni di rischio" (il lotto; von Neu-

te riesce a prendere la scena come protagonista, possiamo avere diverse priorità, diverse preferenze espresse dalla persona in oggetto. In questo senso è utile la metafora del "multiple self", ovvero di più "soggetti" che convivono all'interno di un singolo individuo. *The multiple self* è anche il titolo di un volume a cura di Jon Elster ([3]), che raccoglie vari contributi in merito, tra cui un'analisi del problema attraverso il "teorema di impossibilità" di Arrow, tematica introdotta da May ([7]).

[2] Consideriamo il caso di una scommessa tra due persone, assumendo che la posta in gioco sia piuttosto bassa, in modo da poter ritenere che l'attitudine dei due giocatori rispetto al rischio sia irrilevante. Supponiamo che la scommessa preveda che 1 euro puntato sulla vittoria della Sampdoria sia equivalente a x euro sulla vittoria del Genoa (lasciamo stare i pareggi, che non interessano...). Uno sarà disposto a puntare sulla vittoria della Sampdoria se e solo se la probabilità p_1 che attribuisce alla vittoria della Sampdoria è tale che $p_1 x > (1 - p_1)1$, ovvero $p_1 > \frac{1}{1+x}$. Viceversa, l'altro punterà sul Genoa se e solo se $(1-p_2)1 > p_2 x$, ovvero se $p_2 < \frac{1}{1+x}$ (chiaramente, p_2 è la probabilità che l'altro attribuisce alla vittoria della Sampdoria). Come si vede, i due saranno disposti a scommettere tra di loro solo quando le loro valutazioni probabilistiche sull'unico stato di natura rilevante divergono. In tal caso sarà possibile trovare un valore x in modo che entrambi reputino conveniente la scommessa! Un bell'esempio di *transazione speculativa*: lo scambio, il contratto, avviene sulla base di diverse previsioni sul futuro.

[3] Due riferimenti significativi, a questo proposito, sono Aumann ([2])e Milgrom e Stokey ([8]).

mann e Morgenstern ([10])) e “decisioni in condizioni di incertezza” (le scommesse; Savage ([12]))[4]. In entrambi i casi ci troviamo di fronte alla tabella vista sopra, solo che per le decisioni in condizione di rischio abbiamo un dato esogeno addizionale, ovvero una distribuzione di probabilità su S.

Volendo giungere a un modello che ci permetta di capire quale possa essere la scelta del decisore, contrariamente a quanto potrebbe sembrare a prima vista, la domanda da fare al decisore non riguarda quali siano le sue preferenze tra gli esiti finali, a, b o c: abbiamo già detto che preferisce a a b e b a c. Questo non basta: in entrambi gli esempi la domanda fondamentale è: il decisore coinvolto preferisce la “prima riga” della tabella o la “seconda riga”? Immagino che questo possa sembrare quanto meno curioso, se non peggio, a chi legge: chi si occupa di TdD, per predire se il decisore sceglierà x_1 oppure x_2, deve sostanzialmente chiedergli “preferisci il complesso di conseguenze che scaturisce da x_1 o quello che scaturisce da x_2, tenendo conto dei possibili stati di natura?”. Sembra una tautologia, e potremmo anche dire che lo è, se non ci fosse di mezzo il punto di vista consequenzialista, tradizionale in TdD: comunque, detto questo, davvero ci si può far l’idea che la condizione di chi si occupa di TdD sia davvero miserevole. Non è così! Dopotutto, anche chi si occupa di hard sciences ha bisogno di dati per poter fare previsioni, mica basta una splendida teoria! Ebbene, le domande su “che riga preferisci” hanno proprio la funzione di conoscere uno dei principali dati del problema di decisione. Il punto cruciale è che bastano le domande relative a tabelle come quelle date (che coinvolgono solo due alternative e solo due stati di natura), assieme ad una ipotesi di continuità ed una di coerenza (tradotta tecnicamente nella condizione detta di indipendenza o nel *sure thing principle* a seconda che il contesto sia rischio oppure indifferenza) per ricostruire completamente le preferenze del decisore rispetto anche a problemi di decisione molto più complicati. Ma di questo mi occuperò alla fine: è la seconda ganascia della tenaglia.

