handout per la conferenza

La matematica e i "giochi"

Biblioteca "Rosanna Benzi" - Genova Voltri
13 ottobre 2004

Fioravante PATRONE
Dipartimento di Matematica
Via Dodecaneso 35
16146 GENOVA
patrone@dima.unige.it

http://www.dima.unige.it/~patrone	homepage
http://tdg.dima.unige.it	web teaching
http://www.citg.unige.it/citg.htm	web server "CITG"
http://www.scallywag.it	web page del gruppo Sca$\lambda\lambda$ywag

Sono contenta di aver vissuto vent'anni che valeva la pena di vivere e che non sostituirei con altri.

Rosanna Benzi

Abstract
Lo studio del comportamento dei partecipanti ad un gioco, inteso come modello per affrontare un problema di interazioni socio-economiche, può trovare applicazioni in contesti apparentemente molto lontani, come l'indagine sulla rilevanza dei singoli geni nell'insorgenza di malattie genetiche.

Handout

• La TdG nasce 60 anni fa, nel 1944: "Theory of Games and Economic Behavior", di J. von Neumann e O. Morgenstern.

• Distinzione fra giochi cooperativi e non-cooperativi: se si possono oppure no sottoscrivere accordi vincolanti.

• Vedi note in rete:
`http://www.dima.unige.it/~patrone/divulgazione-pat.htm`
In particolare le note sui giochi non cooperativi e cooperativi.

• Giochi cooperativi, anzi: TU-games.
Abbiamo insieme di giocatori N e, per ogni S, sottoinsieme di N, è dato $v(S) \in \mathbb{R}$.
Potrebbe essere quanto S riesce ad ottenere se i suoi membri "mettono in comune" le loro risorse, abilità, etc.

• Un esempio (per altri esempi, vedi i file disponibili in rete):
Esempio Abbiamo tre giocatori che per semplicità chiameremo 1, 2, 3. Si ha: $v(1) = v(2) = v(3) = 0$; $v(1,2) = v(1,3) = 4$; $v(2,3) = 6$; $v(1,2,3) = 20$
Consideriamo anche un altro gioco, w, che assegna agli stessi giocatori (e alle loro coalizioni) i seguenti valori: $w(1) = w(2) = w(3) = 0$; $w(2,3) = w(1,3) = 4$; $w(1,2) = 6$; $w(1,2,3) = 20$.
Si noti che in questo esempio abbiamo usato notazioni SCORRETTE. Dovremmo scrivere $v(\{1\})$ invece di $v(1)$, $v(\{1,2\})$ invece di $v(1,2)$, ecc. Ma tutti fanno così, perchè è così noioso scrivere tutte quelle parentesi graffe...

• Condizione significativa: la superadditività:

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) \quad \text{se} \quad S \cap T = \emptyset$$

Se il gioco è superadditivo, conviene mettersi tutti assieme per ottenere $v(N)$ che è il miglior risultato possibile.

• Ma non è finita qui:
Come dividere il "bottino"?
Per quanto detto ci limitiamo a considerare una allocazione $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I\!R^n$.
Il significato è che x_i dice quanto "tocca" al giocatore i

• Una tabella sinottica:

PRINCIPI	CONDIZIONI
realismo	$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq v(N)$ (*)
incentivi alla partecipazione	$x_i \geq v(i)$ (**) $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$, $(\star)$ caso particolare $\sum_{i \in N} x_i \geq v(N)$ (***)
giustizia, fairness	simmetria, anonimità
a ognuno secondo i suoi meriti...	ciò che uno ottiene è positivamente correlato coi suoi contributi (marginali?)

• la nomenclatura di base:
(*) e (***): pre-imputazione
(*) e (***) e (**): imputazione
(*) e (***) e (**) ed inoltre $(\star)$: allocazione nel *nucleo*

• property driven solution

• valore Shapley: simmetria (giustizia), null player property (a ognuno secondo i suoi meriti...), pre-imputazione (realismo e incentivo alla partecipazione), additività (??? comoda proprietà matematica?)

• il valore Shapley non è altro che la media dei contributi marginali:

$$\Phi_i(v) = (\frac{1}{n!}) \sum_{\sigma} m_i^\sigma(v) \text{ per ogni } i \in N$$

Per capire la formula, dobbiamo sapere cosa vuol dire $m_i^\sigma(v)$.
L'idea è semplice: $\sigma : N \to N$ è una permutazione.
Consideriamo $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$. Essendo $i \in N$, ci sarà un certo indice $j \in N$ t.c. $i = \sigma(j)$.
Consideriamo allora le coalizioni $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\}$ e $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j)\}$.
Essendo $i = \sigma(j)$, abbiamo che i non appartiene alla coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\}$, mentre $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j)\}$ è ottenuta aggiungendo i.
Allora $v(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j)\}) - v(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\})$ è il contributo marginale di i alla coalizione $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\}$.
E $m_i^\sigma(v)$ indica esattamente ciò:
$m_i^\sigma(v) = v(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j)\}) - v(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(j-1)\})$,
dove $i = \sigma(j)$.

• Applicazione: analisi genetica
- geni, microarray
- differenzialmente espressi
- matrice di 0,1
- principio di causalità
- valore Shapley (NB: “property driven”, con proprietà adeguate al contesto!)
- risultati sperimentali: vedi le pagine allegate