Tornando ai due campi discussi fino ad ora (lotto e scommesse), li ho “incasellati” in due diversi sottosettori della TdD: le decisioni in condizioni di rischio e quelle in condizioni di incertezza. Nelle condizioni di rischio (lotto), un decisore ha a disposizione una distribuzione di probabilità data su S. Questa, congiuntamente alla scelta di una alternativa, induce (banalmente) una distribuzione di probabilità sull’insieme delle possibili conseguenze. Sta

[4]Ma ricordo anche Knight ([5]), che ha il merito di avere attirato l’attenzione sulla importante distinzione fra rischio ed incertezza.

allora al nostro decisore capire, nell'esempio, se preferisce l'esito certo (o ottenuto con probabilità 1: nella TdD classica, nel caso di un modello finito, non si fa distinzione tra queste due condizioni diverse!) b, oppure avere a con probabilità p e c con probabilità $1-p$. Nelle decisioni in condizione di incertezza (la scommessa), il decisore deve riflettere se preferisce b alla possibilità di ottenere a se lo stato di natura è (sarà...) s_1, e c se lo stato di natura è s_2. Detto in termini informali, ciò richiede una valutazione della plausibilità che lo stato di natura sia s_1 o s_2. Ciò nella teoria elaborata da Savage di fatto porta alla "costruzione" di una probabilità soggettiva (del decisore) su S, per cui tecnicamente (ovvero, matematicamente) per le decisioni in condizione di incertezza ci si riduce a fare lo stesso tipo di calcoli di quelli richiesti nel caso di rischio, ovvero il calcolo della utilità attesa.

Ricordo come in TdD, sia nel caso di rischio che in quello di incertezza, un decisore può essere caratterizzato mediante una cosiddetta "funzione di utilità", definita sullo spazio E delle conseguenze[5] ed a valori reali. Per ogni alternativa x disponibile, il decisore calcolerà l'utilità attesa[6]

$$\sum_{s \in S} p(s)u(h(x,s)).$$

Qui con h ho indicato la funzione che ad ogni alternativa x e ad ogni stato di natura s associa la conseguenza che ne deriva. Il decisore sceglierà, fra le alternative disponibili, quella che rende massima l'utilità attesa corrispondente.

Prima di passare all'invito a cena, vorrei sottolineare un contesto in cui la struttura *abbc* ha un ruolo rilevante: mi riferisco alla sperimentazione, intesa in senso lato. Più precisamente, si tratta di decidere fra non sperimentare (esito b), oppure sì (esiti possibili a o c). Come caso paradigmatico della parte " *ac* " posso citare il cosiddetto "test d'ipotesi", che (fissata una soglia di tolleranza, di errore) porta sostanzialmente a due possibili risultati: la ipotesi H_0 è accettata oppure rigettata (al livello di significatività che riteniamo rilevante). E la situazione in cui si trova chi deve decidere se effettuare o meno un esperimento è analoga a quella che abbiamo visto in TdD: tipicamente, l'esito " *H_0 è accettata*" ci dirà che il medicamento (o il test, o...) non è rilevante. È abbastanza ovvio come questo esito sia, generalmente, ritenuto

[5] La funzione di utilità di un decisore è determinata solo a meno di trasformazioni affini strettamente crescenti.

[6] La formula vale nel caso finito, cioè quando sono finiti gli insiemi delle alternative, degli stati di natura e delle possibili conseguenze.

peggiore rispetto all'esito b in quanto ci si ritrova sostanzialmente al punto di partenza, nonostante i costi sopportati (e, oltre ai soldi, l'energia dissipata, il tempo perso, la fatica, lo stress, la maggiore difficoltà a pubblicare i risultati...).

Visto che stiamo parlando di sperimentazione[7] in senso lato, cito un contesto in cui una appropriata "sperimentazione" ha un ruolo significativo. È il caso della ricerca di un punto di massimo globale per una funzione a valori reali: trovato (approssimativamente) un punto di massimo locale mediante un appropriato algoritmo (metodo del gradiente, o metodi più sofisticati), ho di fronte due alternative:

- sperimentare ("x_1"): provare (dove "come provare" varia da "a capocchia", fino all'uso di metodi come il "simulated annealing") a vedere se in un qualche punto la mia funzione assume un valore maggiore di quello attualmente trovato, e quindi fare ripartire l'algoritmo di ricerca locale (o altro appropriato). Mi sembra ovvio chi siano a e c.

- STOP ("x_2"), dicendo (sperando?) che quello trovato è, presumibilmente, un punto di massimo globale. O, per lo meno, di quello ci accontentiamo.

Passiamo finalmente al terzo esempio menzionato, l'invito a cena. Qui lo "stato di natura" è sostituito da una scelta consapevole fatta da una persona in carne ed ossa, anziché dal fato. Cosa cambia? Che ci trasferiamo dalla stanza della TdD a quella della TdG (teoria dei giochi). Al di là dei nominalismi, cambia moltissimo, ma allo stesso tempo cambia poco. Volendo sintetizzare, potremmo dire che l'unico aspetto significativo è che la determinazione della probabilità assegnata a s_1 ed s_2, da esogena diventa endogena. Cioè, si cerca di comprendere quale tipo di scelta farà l'altro decisore (nel nostro caso l'amabile signora), sulla base di ciò che noi sappiamo delle sue preferenze, della sua razionalità ed intelligenza. Per lo meno, nel caso classico in cui si assume che questi elementi del gioco siano "conoscenza comune" fra i giocatori. Si noti che, anche nelle decisioni in condizione di incertezza, la probabilità è "endogena", ma nel senso che il decisore avvertito interiorizza ed analizza tutte le informazioni rilevanti che ha a disposizione sulla situazione che ha di fronte. Quindi, la probabilità assegnata ai vari stati di

[7]Osservo che ciò che differenzia un problema di sperimentazione da un problema di decisione è tipicamente la valenza conoscitiva del primo.

natura è comunque conseguenza di aspetti esogeni rispetto alla rappresentazione del problema di TdD che è fornita dalla semplice tabella che abbiamo usato (Tabella 1).

È ovvio che, se sono convinto per qualche motivo che l'esito a sia preferito dalla signora, ritengo che ella sceglierà y_1 e quindi io sceglierò x_1: se invece penso che c sia da lei preferito, sceglierò x_2; nel caso in cui si possa arrivare a una stima probabilistica su ciò che potrebbe scegliere la *de cuius*, mi comporterò come nei casi già trattati, ovvero con un calcolo di utilità attesa[8]. Noto come la tabella precedente, con ovvie piccole modifiche, diventa la tabella 2 (la signora è identificata come decisore II).

$I \setminus II$	y_1	y_2
x_1	a	c
x_2	b	b

Tabella 2.

Nel linguaggio della TdG abbiamo una cosiddetta "game form in forma strategica". Se poi abbiamo a disposizione un paio di funzioni di utilità, diciamo u per I e v per II, possiamo inserire nelle caselle, al posto del generico esito e, la coppia di numeri $u(e)$, $v(e)$. Otteniamo così un "gioco in forma strategica", come mostrato nella tabella 3.

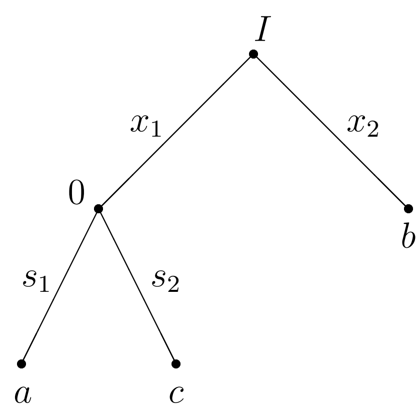
$I \setminus II$	y_1	y_2
x_1	$(u(a), v(a))$	$(u(c), v(c))$
x_2	$(u(b), v(b))$	$(u(b), v(b))$

Tabella 3.

Perché ho tirato in ballo il termine "forma strategica"? Dopotutto, non penso che questa ultime righe abbiano scatenato un vivo interesse da parte di chi legge! La ragione è dovuta al fatto che voglio sottolineare come la struttura della tabella, che prevede una riga con b b, emerga in modo naturale da una particolare struttura dinamico-informativa presente non solo nel

[8]Noto che "utilità" è un termine tecnico: non facciamo confusione (in questo esempio, poi!) col significato di questo termine nel linguaggio "di tutti i giorni". Ovvero, il termine "funzione di utilità", introdotto in precedenza, indica semplicemente una funzione in grado di rappresentare le preferenze del decisore cui si riferisce; la specificazione "di utilità", ereditata da un passato ormai piuttosto lontano, serve convenzionalmente giusto per dire che si tratta di una funzione soddisfacente questa particolare caratteristica.

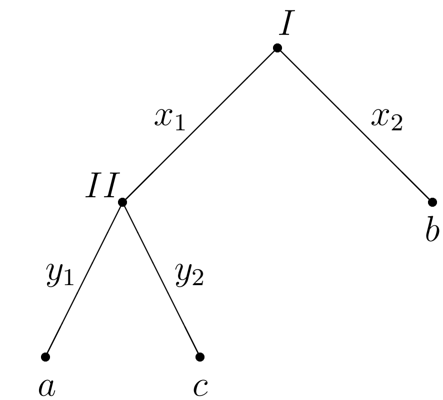
nostro esempio, ma in altri casi molto interessanti. Per illustrarla, ci farà comodo usare gli "alberi di decisione" o, nel caso della TdG, la cosiddetta rappresentazione in "forma estesa" (della game form o del gioco) che in prima approssimazione può essere visto come una generalizzazione dell'albero delle decisioni dal caso di un decisore singolo a quello in cui sia presente più di un decisore. Cominciamo col gioco del lotto. Io *prima* decido se scelgo x_1 o x_2. Dopo, viene fatta l'estrazione e quindi saprò se ho vinto o se ho perso. Ammesso che io *abbia giocato*! Traduciamo il tutto nella Figura 1:



Il nodo in alto è etichettato con "I": I indica il decisore cui compete scegliere in quel nodo (ovviamente qui ne abbiamo solo uno, dopotutto è un problema di TdD...). Il nodo a metà a sinistra ha l'etichetta "0", il che serve per dire che lì tocca alla sorte "decidere" (il momento dell'estrazione del lotto). I nodi finali sono etichettati col simbolo che identifica l'esito loro corrispondente.

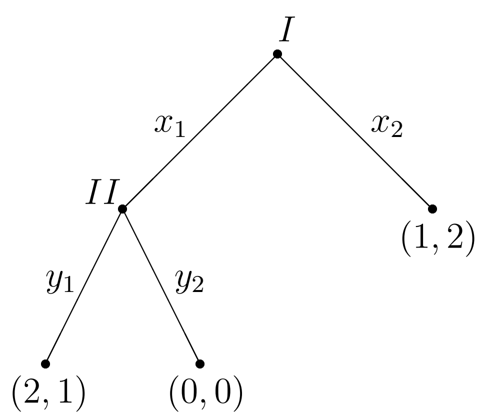
Se vogliamo riportare in forma tabellare le caratteristiche essenziali di questa figura, ci ritroviamo inevitabilmente di fronte esattamente la tabella 1.

La rappresentazione per il caso di una scommessa è simile, e quindi non mi vi soffermo. Mi interessa di più passare a considerare il caso dell'invito a cena o, per meglio dire, il caso "da TdG". Abbiamo la game form in forma estesa descritta nella Figura 2.



Abbiamo già fatto delle considerazioni per cui il caso interessante si ha quando a è preferito (da I) a b e b a c. Possiamo descrivere questo fatto scegliendo una funzione di utilità per il primo decisore, I, che assegni opportuni valori a tali punti. Ad esempio: $u(a) = 2$; $u(b) = 1$; $u(c) = 0$. Ma qui, contrariamente alla TdD, abbiamo anche un secondo decisore, il quale anche ha le sue preferenze rispetto ai possibili esiti! "Giocando" sulle preferenze dei giocatori si possono avere un certo numero di esempi interessanti. Qui ne descriverò due, accennando rapidamente ad un terzo.

Cominciamo con "il gioco di Selten", illustrato nella Figura 3.



Per la struttura del gioco, possiamo facilmente individuare quale sia l'esito prevedibile. Basta notare che II (se chiamato a decidere) sceglie y_1

anziché y_2. E quindi per I è meglio scegliere x_1, che porterà ragionevolmente all'esito a, da lui preferito all'esito b, cui arriverebbe con certezza scegliendo x_2. L'aspetto intrigante di questo gioco è che esso ha *due* equilibri di Nash, come si vede dalla forma strategica, che rappresentiamo nella Tabella 4, e che ha la struttura "*abbc*".

$I \setminus II$	y_1	y_2
x_1	$(2,1)$	$(0,0)$
x_2	$(1,2)$	$(1,2)$

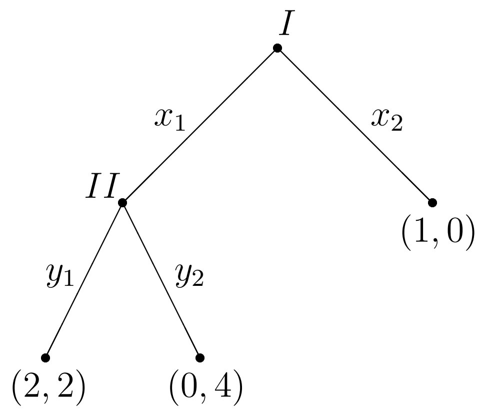
Tabella 4.

Un equilibrio è (x_1, y_1), ma c'è anche (x_2, y_2). Questa semplice osservazione ha un valore dirompente per la TdG: scopriamo che ci sono equilibri di Nash *poco credibili*[9]. Un tema importante, che ha generato una letteratura piuttosto corposa. Non mi soffermo troppo, tuttavia, su questo esempio[10], perché voglio lasciare spazio ad un altro esempio (spesso chiamato "gioco della fiducia").

Basta prendere il gioco di Selten e modificare solamente le preferenze del giocatore II, ottenendo il gioco in Figura 4.

[9] Questi contributi sono merito di Selten, il che spiega come mai abbia etichettato questo gioco come "gioco di Selten". C'è un'altra conseguenza, molto rilevante, che emerge da questo esempio: contrariamente a quanto riteneva von Neumann ([9]), la forma strategica di un gioco sembra non essere in grado di cogliere tutti i dettagli che si trovano nella forma estesa, nonostante l'assunzione di intelligenza fatta sui giocatori (ma su questo, vedasi anche Mailath et al. ([6])).

[10] La cui importanza è notevole all'interno della TdG, ma meno evidente per chi non sia interessato alle questioni specifiche di questa disciplina, pur se rilevanti.



Considerazioni identiche a quelle fatte per il gioco di Selten ci portano a ritenere che il giocatore I sceglierà y_2 e, di conseguenza, per I la scelta da fare è x_2. Questo è anche l'unico equilibrio di Nash di questo gioco. E allora? Cosa c'è di notevole? Diavolo! L'esito finale, b stavolta è inefficiente: entrambi preferirebbero l'esito a! Abbiamo, insomma, lo stesso problema di inefficienza che ci è offerto dal ben noto gioco detto "dilemma del prigioniero"[11], che rappresentiamo nella Tabella 5. Non male, per un misero *abbc*: ci offre un paio di esempi importantissimi, per la TdG. Se il primo esempio è dirompente per la TdG, questo secondo ci permette di mettere in luce l'importanza delle istituzioni[12], e come possa convenire ad entrambi i decisori pagare (le tasse?) per avere una istituzione (lo Stato?) che possa garantire l'accordo: "io scelgo l'opzione x_1 e tu poi scegli y_1".

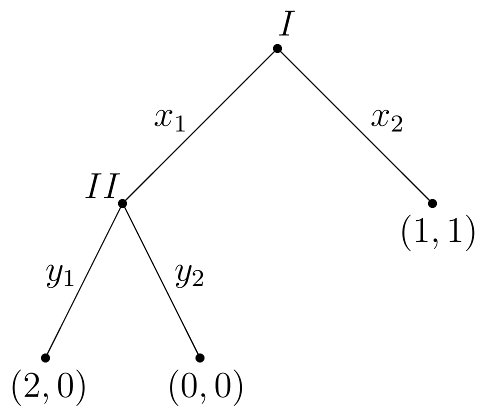
$I \setminus II$	y_1	y_2
x_1	$(3, 3)$	$(1, 4)$
x_2	$(4, 1)$	$(2, 2)$

Tabella 5.

[11] Questo gioco ha l'unico equilibrio (x_2, y_2), che è inefficiente (entrambi i giocatori preferirebbero l'esito derivante da (x_1, y_1). Esercizio per i curiosi: provare che il dilemma del prigioniero sfugge al nostro schema *abbc*, nel senso che abbiamo bisogno di quattro esiti. Chi vorrà, potrà discuterne sul forum di matematicamente.it

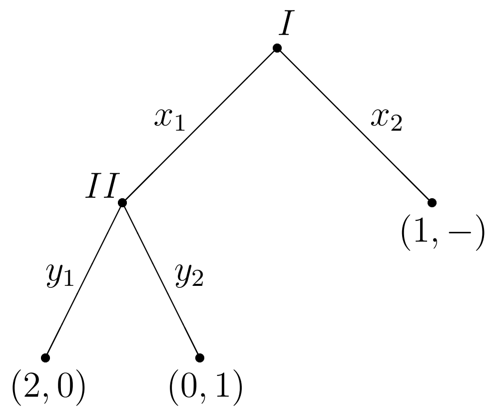
[12] Rinvio, per una più dettagliata discussione di questo esempio e delle sue valenze, alle mie paginette disponibili in rete [11]

Come terzo esempio, piuttosto intrigante, mi limito a porre una questione: che cosa succede se II è indifferente fra a e c? Particolarmente interessante (frustrante) per I è il caso illustrato in Figura 5.



Ma la storia non finisce qui. Siamo arrivati alla TdG, ovvero a considerare due decisori invece che uno. Ma quale caso è più interessante di quello in cui i due giocatori sono la stessa persona? Magari in tempi diversi. In particolare, considerata prima e dopo un qualche evento rilevante (avere assunto sostanze che creano dipendenza, aver ascoltato il canto delle sirene...). Abbiamo sempre lo schema rappresentato con un (piccolo) albero delle decisioni, anzi: per quanto riguarda la "game form", del tutto identico ai due precedenti. Cambia qualcosa rispetto ai payoff: vedasi la Figura 6. Non metto il payoff di II (che come individuo è I, ma dopo l'evento topico) nel nodo terminale nel ramo di destra: dopotutto, se I sceglie x_2, è come se il giocatore II non vedesse mai la luce. Infatti le scelte di I sono: x_1 ("ascolto il canto delle sirene", "provo quella sostanza") oppure x_2 (non faccio queste scelte "pericolose"). Il guaio è che, se I sceglie x_1, poi dopo non tocca più scegliere a "lui", in quanto la scelta viene affidata ad un altro "sé". Sappiamo bene che chi ha ascoltato il canto delle sirene vuole restare per sempre ad ascoltarlo, dimenticandosi di Penelope, contrariamente ai "buoni propositi" (aggiunti alla voglia di sperimentare: guarda caso, ritorna un tema già menzionato in queste pagine) del precedente "sé", ormai scomparso. Sappiamo bene come, secondo Omero, Ulisse sia riuscito a giungere all'esito a, modificando opportunamente la "game form", cioè tagliando un ramo dell'albero[13]. Non credo ci sia bisogno di rimarcare la forte analogia strutturale con il gioco della fiducia. Dopotutto, le sanzioni, la reputazione, le carceri, sono tutti elementi che, come l'essersi fatto legare all'albero maestro, portano tendenzialmente a rendere "impossibile" (o, se non altro, non più conveniente) la scelta y_2 per II.

[13] Sto parlando dell'albero in figura, non dell'albero maestro della nave!



Spero che l'importanza e la varietà degli esempi mostrati illustrino a sufficienza la rilevanza di questa struttura *abbc* per problemi decisionali. È comunque ora di lasciare gli esempi, e passare alla seconda ganascia della tenaglia. Lo farò nel contesto delle decisioni in condizioni di rischio.

Affermo che, sotto condizioni ragionevoli, conoscere le preferenze di un decisore rispetto ad ogni coppia di risultati del tipo:

- b con certezza;
- a con probabilità p e c con probabilità $1 - p$,

al variare degli esiti nell'insieme E degli esiti possibili e di p in $[0, 1]$, mi permette di conoscere le preferenze del mio decisore rispetto a due qualsiasi "lotterie" su E. Ciò significa che sono in grado di poter dire quale sarà la scelta fatta dal decisore, in ogni situazione che si configuri come "scelta in condizioni di rischio".

Ricordo che, in questo contesto, ad ogni alternativa a disposizione del decisore è associata una distribuzione di probabilità sull'insieme degli esiti possibili. Cosa che, nel gergo della TdD, viene per l'appunto detta "lotteria". Pertanto, visto che ogni alternativa a disposizione del giocatore determina una lotteria sugli esiti possibili, grazie al principio consequenzialista, nel momento in cui conosciamo le preferenze del decisore rispetto a queste lotterie, automaticamente sappiamo quale alternativa scegliere (ovviamente quella che induce la lotteria da lui preferita).

Se supponiamo che E sia finito (ipotesi di comodo, che mi permette di usare strumenti non troppo sofisticati), ovvero che sia $E = \{e_1, \ldots, e_r\}$, una lotteria su E è quindi una distribuzione di probabilità su E, che possiamo individuare con il vettore $(p_1, \dots, p_r)$, con le solite condizioni che i p_i siano non negativi e che sommino ad 1. Si tratta di inserire in qualche modo queste lotterie in una scala di valori, costruita grazie a ciò che abbiamo supposto di sapere sulle preferenze del decisore sui risultati possibili. L'idea è semplice: cerco due esiti, uno che sia preferito a tutti gli altri, a, ed uno che invece sia "il più spreferito", c. Poi, dato un qualunque esito b, una opportuna e ragionevole ipotesi di continuità (avete presente il teorema degli zeri?) mi permette di garantire che b sia equivalente a una apposita "lotteria" fra a e c che assegna probabilità λ ad a ed $1 - \lambda$ a c. Pertanto, per ogni $e_i \in E$, avrò un λ_i tale che e_i sia equivalente alla lotteria che assegna probabilità λ_i ad a e $1 - \lambda_i$ a c.

Nel caso generale, volendo confrontare due generiche lotterie, è sufficiente la cosiddetta ipotesi di "indipendenza", la quale permette di ridurre una qualsiasi lotteria ad una del tipo appena visto, che assegna una appropriata probabilità ad a e la probabilità complementare a c. Questa operazione di riduzione è molto semplice (e, per così dire, "obbligata"). Sia data una lotteria $(p_1, \dots, p_r)$: l'ipotesi di indipendenza (con un po' di abuso di notazioni) ci porta a questi calcoli, che illustrano quanto detto[14]:

$$p_1 e_1 + \dots p_r e_r = p_1(\lambda_1 a + (1 - \lambda_1)c) + \dots + p_r(\lambda_r a + (1 - \lambda_r)c) =$$

$$= (p_1\lambda_1 + \dots p_r\lambda_r)a + (p_1(1 - \lambda_1) + \dots p_r(1 - \lambda_r))c.$$

Abbiamo così "ridotto" la lotteria data ad una che coinvolge solo a e c.

A questo punto, date due lotterie $(p_1, \dots, p_r)$ e $(q_1, \dots, q_r)$, è sufficiente confrontare il *numero* $p_1\lambda_1 + \dots p_r\lambda_r$ col numero $q_1\lambda_1 + \dots q_r\lambda_r$: se ad esempio quest'ultimo numero è maggiore dell'altro, vorrà dire che la lotteria $(q_1, \dots, q_r)$ è preferita a $(p_1, \dots, p_r)$. Quindi, come affermato, la possibilità di fare confronti fra "b" ed "ac" si presenta come una sorta di "brick" (LEGO docet), a partire dal quale possiamo effettuare costruzioni, pardon: confronti, molto elaborate e di portata generale.

Naturalmente il punto importante è: possiamo ritenere "ragionevoli" le assunzioni di continuità e di indipendenza, nel senso che possiamo presumere che valgano per *ogni* decisore in un *qualsiasi* contesto di decisione in condizioni di rischio? La risposta che mi sento di dare è, sostanzialmente, sì. Con

[14] Lascio a chi lo desidera di trasformarli in considerazioni corrette dal punto di vista formale. Nella sostanza, non abbiamo fatto altro che sostituire ad ogni esito e_i la lotteria ad esso equivalente: $\lambda_i a + (1 - \lambda_i)c$ e poi abbiamo usato dell'algebra elementare.

l'ovvio *caveat*: stiamo parlando della modellizzazione formale di una classe di problemi "reali", e pertanto non possiamo sperare in una perfetta adesione del modello alla realtà. Il punto discriminante è quindi se queste due ipotesi rappresentino uno scarto troppo forte rispetto a quanto possiamo osservare e sperimentare (anche attraverso l'introspezione). Con queste avvertenze, la risposta che viene data dalla TdD classica è positiva (anche se non mancano certo critiche ed obiezioni, a partire da Allais ([1]) fino a Kahneman e Tversky ([4]) e alla "behavioral decision theory"), soprattutto se si accorda un valore positivo al fatto di avere a disposizione un modello ragionevolmente semplice. Una osservazione specifica riguarda la condizione di indipendenza: molte sue apparenti violazioni corrispondono spesso a modellizzazioni in cui è violata la indipendenza (sic!) fra alternative a disposizione del decisore e stati di natura, in particolare quando la scelta del decisore influenza la probabilità di realizzazione degli stati di natura.

In conclusione, non so se ho convinto appieno il lettore, ma almeno spero di aver mostrato che con un semplice *abbc* si può fare parecchia strada, e molto panoramica.

Riferimenti bibliografici

[1] Allais, M., "Le comportemente de l'homme rationnel devant le risque: Critique des postulats et axioms de l'école Americaine", *Econometrica* 21, (1953), pp. 46-53.

[2] Aumann, R. J., "Subjectivity and correlation in randomized strategies", *Journal of Mathematical Economics* 1 (1974), pp. 67-96.

[3] Elster, J., (curatore) "The multiple self", Cambridge University Press, Cambridge, (1986).

[4] Kahneman, D., Tversky A., "Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk", *Econometrica* 47 (1979), pp. 263-291.

[5] Knight, F. H., "Risk, Uncertainty, and Profit, Hart, Schaffner and Marx" Houghton Mifflin, (Boston MA)(1921) . Trad. it.: Rischio, incertezza, profitto, La nuova Italia, Firenze, 1960

[6] Mailath, G. J., Samuelson L., Swinkels, J.M., "Normal Form Structures in Extensive Form Games", *Journal of Economic Theory* 64, (1994), pp. 325-371.

[7] May, K. O., "Intransitivity, utility, and the aggregation of preference patterns", Econometrica, 22, (1954), pp. 1-13.

[8] Milgrom, P. R., Stokey N., "Information, trade and Common Knowledge", *Journal of Economic Theory* 26, (1982), pp. 17-27.

[9] von Neumann, J. "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele", *Matematische Annalen* 100, (1928), pp. 295-320

[10] von Neumann, J, Morgenstern, O., "Theory of Games and Economic Behavior", Princeton University Press, Princeton (1994); seconda edizione (con in appendice la derivazione assiomatica dell'utilità attesa): 1947; terza edizione: 1953.

[11] Patrone, F., Prestiti: `http://dri.diptem.unige.it/altro_materiale/implementazione_legge_sui_prestiti.pdf`.

[12] Savage, L. J., "The Foundations of Statistics", Wiley, New York (1954).

[13] Selten, R., "Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit. Teil I: Bestimmung des dynamischen preisgleichgewichts; Teil II: Eigenschaften des dynamischen preisgleichgewichts", *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft* 121, (1965), pp. 301-324 e 667-689